ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКОГО ЯВЛЕНИЯ В ГАЗАХ

Г.И.Шипов
shipov@aha.ru, website http://www.shipov.com

Введение

Использование лазеров, работающих на большем числе активных сред и квантовых переходов, позволяет существенно расширить класс анализируемых молекул различных веществ [1]. Однако, несмотря на большое число практических приложений, в литературе до настоящего времени отсутствует последовательное изложение теории импульсного оптико-акустического (ОА) эффекта в газах. Это обстоятельство затрудняет корректную интерпретацию полученных экспериментальных результатов и целенаправленную оптимизацию параметров измерительной аппаратуры.

1 Теоретическая модель ОА эффекта а газовой ячейке

Так же как и в [2], для описания процессов в ограниченном объеме газовой ячейки воспользуемся следующей системой уравнений газодинамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\rho\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -grad\ P + \eta\triangle\mathbf{v} + (\xi + \frac{\eta}{3})grad\ div\mathbf{v}, \tag{2}$$

$$\rho\frac{dU}{dt} = \lambda\triangle T - P\ div\ \mathbf{v} + \sigma_{ik}\frac{\partial\ v_k}{\partial x_i} + Q, \quad i,k,j... = 1,2,3 \tag{3}$$

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \tag{4}$$

$$U = C_V T. \tag{5}$$

Предполагается ограниченность объема газа жесткими толстыми стенками ($V = V_0$), граничные условия на которых имеют вид: $\mathbf{v}|_S = 0$ и $T|_S = T_0$. При заданных значениях коэффициента теплопроводности λ, продольной и поперечной вязкости η и ξ, теплоемкости газа C_V, объема V и плотности внешних тепловых источников на единицу объема Q система уравнений (1)- (5) образует систему семи уравнений относительно семи неизвестных функций. В качестве неизвестных в систему (1)-

(5) входят: ρ - плотность, P - давление, T - температура, U - внутренняя энергия на единицу объема, $\mathbf{v}$ - скорость (три компоненты) бесконечно малого объема газа. Тензор вязких натяжений σ_{ik} в уравнении (3) имеет следующую структуру

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\delta_{ik} \right) + \xi \delta_{ik}\frac{\partial v_n}{\partial x_n}. \tag{6}$$

Предположим, что внешнее воздействие на газ является достаточно малым, что вполне справедливо для типичных условий применения АО метода при исследовании слабопоглащающих газовых сред. Тогда можно ввести малые отклонения величин P, T, ρ и U от их равновесных значений

$$P = P_0(1+\delta), \quad T = T_0(1+\Theta), \quad \rho = \rho_0(1+r), \quad U = U_0(1+\varepsilon), \tag{7}$$

полагая

$$|\delta| \ll 1, \quad |\Theta| \ll 1, \quad |r| \ll 1, \quad |\varepsilon| \ll 1. \tag{8}$$

Подставляя (7) в систему (1)-(5) и используя условия (8), получим в линейном приближении вместо (1)-(5) следующую систему:

$$\frac{\partial\ r}{\partial t} + div\mathbf{v} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -c^2 \left[grad\ \delta + \frac{\eta}{P_0}\triangle\mathbf{v} + \frac{\xi + \frac{\eta}{3}}{P_0} grad\ div\mathbf{v} \right], \quad c^2 = \frac{P_0}{\rho_0} \tag{10}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\lambda T_0}{\rho_0 U_0}\triangle\Theta + \frac{P_0}{\rho_0 U_0}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\sigma_{ik}}{\rho_0 U_0}\frac{\partial\ v_k}{\partial x_i} + \frac{Q}{\rho_0 U_0}, \quad i,k,j... = 1,2,3 \tag{11}$$

$$\delta = r + \Theta, \tag{12}$$

$$\varepsilon = \Theta \tag{13}$$

с граничными условиями

$$\Theta|_S = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0. \tag{14}$$

Пренебрегая внутренним трением в газе ($\eta = \xi = \sigma_{ik} = 0$ и вводя обозначения

$$\gamma - 1 = \frac{P_0}{T_0\rho_0 C_V}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{\rho_0 C_V}, \quad A^2 = \frac{a^2}{\gamma}, \quad C^2 = \frac{c^2}{2-\gamma}, \tag{15}$$

можно свести систему (9)-(13) к системе двух уравнений относительно двух искомых переменных Θ и δ

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} - A^2\triangle\Theta = \frac{A^2}{\lambda T_0}\left(P_0\frac{\partial\delta}{\partial t} + Q \right), \tag{16}$$

$$\triangle\left(\delta + \frac{a^2}{C^2(2-\gamma)}\frac{\partial\Theta}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{(\gamma-1)}{(2-\gamma)}\frac{1}{P_0}\frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{17}$$

$$P_0\frac{\partial\delta}{\partial x_i}|_S = 0.$$

1.1 Выбор теплового источника

Рассмотрим теперь вид выражения для плотности теплового источника Q, входящий в уравнения (16) и (17). В приближении двухуровневой системы и преобладания безызлучательного канала релаксации, т.е. при $\tau_{V-T} \ll \tau_{\text{рад}}$, где τ_{V-T} - времена колебательно-поступательной и радиационной релаксации,

$$Q = h\nu N_V(t)\tau_{V-T}^{-1}, \tag{18}$$

где $N_V(t)$- заселенность верхнего уровня возбуждаемого перехода, h - постоянная Планка, ν - частота излучения лазера. Для определения временной функции $N_V(t)$ необходимо решить систему кинетических уравнений для заданной формы лазерного импульса (см., например, [2]). В случае импульсного возбуждения среды с длительностью импульса $t_{\text{И}} \ll \tau_{V-T}$ при отсутствии насыщения величина $N_{V_{max}}$ не зависит от формы импульса и полностью определяется его энергией. Для случая гауссова пучка выражение для плотности энергии имеет вид

$$E(r) = \frac{W}{\pi w^2}\left(e^{-r^2/w^2} - e^{-r_0^2/w^2}\right), \tag{19}$$

где W - энергия лазерного импульса, w - величина перетяжки лазерного пучка, r_0 - радиус измерительной ячейки. Представление $E(r)$ в (19) в виде разности двух членов позволяет обеспечить равенство нулю интенсивности излучения на стенках ячейки, что существенно облегчает последующие этапы расчета. Отметим, что при $r \ll r_0$ такое приближение практически не вносит существенной погрешности в конечные выражения.

После окончания лазерного импульса возбужденные молекулы с верхнего уровня релаксируют в исходное состояние с характерным временем τ_{V-T}, т.е. $N_V(t) = N_{max}(E) \mid_{t_{\text{Ц}}} exp(-t\tau_{V-T}^{-1})$, где $N_{max}(E) \simeq N\sigma E/n\nu$ [2], N число молекул в единице объема, σ -сечение поглощения. С использованием выражений (18) и (19) в итоге получим с учетом экспоненциального поглощения излучения вдоль ячейки

$$Q = \frac{\alpha W}{h\nu\pi w^2\tau_{V-T}} e^{-t/\tau_{V-T}}\left(e^{-r^2/w^2} - e^{-r_0^2/w^2}\right)e^{-\alpha z} \tag{20}$$

где $\alpha = \sigma N$- коэффициент поглощения.

2 Методика расчета

Система уравнений (16)- (17) путем несложных преобразований может быть сведена к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно приращения температуры Θ

$$\triangle^2\Theta - \triangle\left[\frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}\right] - \frac{\gamma-2}{c^2}\frac{\partial^3\Theta}{\partial t^3} = \frac{\gamma-1}{\gamma c^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma P_0}\triangle Q \tag{21}$$

Решение этого уравнения в аналитической форме оказывается достаточно сложным, поэтому в качестве первого этапа расчетов ограничимся решением уравнения теплопроводности (16) и уравнения звуковых колебаний (17).

2.1 Расчет термодавления для цилиндрической геометрии ячейки

Нагрев газа за счет трансформации колебательной энергии возбужденных молекул в поступательную приводит к повышению давления газа, которое условно назовем термодавлением. Предполагая,что нагрев газа происходит в основном за счет источника Q, т.е. полагая в уравнении (16) $|P_0(\partial\delta/\partial t)| \ll Q$, получим для приращения температуры Θ следующее уравнение

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} - A^2 \triangle \Theta = \frac{A^2}{\lambda T_0} Q \tag{22}$$

с граничным условием $\Theta|_S = 0$.

Решение уравнения (22) получается по стандартной методике разделения переменных и для цилиндрической области с радиусом r_0 и длиной l имеет вид бесконечного ряда

$$\Theta(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \sin\frac{\pi k}{l} z J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) A_{mk} \frac{\tau_{V-T}\tau_T^{(mk)}}{\tau_T^{(mk)} - \tau_{V-T}} \left(e^{-\frac{t}{\tau_T^{(mk)}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{V-T}}}\right), \tag{23}$$

где

$$m = 1,2,3..., \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...,$$

$$A_{mk} = \frac{2\alpha W_0 k[1 - e^{-\alpha l}(-1)^k](\gamma - 1)}{\pi r_0^2 w^2 \rho_0 \tau_{V-T} [J_1(\mu_m^{(0)}]^2 [l^2\alpha^2 + \pi^2 k^2]} I, \tag{24}$$

$$I = \frac{w^2}{2} exp\left[-\left(\frac{\mu_m^{(0)} w}{2r_0}\right)^2\right] - e^{-r_0^2/w^2} \frac{r_0^2}{\mu_m^{(0)}} J_1(\mu_m^{(0)}) \tag{25}$$

и $J_0(\mu_m^{(0)} r/r_0)$, $J_1(\mu_m^{(0)})$ - функции Бесселя; $\mu_m^{(0)}$ -корни уравнения $J_0(\mu_m^{(0)}) = 0$. Величина τ_T определяет характерное время тепловой релаксации газа на стенках ячейки, т.е. остывание нагретого газа за счет теплопроводности

$$\tau_T = \frac{\gamma}{a^2 \lambda_{mk}}, \tag{26}$$

где $\lambda_{mk} = (\mu_m^{(0)}/r)^2 + (\pi k/l)^2$ есть собственные значения задачи.

Теперь, чтобы найти приращение термодавления, необходимо подставить решение (23) в уравнение состояния (4) и проинтегрировать по объему

$$P_T(t) = \frac{P_0}{\Theta T_0} \frac{1}{V} \int \Theta(r,z,t) dV. \tag{27}$$

Для первого члена ряда (23) интеграл (27) при $\tau_T \gg \tau_{V-T}$ имеет вид

$$P_T(t) = P_{T,max}\left(e^{-t/\tau_T} - e^{-t/\tau_{V-T}}\right), \tag{28}$$

где

$$P_{T,max} = \frac{P_0 V_0}{V} \frac{4 l r_0^2}{2.4} J_1(2.4) \frac{\tau_{V-T}\tau_T}{\tau_T - \tau_{V-T}} A, \tag{29}$$

$$A=\frac{2\alpha W_0(1+e^{-\alpha l})\left\{\frac{w^2}{2}\exp\left[-\left(\frac{\mu_1^{(0)}w}{2r_0}\right)^2\right]-\frac{r_0^2}{\mu_1^{(0)}}J_1(\mu_1^{(0)})e^{-r_0/w^2}\right\}}{\pi^2r_0^2w^2\rho_0\tau_{V-T}C_VJ_1^2(\mu_1^{(0)})[l^2\alpha^2+\pi^2]}I, \tag{30}$$

l -длина ячейки. Для вычисления соотношений (28) - (30) использовалось следующее представление интеграла:

$$I=\int_0^{r_0}(e^{-r^2/w^2}-e^{-r_0^2w^2})J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)rdr \tag{31}$$

в виде суммы

$$\int_0^{r_0}=\int_0^{r_0}+\int_{r_0}^{\infty},$$

поскольку

$$\int_{r_0}^{\infty}=0.$$

Затем применялось известное соотношение [3]

$$\int_0^{\infty}x^{\nu+1}e-\alpha x^2J_\nu(\beta x)dx=\frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right),$$

$$Re\ \alpha>0\quad \beta>0,\quad Re\ \nu>-1,\quad \int x^nJ_{n-1}(x)dx=x^nJ_n(x).$$

2.2 Расчет звукового давления

Для интересующих нас интервалов времени выполняется равенство $\delta\gg(a^2/c^2)\partial\Theta/\partial t$, поэтому уравнение (17) запишется как

$$\triangle\delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}=-\frac{1}{c^2}\frac{(\gamma-1)}{P_0}\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{32}$$

с граничными условиями $\partial v/\partial x_i|_S=0$. Решение уравнения (32), умноженное на P_0, имеет вид

$$\triangle P_{\textit{зв}}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{\pi k}{2}zJ_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)F_{mk}\left(\cos\omega_{mk}t-\frac{\sin\omega_{mk}t}{\omega_{mk}\tau_{V-T}}-e^{-t/\tau_{V-T}}\right), \tag{33}$$

где

$$F_{mk}=\frac{2(\gamma-1)\alpha^2W_0[1-e^{-\alpha\ l}(-1)^k]}{c^2P_0\pi^2r_0^2w^2\rho_0C_VT_0\tau_{V-T}^2[l^2\alpha^2+\pi^2k^2]}\frac{1}{(\omega_{mk}^2+\tau_{V-T}^{-2})}I, \tag{34}$$

$$\omega_{mk}=\frac{c}{\sqrt{2-\gamma}}\sqrt{\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)^2+\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2}, \tag{35}$$

а I определяется согласно (25). Соотношение (35) определяет собственные резонансные (поперечные и продольные) частоты цилиндрической ячейки с длиной l радиусом r_0. Для первых членов ряда (33), вносящих максимальный вклад в звуковое давление, имеем

$$\triangle P_{\text{зв}} = P_{1,0}\left(\cos\omega_{1,0}t - \frac{\sin\omega_{1,0}t}{\omega_{1,0}\tau_{V-T}} - e^{-t/\tau_{V-T}}\right) + P_{0,1}\left(\cos\omega_{0,1}t - \frac{\sin\omega_{0,1}t}{\omega_{0,1}\tau_{V-T}} - e^{-t/\tau_{V-T}}\right), \tag{36}$$

где

$$\omega_{1,0} = \frac{c(2-\gamma)^{-1/2}\mu_1^{(0)}}{r_0} \quad \text{и} \quad \omega_{0,1} = \frac{c(2-\gamma)^{-1/2}\pi}{l}$$

– резонансные частоты первой поперечной и продольной гармоник ячейки соответственно.

Заключение

Проведенный анализ показывает, что при импульсном возбуждении газа в замкнутом объеме ячейки формируются два типа ОА сигнала под влиянием одного и того же теплового источника.

Первый тип ОА сигнала обусловлен чисто термодинамическим нагревом газа, что приводит к повышению давления газа в силу замкнутости измерительной ячейки. Из решения (28)-(30) видно,что форма этого сигнала определяется разностью двух экспонент с характерными временами τ_T и τ_{V-T}. Передний фронт определяется временем τ_{V-T} в соответствии с формулой

$$\tau_{V-T} = -\left(\ln\frac{P_{max} - P(t)}{P_{max}}\right)^{-1} t. \tag{37}$$

Максимальная амплитуда этого ОА сигнала зависит от величины поглощенной энергии, размеров ячейки и термодинамических параметров газа.

Второй тип ОА сигнала, описываемый решением (33)-(35), формируется собственными резонансными акустическими колебаниями в ячейке, которые возникают после резкого расширения нагретого газа в объеме лазерного луча. Возникающий при этом звуковой импульс (после отражения от стенок) возбуждает соответствующие звуковые моды. Например, для ячейки с размерами $r_0 = 0.4$ см и $l = 14$ см частоты первых продольной и поперечной моды равны соответственно 1500 и 18000 Гц.

Эта работа была доложена в 1982 г. на конференции по когерентной и нелинейной оптике [4] и получила высокую оценку специалистов.

Я благодарю Д.Д. Жарова за предложенное теоретическое исследование ОА сигнала в газе, на котором я работал с большим интересом.

Список литературы

[1] *Гаменюк А.С., Жаров Д.Д., Огурок и др.* Квант. электр., **1**, 1805, 1974.

[2] *Гаменюк А.С., Жаров Д.Д., Шайдуров В.О.* Тр. МВТУ, **219**, 45, 1976.

[3] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, М., 1971.

[4] *Шипов Г.И., Штепа В.И., Верещагина Л.Н. и др.* Тез. докл. XI Всес. конф. по когерентной и нелинейной оптике. Ереван, 1982.