В.М. Комаров

«ВВЕДЕНИЕ В ИСЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ»

Москва 2012 г

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Привычка мыслить в известном направлении часто бывает настолько велика, что стоит громадных трудов вступить на новые пути исследования.

Д. Граве

Понятие *числа* и понятие *действия над числом* относительно друг друга столь комплементарны, и их взаимное влияние друг на друга проявляется столь ярко, значительно и гармонично, что приходится согласиться с Лосевым, что они есть две «ипостаси» некоей единой и еще не в полной мере раскрытой сущности, имя которой *смысл* [15-18], точнее *структура смысла***,** его «внутренняя среда». Однако даже такой серьезный философ-диалектик как Лосев, исследуя категорию смысла, и обращаясь при этом, прежде всего к числу, как *первопринципу* «самоконструкции» смысла [15-18], гораздо меньше, конечно, в своих работах уделяет внимания понятию ***действия над числом***. Такое смещение доминанты в объеме исследований по математике по проблемам прежде всего числа сохраняется, на наш взгляд, и до сего времени. В данной работе, напротив, делается попытка уйти в другую сторону, и акцентировать внимание на теме *действия* над числом.

Предлагаемое вниманию и с ч и с л е н и е   д е й с т в и й (ИД) является первым небольшим шагом в разработке систематических знаний метауровня для действий над числами. В нем идет речь о средствах построения и методах преобразований именно *самих действий* над числами. Главным объектом рассмотрения в и с ч и с л е н и и   д е й с т в и й становятся **действия над числами**, а также методы их получения и преобразований.

Даже простейшие наблюдения феноменологии действий, чисел и других так или иначе связанных с ними понятий показывает, что последовательное обобщение сложения и переходы к действиям более высоких ступеней активизирует процесс развития практически всех понятий математики в том числе и основных.

Более конкретно в свое время это приводило к

- возникновению обратных операций и на их основе к расширениям понятия числа;
- скачкам мощности числовых множеств от счетного к континууму;
- получению класса алгебраических операций и функций;
- определению алгебраической структуры определений производной и интеграла;
- получению алгебраической структуры формул степенных рядов.

Последующее исследование этих вопросов, составившее содержание данной книги, как мы могли убедиться, продемонстрировало также реальные возможности открыть и изучать свойства новых математических объектов, продолжая естественную экстраполяцию уже известных тенденций. К ним относятся:

- *действия не только 4-й, 5-й ступеней обобщения сложения, но и всего их натурального ряда;*
- *дальнейшие расширения понятия числа;*
- *новые (в частности, мультипликативные) определения скорости и интеграла;*
- *новые определения рядов;*
- *новые действия для операций с трансфинитными числами.*

Но, кроме того, ИД предоставляет также и *качественно новые* возможности для введения и исследования свойств таких ранее неизвестных математических объектов, как:

- **действий отрицательных ступеней;**
- **ряды действий, начинающихся не только от сложения, а и от неких произвольных начальных, базовых действий.**

Конечно этой работе должен был бы предшествовать специальный философский анализ проблемы числа и действия, который позволил бы раскрыть многочисленные аспекты их внутреннего единства и гармонии. К счастью, этот пробел хотя и отчасти, но восполнен Лосевым, который в своей «Диалектике математики» [18] дает детальную и довольно полную картину философских аспектов понятийного аппарата математики, в центре которого оказывается число.

Вполне понятно, что создание ИД потребовало, не только переработки и уточнения некоторых основных понятий алгебры и арифметики, но также введения и некоторых новых. Прежде всего, конечно, потребовалось дать ответы на следующие вопросы:

- Что есть действие и, в частности, бинарное действие на более высокой ступени обобщения этого понятия?
- Каковы разновидности действий над числами, которые бы в связи с целями разработки именно ИД следовало бы особо выделить и в дальнейшем различать?
- Каким должен быть минимальный набор операторов над действиями, т. е. операторов метауровня, который бы обеспечивал «оперативный» простор в создании достаточно полной и вместе с тем относительно замкнутой структуры всего *исчисления* в целом?

Назначение раздела 1 состоит именно в том, чтобы дать краткое ознакомление с принципами построения ИД и познакомить читателя с причинами тех или иных принятых в нем нововведений и уточнений.

1. ТЕРМИНЫ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, КОММЕНТАРИИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Объект (число, действие, оперон): сущность и кратность

Сущность и кратность

В исчислении действий (ИД) различаем **сущности** математических объектов, сами **объекты** (имея в ввиду под ними некие явленные сущности), и **кратности** их явленности (данности, положенности, наличности).

Таким образ в ИД для основных ее объектов, каковыми являются **числа** a, b, c… , **действия над числами** α, β, γ, … , и **опероны** (действия над действиями) П,Р, Θ, K, L, … вводится необходимость различать их *сущности*, обозначаемой знаком **W,** и *кратность* их данности (наличности, осуществленности, положенности), обозначаемой **C**.

Пример 1. ∃a, ∃a, a, a – в данном случае оба квантора утверждают существование *разного количества но только одной* сущности, представленной объектом a. Тождественность сущностей объектов, стоящих под знаком «∃» будем записывать в операторном виде следующим образом:

$$\mathbf{W}\,[a] = \mathbf{W}\,[a, a, a].$$

Кратность *данности* объекта a в первом случае **C**[a]=1, т.е. объект **a** представлен *единично*, а во втором представлен *многократно*, а именно трижды **,** т.е. **C**[a, a, a]=3.

Пример 2. ∃ a, a, a, b, b, b, c, b –в этом выражении представлены три числовые сущности, т.е. три числа-объекта: a, b и c. Однако кратность их данности различна: $\mathbf{c}_a$=3, $\mathbf{c}_b$=4 и $\mathbf{c}_c$=1.

Свободное и связанное существование

В исчислении действий (ИД) также вводятся понятия *связного и свободного* существования объектов.

*Существование объектов назовем **связанным**, если они объединены теми или иными действиями (операциями) в некое единое целое, в некий единый «агрегат». В противном случае их существование будем называть **свободным**.*

Пример 1. ∃a, a, a, b, a, a, b, b, c - в данном выражении квантор существования ∃ утверждает *свободное* существование объектов a, b, c**.**

Пример 2. $a\,\alpha\,[(\,b\,\beta\,a\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,b\,\gamma\,a\,]\ \alpha\,b$ - это выражение утверждает *связанное* существование (в некое *одно* единое выражение) многократно данных трех сущностей a, b, c**.**
Основное требование к формализации в ИД:

одни и те же алгебраические сущности обозначать одними и теми же символами, абстрагируясь соответственно от кратности их данности (независимо от связности или свободности их существования).

2. Алгебраическое выражение, рон, квантрон, оперон

В ИД мы придерживаемся определения числа в смысле Кантора -Лосева, тождественное понятию мощности множества [12, 163].

Число есть *многое, объединенное одно*, когда различие между элементами этого многого опираются только на факт их бытия, факт их существования (без обращения к качественной или порядковой определенности их взаимных различий).

Действие над числом есть способ изменения сущности числа**.**

Алгебраическое выражение –это множество чисел, связанных в одно целое некоторым множеством действий (кратность чисел и действий произвольна).

Примеры алгебраических выражений:

1. $(a\,\beta\,a\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,a\,\gamma\,a$
2. $a\,\alpha\,[(\,b\,\beta\,a\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,b\,\gamma\,a\,]\,\alpha\,b$

Унарное действие α(a) есть алгебраическое выражение α с одной числовой сущностью «а» (кратность использования чисел и действий произвольна).

Примеры унарных действий:

1. $\alpha(a)=\ (a\,\beta\,a\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,a\,\gamma\,a$
2. $\beta\,(a)= a + a^2 + a^3$
3. Бесконечно убывающая прогрессия:

$$\gamma\,(a)= a + a^2 + a^3 +\ldots = \frac{1}{1-a},\ \ (\,0 < a < 1).$$

Бинарное действие $a\,\eta\,b$ есть алгебраическое выражение с двумя числовыми сущностями a и b. Для бинарного действия приняты следующие обозначения:

действие

результат

a η b=c

основание

показатель

Здесь числа a и b являются *операндами* действия η, левый операнд a называется *основанием*, а правый b -*показателем* этого действия, c -результатом.

Пример 1. Бинарное действие η : $a\,\eta\,b\ = a\,\alpha\,[\,(\,b\,\beta\,a\,\gamma\,a\,)\,\alpha\,b\,\gamma\,a\,]\,\alpha\,b$

Пример 2. Другие примеры определений бинарных действий α, β, γ, которые допустимо *постулировать* как бинарные:

$$\frac{a\ -\ b}{a\ +\ b} = a\ \alpha\ b, \qquad a^{\,b}\cdot b^{\,a} = a\ \beta\ b,$$

$$\log_{\frac{a}{b}}(a+b) = a\ \gamma\ b.$$

Объем действия V[α] есть множество из кратностей чисел и действий, входящих в структуру действия α:

$$\mathbf{V}[a\,\alpha\,b] = \{c_a, c_b\ \ldots\ ; c_\alpha, c_\beta, c_\gamma\ldots\},$$

где c_a, c_b … - кратности чисел; c_α, c_β, c_γ… кратности действий.

Пример 1. Дано действие η: $a\ \eta\ b = a\ \alpha\ [(\ b\ \beta\ a\ \gamma\ a\ )\ \alpha\ b\ \gamma\ a]\ \alpha\ b$.

Объем действия η $\mathbf{V}[a\ \eta\ b] = \mathbf{V}[a\ \alpha\ [(\ b\ \beta\ a\ \gamma\ a\ )\ \alpha\ b\ \gamma\ a]\ \alpha\ b]$

будет равен $\mathbf{V}[a\ \eta\ b] = \{c_a=4, c_b=3; c_\alpha=3, c_\beta=1, c_\gamma=2\}$

Рон-принцип(обобщенный принцип рекурсии) состоит из трех элементов:

- принципа цикличности, состоящего в многократном повторении какого-либо действия с целью увеличения кратности его элементов, его объема;
- объединения в одно противоположных по смыслу элементарных операций;
- принципа самоподстановки, самозамыкания (рекурсии).

Квантрон (подготовительная операция) есть способ изменения *объема действия*, состоящий в *одно*кратной самоподстановке результата бинарного действия в операнды.

Основной квантрон –одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой результата бинарного действия в основание:

$$\overleftarrow{@}^{1}(a\ \alpha\ b) = (a\ \alpha\ b)\ \alpha\ b$$

Показательный квантрон –одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой, самозамыканием результата бинарного действия в показатель:

$$\overrightarrow{@}^{1}(a\,\alpha\,b) = a\,\alpha\,(a\,\alpha\,b)$$

Бирекурсивный квантрон–одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой, самозамыканием результата бинарного действия и в основание и в показатель.

$$\overleftrightarrow{@}^{1}(a\,\alpha\,b) = (a\,\alpha\,b)\,\alpha\,(a\,\alpha\,b)$$

Оперон основной –(b-2)-кратная композиция основных квантронов:

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^{1}\left(a\underline{\alpha}b\right) = \underbrace{\overleftarrow{@}\overleftarrow{@}....\overleftarrow{@}}_{b-2}(a\ \alpha\ b)$$

Оперон показательный – (b-2)-кратная композиция показательных квантронов:

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}^{1}\left(a\,\underline{\alpha}\,b\right) = \underbrace{\overrightarrow{@}\overrightarrow{@}....\overrightarrow{@}}_{b-2}(a\ \alpha\ b)$$

Оперон бирекурсивный – (b-1)-кратная композиция бирекурсивных квантронов:

$$\overleftrightarrow{\mathrm{P}}^{1}\left(a\underline{\alpha}b\right) = \underbrace{\overleftrightarrow{@}\overleftrightarrow{@}\overleftrightarrow{@}\ldots\overleftrightarrow{@}}_{b-1}(a\alpha\,b)$$

3. Обратные действия и опероны обратных действий

Обобщенный корень. *Число* $c = a\,\overleftarrow{\alpha}\,b$ *называется обобщенным корнем* a*-й степени из* b *ступени* α*, если получившееся число* $c = a\,\overleftarrow{\alpha}\,b = \sqrt[b]{c}^{\,\alpha}$ *удовлетворяет условию:*

$$(a\,\overleftarrow{\alpha}\,b)\,\alpha\,a = b\,.$$

Переход от прямого действия к обратному будем понимать как некий оперон, позволяющий построить новое действие, отличное от исходного, т.е. $\mathrm{K}(\alpha) = \overleftarrow{\alpha}$ и $\alpha \neq \overleftarrow{\alpha}$.

Оперон корня K *есть преобразование прямого действия* α *в обратное* $\overleftarrow{\alpha}$, *осуществляемое по следующему правилу:*

- *На основе прямого действия* α *вводим уравнение, принимая в нем в качестве неизвестного <u>основание</u> бинарного действия:*

$$a_x \ \alpha \ b = c \ .$$

- *Результат решения записываем в виде:*

$$a_x = b \overleftarrow{\alpha} c = \sqrt[\alpha]{c}_{\,b} \ .$$

В оперONовой форме это преобразование будет иметь вид: $\mathrm{K}(\alpha) = \overleftarrow{\alpha}$. Эта запись означает, что оперон K преобразует действие α в действие $\overleftarrow{\alpha}$.

Обобщённым логарифм. *Число* $c = a \overrightarrow{\alpha} b$ $b_x = c \overrightarrow{\alpha} a = l\alpha g_a c$ *называется обобщённым логарифмом числа* a *по основанию* b *ступени* α, *если при этом для с выполняется следующее условие:*

$$b\,\alpha (a \overrightarrow{\alpha} b) = a$$

Оперон логарифма *Λ есть преобразование прямого действия* α *в обратное* $\overrightarrow{\alpha}$, *осуществляемое по следующему правилу:*

- *Вводим уравнение, принимая в нем за неизвестное <u>показатель</u>:*

$$a \ \alpha \ b_x = c \ .$$

- *Результат решения уравнения записываем в виде:*

$$b_x = c \overrightarrow{\alpha} a = l\alpha g_a c \ .$$

В опероновой форме это преобразование действия α будет иметь вид: L (α) $= \overleftarrow{\alpha}$.

4. Ряды действий. Ступень действия и β-ряд

Пусть оперон П преобразует действие α в действие β, т.е. П(α)= β. При этом исходное действие α будем называть *начальным*, а полученное действие β будем называть *производным*. ***β-рядом*** назовем всякий ряд *производных* действий α, β , γ, δ, ε, …последовательно получаемый с помощью оперонов P, L и K из некоторого *начального* действия β**.**
Базовым действием *β-ряда* будем называть самое первое его начальное действие β**.**
Главным β-рядом назовем ряд производных прямых и обратных действий β, γ, δ, ε,…, последовательно получаемых из **сложения**, как базового действия, с помощью оперонов P, L и K.
Прямые действия главного β-ряда:

Новое обозначение	$a \underset{\rightarrow}{1} b$	$a \underset{\rightarrow}{2} b$	$a \underset{\rightarrow}{3} b$	$a \underset{\rightarrow}{4} b$	$a \underset{\rightarrow}{5} b$	···	$a \underset{\rightarrow}{\alpha} b$
Старое обозначение	**a+b**	$a \cdot b$	a^b	${}^{b}\cdot a$	···	···	···

Базовое действие

Производные действия

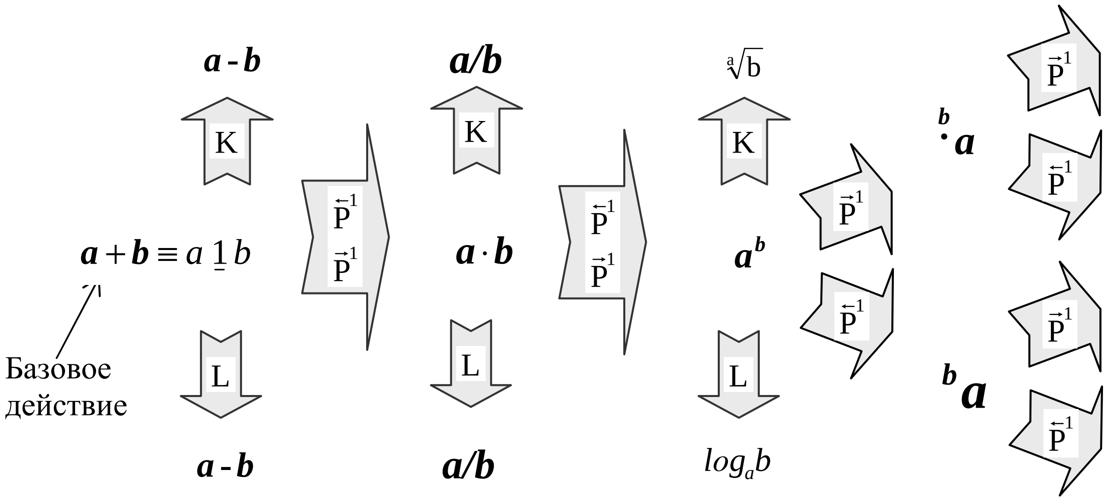


Рис. 1 Диаграмма известных прямых и обратных действий *главного* β -ряда.

В исчислении действий, рассматриваются три типа множеств:

множества чисел:

$$N, Z, R, C, Q.$$

элементами которых являются соответственно натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа;

множество бинарных действий (прямых и обратных):

$$\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\};$$

множество оперонов: $\tilde{O} = \{\Pi, P, \Theta, K, L, \ldots\}$.

2. ИСЧИСЛЕНИЕ МОНОРЕКУРСИВНЫХ ОПЕРОНОВ

2.1. Опероны повышения ступени

Исследование преобразований бинарных действий начнем с простейшего случая, когда основание "a" и показатель "b" тех или иных конкретных действий принадлежит множеству натуральных чисел. Поэтому в дальнейшем при доказательстве теорем кванторы общности $(\forall a \mid a \in N) \vee (\forall b \mid b \in N)$ при формулировке тех или иных теорем будем опускать.

Определение: *Два действия α и β равны тогда и только тогда, когда на одних и тех же числах a и b дают одинаковые результаты:*

$$(\alpha = \beta) \Leftrightarrow (a\ \alpha\ b = a\ \beta\ b). \tag{2.1.1a}$$

В противном случае действия не равны:

$$(\alpha \neq \beta) \Leftrightarrow (a\ \alpha\ b \neq a\ \beta\ b). \tag{2.1.1b}$$

Будем считать, что оперон преобразования действия α в действие β, определен, если известен закон (правило) Π этого преобразования, и что он не пустой, т. е. при этом действие α изменяется так, что $\alpha \neq \beta$ (2.1.1b). Действие оперона Π на операцию α, в результате которого α преобразуется в операцию β, будем записывать так:

$$\Pi(\alpha) = \beta. \tag{2.1.1c}$$

Для дальнейшего развития исчисления необходимо ввести два вспомогательных оперона.

Определение: О*перон* Π^0 *назовем нуль-опероном, если он отображает действие* α *на себя (оставляет его неизменным):*

$$\Pi^0(\alpha) = \alpha. \qquad (2.1.2)$$

Для некоммутативных действий перемена местами основания и показателя приводит к изменению результата, т.е. налицо признаки оперона (в соответствии с (2.1.1c)) . При этом законом, позволяющим «построить» новое действие, является взаимная перемена мест основания и показателя. При такой перемене происходит изменение результата действия. Это дает основание ввести определение оперона коммутации Q.

О п р е д е л е н и е: *Оперон Q назовем опероном коммутации, если преобразование действия α в действие β происходит перестановкой основания и показателя:*

$$Q(a\ \alpha\, b) = b\ \alpha\, a. \qquad (2.1.3)$$

О п р е д е л е н и е: *Назовем действие $a\ \alpha\, b=c$ <u>строго бинарным действием</u>, если $a \neq b$, и действием <u>унарным</u>, если $a = b$, т.е. $a\ \alpha\, a = c$.*

О п р е д е л е н и е: *Оперон $\overleftarrow{P}^1$ назовем основным опероном повышения ступени действия, если переход от действия α к действию $\beta = \underleftarrow{\alpha+1}$ осуществляется по следующему правилу:*

1. *Полагаем существование исходного строго бинарного действия:*

$$a\ \alpha\ b = c. \qquad (2.1.4a)$$

2. *На основе строго бинарного действия вводим унарное действие:*

$$a\ \alpha\ a = c_0. \qquad (2.1.4b)$$

3. *Увеличиваем объем действия (b-2)-кратной подстановкой (рекурсией) результата c в основание a :*

$$\underbrace{(((a\ \ \alpha\ a)\ \alpha\ \ a)\alpha\ ...)\alpha\ a}_{b\ \text{раз}}\ \ =\ c_{b\text{-}2}\ . \qquad (2.1.4c)$$

4. *Увеличивая ступень действия на единицу, осуществляем переход к строго бинарному действию высшей ступени:*

$$(((\,a\ \alpha\ a)\ \alpha\ a)\ \alpha...)\ \alpha\ a = a\ \underleftarrow{\alpha+1}\ b\ . \qquad (2.1.4d)$$

В опероновой форме этот процесс будем записывать в сокращенном виде:

$$\overleftarrow{P}^1(\alpha) = \underleftarrow{\alpha+1}. \qquad (2.1.5)$$

В кванронной форме: *Оперон основной* есть (b-2)-кратная композиция основных квантронов:

$$\overleftarrow{P}^1(a\underline{\alpha}b) = \underbrace{\overleftarrow{@}\,\overleftarrow{@}....\overleftarrow{@}}_{b-2}(a\ \alpha\ b) \qquad (2.1.5б)$$

Под формулой (2.1.6) мы будем понимать сжатую запись определения (2.1.4).

В несколько иной форме оперон $\overleftarrow{P}^1$ можно записать так:

$$\overleftarrow{P}^1(a\ \ \alpha\ \ b) = a\ \underleftarrow{\alpha+1}\, b = \underbrace{(((a\ \alpha\ a)\ \alpha\ a)\alpha...)\alpha\ a}_{b\ \text{раз}}\,. \qquad (2.1.6)$$

Применим оперон $\overleftarrow{P}^1$ к известным действиям.

П р и м е р 2.1.1. Пусть исходное действие есть сложение: $a\ \alpha\ b = a + b$. Примем ступень действия сложения за **единицу**: т.е. положим $a + b = a\ \underline{1}\ b$.

Тогда:

$$\overleftarrow{P}^1(a\ \ \underline{1}\ \ b) = a\ \ \underleftarrow{1+1}\ \ b = a\ \underline{2}\ b = (((\,a\ \underline{1}\ a)\ \underline{1}\ a)\ \underline{1}...)\ \underline{1}\ a = a \cdot b\ .$$

П р и м е р 2.1.2. Повторное применение оперона $\overleftarrow{\mathrm{P}}^1$ к умножению, т.е. к действию ступени $\underleftarrow{2}$, дает обычное возведение в степень:

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^1(a\ \underline{2}\ b) = a\ \underleftarrow{\underline{2}+1}\ b = (((a\ \underleftarrow{2}\ a)\ \underleftarrow{2}\ a)\ \underleftarrow{2}\ldots)\ \underleftarrow{2}\ a = a\ \underleftarrow{3}\ b = \underbrace{((a\times a)\times a\times\ldots)\times a}_{b\ \text{раз}} = a^b$$

П р и м е р 2.1.3. Применим $\overleftarrow{\mathrm{P}}^1$ к возведению в степень:

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^1(a\ \underline{3}\ b) = a\ \underleftarrow{\underline{3}+1}\ b = ((a\ \underleftarrow{3}\ a)\ \underleftarrow{3}\ldots)\ \underleftarrow{3}\ a = (((a^a)^a)^a\ldots)^a = a^{\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{b-1}} = a^{\left(a^{b-1}\right)} = a\ \underleftarrow{4}\ b \quad (2.1.7)$$

Назовем полученную операцию $a\,\underleftarrow{4}\,b = {}^b a = a^{\left(a^{b-1}\right)}$ *слабой(основной) сверхстепенью*. Приведем краткий перечень некоторых ее свойств:

$$({}^b a)^c = a^{c\cdot\left(a^{b-1}\right)} = a^{\left(a^{\log_a c+b-1}\right)} = {}^{(b+\log_a c)}a \qquad (2.1.8)$$

$$^b a\cdot {}^c a = a^{\left(a^{b-1}\right)}\cdot a^{\left(a^{c-1}\right)} = a^{\left(a^{b-1}+a^{c-1}\right)} = {}^{\left(\log_a\left(a^{b-1}+a^{c-1}\right)+1\right)}a \qquad (2.1.9)$$

$$^c({}^b a) = ({}^b a)^{\left(({}^b a)^{c-1}\right)} = ({}^b a)^{\left(\left(a^{\left(a^{b-1}\right)}\right)^{(c-1)}\right)} = \left(a^{\left(a^{b-1}\right)}\right)^{\left(a^{\left(a^{b-1}\right)\cdot(c-1)}\right)} = a^{\left(a^{(c-1)\cdot\left(a^{b-1}\right)}\cdot a^{b-1}\right)} =$$
$$= a^{\left(a^{\left(\left((c-1)\cdot a^{b-1}+b\right)-1\right)}\right)} = {}^{\left((c-1)\cdot a^{b-1}+b\right)}a \qquad (2.1.10)$$

$$^1 a = a^{a^{1-1}} = a \qquad (2.1.11)$$

$$^0 a = a^{a^{-1}} = \sqrt[a]{a} \qquad (2.1.12)$$

$$a^b = a^{a\cdot\log_a b+1-1} = {}^{(\log_a b+1)}a \qquad (2.1.13)$$

В общем случае замыканием в основание можно получить, начиная со сложения, натуральный ряд действий:

Новое обозначение	$a\ \underleftarrow{1}b$	$a\ \underleftarrow{2}\,b$	$a\ \underleftarrow{3}\,b$	$a\ \underleftarrow{4}\,b$	$a\ \underleftarrow{5}\,b$	…	$a\ \underleftarrow{\alpha}\,b$
Старое обозначение	$a+b$	$a\cdot b$	a^b	$^b a$	…	…	…

Начиная с операции пятой ступени $a\,\underleftarrow{5}\,b$, свойства всех последующих действий этого ряда резко отличаются от свойств известных алгебраических операций низших ступеней.

В несколько иной форме оперон $\vec{\mathrm{P}}^1(a\,\alpha\,b)$ можно записать так:

$$\vec{\mathrm{P}}^1(a\,\alpha\,b) = a\,\underrightarrow{\alpha+1}\,b = \underbrace{a\,\alpha(a\,\alpha(\ldots\ \alpha(a\,\alpha\,a}_{b})))\,. \qquad (2.1.16)$$

Нетрудно показать, что

$$\vec{\mathrm{P}}^1(a+b) = a\cdot b = \overleftarrow{P}^1(a+b)\,, \qquad (2.1.17.)$$
$$\vec{\mathrm{P}}^1(a\cdot b) = a^b = \overleftarrow{P}^1(a\cdot b)\ . \qquad (2.1.17a)$$

П р и м е р 2.1.4. Применим оперон $\vec{\mathrm{P}}^1$ к возведению в степень:

$$\vec{\mathrm{P}}^1(a\,\underline{3}\,b) = a\,\underline{3}\,(a\,\underline{3}\,(\ldots\underline{3}\,(a\,\underline{3}\,a))) = \underbrace{a^{(a^{(\cdot^{\cdot^{\cdot(a^a)))}}}}}_{b\text{ раз}} = {}^{b}{\cdot}a = a\,\underset{\to}{4}\,b\,.$$

Назовем получившееся действие $a\,\underset{\to}{4}\,b$ *сильной сверхстепенью*:

$$a\,\underset{\to}{4}\,b = {}^{b}{\cdot}a = \underbrace{a^{(a^{(\cdot^{\cdot^{\cdot(a^a)))}}}}}_{b\text{ раз}} \qquad (2.1.18)$$

Последовательное применение оперона $\vec{\mathrm{P}}^1$ позволяет также построить натуральный ряд действий:

Новое обозначение	$a\,\underset{\to}{1}\,b$	$a\,\underset{\to}{2}\,b$	$a\,\underset{\to}{3}\,b$	$a\,\underset{\to}{4}\,b$	$a\,\underset{\to}{5}\,b$	...	$a\,\underset{\to}{\alpha}\,b$
Старое обозначение	$a+b$	$a\cdot b$	a^b	${}^{b}{\cdot}a$	...	...	...

Данный ряд действий, начиная с действия 4-ой ступени, отличается от ряда действий, полученных опероном $\overleftarrow{\mathrm{P}}^1$.

Т е о р е м а 2.1.1. *Для всех бинарных коммутативных действий опероны* $\overleftarrow{\mathrm{P}}^1$ *и* $\vec{\mathrm{P}}^1$ *дают тождественные результаты*:

$$(\mathrm{Q}(\alpha) = \alpha) \Rightarrow (\overleftarrow{\mathrm{P}}^1(\alpha) = \vec{\mathrm{P}}^1(\alpha)). \qquad (2.1.19)$$

2.2 Опероны обратных действий

О п р е д е л е н и е: *Число* $c = a\overleftarrow{\alpha}b$ *назовем к о р н е м* a*-ой степени из* b *ступени* α*, если получившееся число* $c = a\overleftarrow{\alpha}b$ *удовлетворяет условию:*

$$(a\overleftarrow{\alpha}b)\,\alpha\,a = b\,. \qquad (2.2.1)$$

Переход от прямого действия к обратному будем понимать как некий оперон *K*, позволяющий построить новое действие, отличное от исходного, т.е.

$$\mathrm{K}(\alpha) = \overleftarrow{\alpha}\ \text{, т.к. }\ \alpha \neq \overleftarrow{\alpha}\,.$$

О п р е д е л е н и е: *Оперон* K *назовем опероном корня, если преобразование прямого действия в обратное осуществляется по следующему правилу:*

1. *Полагаем существование исходного действия:*

$$a\,\alpha\,b = c\,.$$

2. *Вводим уравнение, принимая в качестве неизвестного <u>основание</u> бинарного действия:*

$$a_x\,\alpha\,b = c\,. \qquad (2.2.2)$$

2. *Результат решения записываем в виде:*

$$a_x = b\overleftarrow{\alpha}c = \sqrt[\alpha]{c}\,{}_{b}\,.$$

При этом должно выполняться условие (основное тождество корня):

$$a_x\,\alpha\,b = (b\overleftarrow{\alpha}c)\,\alpha\,b = c\,. \qquad (2.2.3)$$

В опероновой форме с использованием символики ступеней определение (2.2.2) будет иметь вид:

$$\mathrm{K}(\alpha) = \overleftarrow{\alpha}\,. \qquad (2.2.4)$$

Пример 2.2.1. Пусть $a\,\alpha\, b = a+b = a\,\underline{1}\,b$.
Воспользовавшись определением корня, получим:

$$\mathrm{K}(\alpha) = \mathrm{K}(a_x\,\underline{1}\,b = c) = \mathrm{K}(a_x + b = c) = b\,\overleftarrow{1}\,c = c - b = a_x\,.$$

Или с использованием обычной формы записи:

$$a\,\overleftarrow{1}\,b = b - a \quad . \tag{2.2.5}$$

Пример 2.2.2. Пусть $a\alpha b = a\cdot b = a\,\underline{2}\,b$, тогда

$$\mathrm{K}(\alpha) = \mathrm{K}(a_x\,\underline{2}\,b = c) = \mathrm{K}(a_x \cdot b = c) = b\,\overleftarrow{2}\,c = \frac{c}{b} = a_x\,.$$

С использованием обычной формы записи:

$$a\,\overleftarrow{2}\,b = \frac{b}{a}\,. \tag{2.2.6}$$

Пример 2.2.3. Пусть $a\alpha b = a^b = a\,\underline{3}\,b$, тогда

$$\mathrm{K}(\alpha) = \mathrm{K}(a_x\,\underline{3}\,b = c) = \mathrm{K}(a_x{}^b = c) = b\,\overleftarrow{3}\,c = \sqrt[b]{c} = a_x\,.$$

С использованием обычной формы записи:

$$a\,\overleftarrow{3}\,b = \sqrt[a]{b}\,. \tag{2.2.7}$$

Пример 2.2.4. Пусть $a\alpha b = a\,\underset{\leftarrow}{4}\,b = a^{a^{b-1}}$, тогда

$$\mathrm{K}(\alpha) = \mathrm{K}(a_x\,\underset{\leftarrow}{4}\,b = c) = \mathrm{K}(a_x^{a_x^{b-1}} = c) = b\,\underset{\leftarrow}{\overleftarrow{4}}\,c = a_x.$$

Выразить корень слабой сверхстепени через известные операции, как это делалось в предыдущих трех случаях, не представляется возможным, т.к. для этого нужно решить трансцендентное уравнение:

$$x^{x^{b-1}} = c\,. \tag{2.2.8}$$

Однако последовательным приближением можно установить величину x с любой точностью и, тем самым, определить обобщенный корень 4$^{\text{-ой}}$ ступени.

Корень 4$^{\text{-ой}}$ ступени имеет следующие свойства:

Свойство 1. $$\sqrt[a]{b}^{\,\overleftarrow{4}} = \sqrt[\left(a+\frac{1}{\log_d c}\right)]{b^d}^{\,\overleftarrow{4}}\,, \quad \text{где } c = \sqrt[a]{b}^{\,\overleftarrow{4}}\,. \tag{2.2.11}$$

Доказательство. Из равенства $c = \sqrt[a]{b}^{\,\overleftarrow{4}}$ следует равенство:

$${}^a c = b = c^{c^{a-1}}\,.$$

Возведём обе части данного равенства в степень d:

$$b^d = \left(c^{c^{a-1}}\right)^d = c^{d\cdot c^{a-1}} = c^{c^{a+\log_c d-1}} = {}^{(a+\log_c d)}c = {}^{\left(a+\frac{1}{\log_d c}\right)}c\,.$$

Отсюда следует:

$$\overset{\overleftarrow{4}}{\sqrt[a]{b}} = \overset{\overleftarrow{4}}{\sqrt[\left(a+\frac{1}{\log_d \overset{\overleftarrow{4}}{\sqrt[a]{b}}}\right)]{b^d}}\,.$$

Свойство 2. $\overset{\overleftarrow{4}}{\sqrt[a]{b}} = \overset{\overleftarrow{4}}{\sqrt[\left(a+(n-1)c^{a-1}\right)]{{}^n b}}$, где $c = \overset{\overleftarrow{4}}{\sqrt[a]{b}}$ (2.2.12)

Рассмотрим свойства композиций оперона K.
Нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 2.2.1.

$$\mathrm{K}^m = \begin{cases} \mathrm{K}, \text{ если } m = 3\cdot n+1 \\ \mathrm{P}^0, \text{ если } m = 3\cdot n, \quad n \in \mathrm{N}^+ \end{cases} \tag{2.2.17}$$

Из этой теоремы следует, что последовательным применением оперона K, в общем случае можно построить только две обратные операции со ступенями $\overleftarrow{\alpha}$ и $\overset{\leftleftarrows}{\alpha}$.

Определение: *Число* $c = a\,\overrightarrow{\alpha}\,b$ *назовём обобщённым логарифмом числа* a *по основанию* b *ступени* α, *если при этом выполняется следующее условие:*

$$b\,\alpha(a\,\overrightarrow{\alpha}\,b) = a \tag{2.2.18}$$

Выражение (2.2.18) назовём обобщённым логарифмическим тождеством. Иными словами определить логарифм α-ой ступени, значит дать решение уравнения, в котором неизвестен показатель:

$$a\,\alpha\;b_x = c\,.$$

Определение: *Назовём L опероном логарифма, если он преобразует исходную операцию* α *в операцию обобщённого логарифма* $\beta \equiv \overrightarrow{\alpha}$ *по следующему правилу:*

1. *Полагаем существование исходного действия:*

$$a\,\alpha\;b = c\,.$$

2. *Вводим уравнение, принимая за неизвестное показатель:*

$$a\,\alpha\;b_x = c\,. \tag{2.2.19}$$

3. *Результат решения уравнения записываем в виде:*

$$b_x = c\,\overrightarrow{\alpha}\,a = l\alpha g_a c\,.$$

При этом должно выполняться условие, называемое логарифмическим тождеством:

$$a\,\alpha(c\,\overrightarrow{\alpha}\,a) = c\,. \tag{2.2.20}$$

Пример 2.2.5. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = a + b = a\,\underline{1}\,b$, тогда

$$\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}(a\,\underline{1}\,b) = \mathrm{L}(a + b_x = c) = c - a = c\,\overrightarrow{1}\,a = b_x .$$

С использованием обычной формы записи:

$$a\,\overrightarrow{1}\,b = a - b . \qquad (2.2.21)$$

Пример 2.2.6. Пусть $a\,\alpha\,b = a \cdot b = a\,\underline{2}\,b$, тогда

$$\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}(a\,\underline{2}\,b) = \mathrm{L}(a \cdot b_x = c) = \frac{c}{a} = c\,\overrightarrow{2}\,a = b_x \qquad (2.2.22)$$

$$a\,\overrightarrow{2}\,b = \frac{a}{b}$$

Пример 2.2.7. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = a^b = a\,\underline{3}\,b$, тогда

$$\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}(a\,\underline{3}\,b) = \mathrm{L}(a^{b_x} = c) = \log_a c = c\,\overrightarrow{3}\,a = b_x , \qquad (2.2.23)$$

$$a\,\overrightarrow{3}\,b = \log_b a .$$

Выражения (2.2.21), (2.2.22), (2.2.23) показывают, что действия вычитания, деления и логарифмирования можно понимать, как „логарифмы” различных ступеней.

Пример 2.2.8. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = {}^{b}a = a\,\underset{\leftarrow}{4}\,b = a^{a^{b-1}}$,

$$\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}(a\,\underset{\leftarrow}{4}\,b) = \mathrm{L}(a^{a^{b_x - 1}} = c) = \log_b \log_b a + 1 = c\,\overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{4}}\,a = b_x .$$

С использованием обычной формы записи:

$$a\,\overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{4}}\,b = l\underset{\leftarrow}{4}g_b a = \log_b \log_b a + 1 = \log_b \log_b a^b . \qquad (2.2.24)$$

Укажем некоторые свойства логарифмов слабой сверхстепени.

Свойство 1. $$l\underset{\leftarrow}{4}g_b\left(a^{\log_b a}\right) = 2 \cdot l\underset{\leftarrow}{4}g_b a - 1 \qquad (2.2.25)$$

Доказательство.

$$l\underset{\leftarrow}{4}g_b\left(a^{\log_b a}\right) = \log_b \log_b a^{\log_b a} + 1 = \log_b \left(\log_b a\right)^2 + 1 = 2 \cdot \log_b \log_b a + 1 = 2 \cdot \log_b \log_b a + 2 - 1 =$$
$$= 2 \cdot l\underset{\leftarrow}{4}g_b a - 1$$

Свойство 2. $$l\underset{\leftarrow}{4}g_b\left(a^{\left(\log_b a\right)^n}\right) = n \cdot l\underset{\leftarrow}{4}g_b a - n + 1 \qquad (2.2.26)$$

Свойство 3. $$l\underset{\leftarrow}{4}g_b a = \log_b a\left(1 - l\underset{\leftarrow}{4}g_a b\right) + 1 \qquad (2.2.26')$$

Свойство 4. $$l\underset{\leftarrow}{4}g_b\left({}^{n}a\right) = (n-1) \cdot \log_b a + l\underset{\leftarrow}{4}g_b a . \qquad (2.2.27)$$

Свойство 5. $$l\underset{\leftarrow}{4}g_b\left(\overset{n}{\bullet} a\right) = \overset{(n-2)}{\bullet} a \cdot \log_b a + l\underset{\leftarrow}{4}g_b a \qquad (2.2.28)$$

П р и м е р 2.2.9. Пусть $a \underline{\alpha} b = {}^{b}a = a \underset{\rightarrow}{4} b = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}_{b\ \text{раз}} = c$, тогда

$$\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}(a \underset{\rightarrow}{4} b) = \mathrm{L}(a \underset{\rightarrow}{4} b_x = c) = c \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{4}} a = b_x .$$

С использованием обычной формы записи обозначение логарифма сильной сверхстепени будет иметь вид:

$$l\underset{\rightarrow}{4}g_b a = a \overset{\rightarrow}{4} b \tag{2.2.29}$$

При этом будут выполняться следующие равенства, вытекающие сразу из определения логарифма:

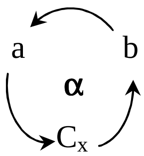
$$^{l\underset{\rightarrow}{4}g_b a}{\bullet} b = a \quad \text{и} \quad l\underset{\rightarrow}{4}g_b\left({}^{n}{\bullet} b\right) = n \tag{2.2.30}$$

Нетрудно видеть, что выразить логарифмы сильной сверхстепени через известные алгебраические операции пока не представляется возможным.

О п р е д е л е н и е: *Опероном логарифма n-го ранга* L^n *назовём оперон, получаемый композицией длины n оперона L:*

$$\mathrm{L}^n(\alpha) = \mathrm{L}\underbrace{\mathrm{L}\mathrm{L}\cdots\mathrm{L}}_{\mathrm{n}\ \text{раз}}(\alpha) \tag{2.2.31}$$

Для определения данного оперона также удобно пользоваться диаграммой:



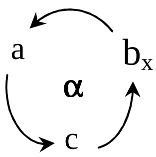
(2.2.32)

Для определения логарифма по этой диаграмме нужно произвести в действии $a\,\alpha\,\ b = c$ сдвиг элементов *a, b, c* по часовой стрелке и решить получившееся при этом уравнение.

Например, определим L^2:

$$\mathrm{L}^2(\alpha) = \mathrm{L}(\mathrm{L}(\alpha)) = \mathrm{L}(\mathrm{L}(a\,\alpha\, b_x = c)) = \mathrm{L}(c\,\overset{\rightarrow}{\alpha}\ a = b) .$$

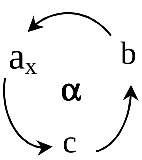
Этот момент преобразования соответствует на диаграмме следующему положению элементов:



Выполним следующий шаг преобразования:

$$\mathrm{L}(c\,\overset{\rightarrow}{\alpha}\, a_x = b) = b\overset{\rightrightarrows}{\alpha}\, c = a . \tag{2.2.33}$$

При этом положение элементов на диаграмме следующее:



Используя условие равенства действий (2.1.1.) и сравнивая $b\overset{\rightrightarrows}{\alpha}c = a$ с выражением для корня $b\overset{\leftarrow}{\alpha}c = a$, приходим к выводу, что

$$\overset{\rightrightarrows}{\alpha} = \overset{\leftarrow}{\alpha}\text{; и } \mathrm{L}^2 = \mathrm{K}. \tag{2.2.34}$$

Используя повороты на диаграмме действия, нетрудно также доказать следующие теоремы:

Теорема 2.2.2.

$$\mathrm{L}^m = \begin{cases} \mathrm{L}, & \text{если } m = 3n+1 \\ \mathrm{K}, & \text{если } m = 3n+2 \\ P^0, & \text{если } m = 3n \end{cases} \quad , \; n \in \mathrm{N}^+ \tag{2.2.35}$$

Теорема 2.2.3.

$$\mathrm{K}^m = \begin{cases} \mathrm{K}, & \text{если } m = 3n+1 \\ \mathrm{L}, & \text{если } m = 3n+2 \\ \mathrm{P}^0, & \text{если } m = 3n \end{cases} \quad , \; n \in \mathrm{N}^+ \tag{2.2.36}$$

Теорема 2.2.4.

$$\mathrm{L}(\mathrm{K}(\alpha)) = \mathrm{K}(\mathrm{L}(\alpha)) = \mathrm{P}^0(\alpha) = \alpha. \tag{2.2.37}$$

Наиболее употребительны следующие зависимости, являющиеся частными случаями теорем (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4):

$$\mathrm{K}^3 = \mathrm{L}^3 = \mathrm{P}^0 \text{ или } \overset{\substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow}}{\alpha} = \overset{\substack{\leftarrow\\\leftarrow\\\leftarrow}}{\alpha} = \alpha \quad ; \tag{2.2.38}$$

$$\mathrm{K}^2 = \mathrm{L} \qquad \text{или } \overset{\rightrightarrows}{\alpha} = \overset{\leftarrow}{\alpha}; \tag{2.2.39}$$

$$\mathrm{L}^2 = \mathrm{P} \qquad \text{или } \overset{\leftleftarrows}{\alpha} = \overset{\rightarrow}{\alpha}; \tag{2.2.39}$$

$$\mathrm{KL} = \mathrm{LK} = \mathrm{P}^0 \text{ или } \overset{\leftrightarrows}{\alpha} = \overset{\rightleftarrows}{\alpha} = \alpha; \tag{2.2.40}$$

Ввиду простоты опускаем доказательство следующей теоремы для коммутативных действий:

Теорема 2.2.5.

$$\big(\mathrm{Q}(\alpha) = \alpha\big) \Rightarrow \big(\mathrm{K} = \mathrm{QL}\big) \vee \big(\mathrm{L} = \mathrm{QK}\big) \tag{2.2.42}$$

Пример 2.2.9. $a + b$ - операция коммутативная.
Следовательно, $a\,\overset{\rightarrow}{1}\,b = a - b = \mathrm{Q}\big(a\,\overset{\leftarrow}{1}\,b\big) = b\,\overset{\leftarrow}{1}\,a = a - b$.

Пример 2.2.10. $a \cdot b = a\,\underline{2}\,b$;

Следовательно, $a\,\overset{\rightarrow}{2}\,b = \dfrac{a}{b} = \mathrm{Q}\big(a\,\overset{\leftarrow}{2}\,b\big) = b\,\overset{\leftarrow}{2}\,a = \dfrac{a}{b}$.

2.3 β-ряды на основе обратных действий

Пусть определено какое-либо обратное действие $a\,\overline{\alpha}\,b$. Применяя к нему опероны $\vec{\mathrm{P}}^1$ и $\vec{\mathrm{P}}^1$, получим:

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^1(\overline{\alpha}) = a\,\underleftarrow{\overline{\alpha}+1}\,b = \underbrace{a\,\overline{\alpha}\,(a\overline{\alpha}\,(\cdots\overline{\alpha}\,(a\overline{\alpha}\,a)))}_{b\ \text{раз}}; \qquad (2.3.1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}^1(\overline{\alpha}) = a\,\underrightarrow{\overline{\alpha}+1}\,b = \underbrace{(((a\,\overline{\alpha}\,a)\overline{\alpha}\,)\cdots)\overline{\alpha}\,a}_{b\ \text{раз}}. \qquad (2.3.2)$$

$$\left(\mathrm{Q}(\alpha)=\alpha\right) \Rightarrow \left(\left(\underrightarrow{\vec{\alpha}+1} = \underleftarrow{\overleftarrow{\alpha}+1}\right) \vee \left(\underleftarrow{\overleftarrow{\alpha}+1} = \underrightarrow{\vec{\alpha}+1}\right)\right). \qquad (2.3.6)$$

Рассмотрим конкретные примеры построения рядов действий на основе обратных операций.

Пример 2.3.1. Пусть $a\,\alpha\,b = a\,\overleftarrow{1}\,b = b-a$.
Используя формулу (2.3.1) и теоремы 2.3.1 и 2.3.2, будем иметь:

$$a\,\underleftarrow{\overleftarrow{\alpha}+1}\,b = a\,\underrightarrow{\vec{\alpha}+1}\,b = (((a\,\overleftarrow{1}\,a)\,\overleftarrow{1}\,)\cdots)\,\overleftarrow{1}\,a = a-(a-(\cdots-(a-a))) =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ если } b=2n \\ a, \text{ если } b=2n+1,\ n\in \mathrm{N}^+ \end{cases} \qquad (2.3.7)$$

Пример 2.3.2. Пусть $a\,\alpha\,b = a\,\vec{1}\,b = a-b$.
Используя формулу (2.3.2) и теоремы 2.3.1 и 2.3.2 получим:

$$a\,\underleftarrow{\vec{\alpha}+1}\,b = a\,\underrightarrow{\overleftarrow{\alpha}+1}\,b = (((a\,\vec{1}\,a)\,\vec{1}\,)\cdots)\,\vec{1}\,a = a\,\overleftarrow{1}(a\,\overleftarrow{1}(\cdots\overleftarrow{1}(a\,\overleftarrow{1}\,a))) = a(2-b)\ . \qquad (2.3.8)$$

Пример 2.3.3. Пусть $a\,\alpha\,b = a\,\vec{2}\,b = \dfrac{a}{b}$, используя те же формулы, получим:

$$a\,\underrightarrow{\vec{2}+1}\,b = a\,\underline{\overleftarrow{2}+1}\,b = (((a\,\overleftarrow{2}\,a)\overleftarrow{2}\,)\cdots)\overleftarrow{2}\,a = a\,\vec{2}\,(a\,\vec{2}\,(\cdots\vec{2}\,(a\,\vec{2}\,a))) =$$
$$a/(a/(\cdots/(a/a))) = \begin{cases} 1, \text{ если } b=2n \\ a, \text{ если } b=2n+1,\ n\in \mathrm{N}^+ \end{cases} \qquad (2.3.9)$$

Пример 2.3.4. Пусть $a\,\alpha\,b = a\,\vec{2}\,b = \dfrac{a}{b}$, тогда

$$a\,\underleftarrow{\vec{2}+1}\,b = a\,\underrightarrow{\overleftarrow{2}+1}\,b = a\,\vec{2}\,(a\,\vec{2}\,(\cdots\vec{2}\,(a\,\vec{2}\,a))) = a^{2-b}. \qquad (2.3.10)$$

Пример 2.3.5. Пусть $a\,\alpha\,b = a\,\overleftarrow{3}\,b = \sqrt[a]{b}$.
По формуле (2.3.1) будем иметь:

$$a \,\underleftarrow{\overleftarrow{3}+1}\, b = ((a \overleftarrow{3} a)\ldots) \overleftarrow{3} a$$

$$a \overleftarrow{3} a = \sqrt[a]{a} = a^{\frac{1}{a}} = a^{\left(a^{-1}\right)}$$

$$\left(a \overleftarrow{3} a\right) \overleftarrow{3} a = a^{\left(\frac{1}{a^{\left(a^{-1}\right)}}\right)} \tag{2.3.11}$$

$$a \,\underleftarrow{\overleftarrow{3}+1}\, b = a^{\underbrace{a^{-a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^{-1}}}}}}}_{b \text{ раз}}}$$

По формуле 2.3.2 будем иметь:

$$a \,\underrightarrow{\overleftarrow{3}+1}\, b = a \overleftarrow{3} (a \overleftarrow{3} \ldots (a \overleftarrow{3} a)) = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{1}{a}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)^{\frac{1}{a}} . \tag{2.3.12}$$

Пример 2.3.6. Пусть $a \,\alpha\, b = a \overrightarrow{3} b = \log_b a$. По формуле 2.3.1 и 2.3.2 будем иметь:

$$a \,\underleftarrow{\overrightarrow{3}+1}\, b = (((a \overrightarrow{3} a) \overrightarrow{3} a)\ldots) \overrightarrow{3} a = \underbrace{\log_a \log_a \ldots \log_a \log_a a}_{b-1 \text{ раз}}, \tag{2.3.13}$$

$$a \,\underrightarrow{\overrightarrow{3}+1}\, b = a \overrightarrow{3} (a \overrightarrow{3} (\ldots a \overrightarrow{3} (a \overrightarrow{3} a))) = \log_{\underbrace{\left(\log_{\ldots\left(\log_{\log_a a} a\right)} a\right)}_{b-1 \text{ раз}}} a . \tag{2.3.14}$$

Примеры 2.3.1 ÷ 2.3.6 подтверждают реальную возможность построения рядов алгебраических операций на основе обратных операций. Кроме того, эти примеры показывают, что действия, получившиеся путём однократного применения оперонов $\overrightarrow{\mathrm{P}}^1$ и $\overleftarrow{\mathrm{P}}^1$, можно выражать через известные прямые и обратные действия первых трёх ступеней, т.е. выражать неизвестное действие через известное.

2.4 Опероны понижения ступени действия

Определение*: Оперон P^{-1} назовем опероном понижения ступени действия на единицу, если композиция $\mathrm{P}^1(\mathrm{P}^{-1})$ является нуль - опероном:* $\mathrm{P}^1(\mathrm{P}^{-1}(\alpha)) = \mathrm{P}^0(\alpha)$.

Лемма 2.4.1. *Для того чтобы опероны $\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}$ и $\overleftarrow{\mathrm{P}}^1$ были взаимообратными, т.е.*

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^1\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1} = \mathrm{P}^0,$$

необходимо и достаточно, чтобы оперон $\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}$ преобразовывал действие α при выполнении условия $a \overrightarrow{\alpha} a = 1$ по закону $\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}(\alpha) = a \,\underleftarrow{\alpha-1}\, b = b\,\alpha(a \overrightarrow{\alpha} b + 1)$

Лемма 2.4.2.

$$(\overleftarrow{\mathrm{P}}^1\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}(\alpha) = \alpha) \Leftrightarrow (\overleftarrow{\mathrm{P}}^1(\alpha) = a \,\underrightarrow{\alpha-1}\, b = a\,\alpha\,(b \overrightarrow{\alpha} a + 1)) \vee (a \overrightarrow{\alpha} a = 1) \tag{2.4.1}$$

С помощью лемм 2.4.1 и 2.4.2 нетрудно доказать следующие теоремы:

Теорема 2.4.1.

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}^{-1} = \mathrm{Q}\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1} \qquad (2.4.2)$$

Теорема 2.4.2.

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^{1} = \mathrm{Q}\overrightarrow{\mathrm{P}}^{-1} \qquad (2.4.3)$$

Теорема 2.4.3.

$$(\mathrm{Q}(\alpha) = \alpha) \Rightarrow (\overrightarrow{\mathrm{P}}^{-1} = \overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}) \qquad (2.4.4)$$

Следствие 2.4.1.

$$((a\,\overleftarrow{\alpha}\,a = 1) \Rightarrow (a\,\underleftarrow{\overrightarrow{\alpha}-1}\,b = b\,\underrightarrow{\overrightarrow{\alpha}-1}\,a = b\,\overrightarrow{\alpha}\,(a\,\overleftarrow{\alpha}\,b+1)) \qquad (2.4.5)$$

Следствие 2.4.2.

$$((a\,\underline{\alpha}\,a = 1) \Rightarrow (a\,\underleftarrow{\overleftarrow{\alpha}-1}\,b = b\,\underrightarrow{\overleftarrow{\alpha}-1}\,a = b\,\overleftarrow{\alpha}\,(a\,\underline{\alpha}\,b+1)) \qquad (2.4.6)$$

Примеры 2.4.1 и 2.4.2 иллюстрируют применение формулы (2.4.5), когда выполняется условие $a\,\overrightarrow{\alpha}\,a = 1$.

Пример 2.4.1. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = a^b = a\,\underline{3}\,b$.

По формуле 2.4.5 будем иметь:

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}(\underline{3}) = a\,\underleftarrow{2}\,b = a\,\underleftarrow{3-1}\,b = b\,\underrightarrow{3-1}\,a = b\,\underline{3}\,(a\,\overrightarrow{3}\,b+1) = b^{(\log_b a+1)} = a\cdot b.$$

Пример 2.4.2. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = a\cdot b = a\,\underline{2}\,b$.

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}(\underline{2}) = a\,\underleftarrow{1}\,b = a\,\underleftarrow{2-1}\,b = b\,\underrightarrow{2-1}\,a = b\,\underline{2}\,(a\,\overrightarrow{2}\,b+1) = b\cdot\left(\frac{a}{b}+1\right) = a+b.$$

Примеры 2.4.3 и 2.4.4, 2.4.5 показывают, что несоблюдение условия $a\,\overrightarrow{1}\,a \equiv 1$, а именно, что α–$\beta \neq 1$, $a\,\overleftarrow{3}\,a = \sqrt[a]{a} \neq 1$ и $a\,\underline{3}\,a \equiv a^{a} \neq 1$, не позволяет провести отрицательное преобразование операций $a+b$, $\log_b a$ и $\sqrt[b]{a}$.

Пример 2.4.3. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = a+b = a\,\underline{1}\,b$.

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}(\underline{1}) = a\,\underleftarrow{0}\,b = b\,\underline{1}\,(a\,\overrightarrow{1}\,b+1) = b+(a-b+1) = a+1.$$

Пример 2.4.4. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = \log_b a = a\,\overrightarrow{3}\,b$.

$\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}(\overrightarrow{3})$ определим по формуле (2.4.13):

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}(\overrightarrow{3}) = a\,\underleftarrow{\overrightarrow{3}-1}\,b = b\,\underrightarrow{\overrightarrow{3}-1}\,a = b\,\overrightarrow{3}\,(a\,\overleftarrow{3}\,b+1) = \log_{\left(\sqrt[b]{a}+1\right)} b.$$

Пример 2.4.5. Пусть $a\,\underline{\alpha}\,b = \sqrt[a]{b} = a\,\overleftarrow{3}\,b$.

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}(\overleftarrow{3}) = a\,\underleftarrow{\overleftarrow{3}-1}\,b = b\,\underrightarrow{\overleftarrow{3}-1}\,a = b\,\overleftarrow{3}\,(a\,\underline{3}\,b+1) = \sqrt[b]{a^b+1}.$$

2.5 Взаимосвязи между различными β-рядами

Теорема 2.5.1.

$$\forall a;b \mid a;b\in N \quad \left(a \underleftarrow{\underline{\alpha}+1}(-b) = a \underrightarrow{\overleftarrow{\underline{\alpha}}+1}(b+2)\right) \tag{2.5.1}$$

Теорема 2.5.2.

$$a \underrightarrow{\underline{\alpha}+1}(-b) = a \underrightarrow{\overrightarrow{\underline{\alpha}}+1}(b+2) \tag{2.5.3}$$

Теорема 2.5.3.

$$a \underleftarrow{\overrightarrow{\underline{\alpha}}+1}(-b) = a \underrightarrow{\underline{\alpha}+1}(b+2) \tag{2.5.4}$$

Теорема 2.5.4.

$$a \underrightarrow{\overleftarrow{\underline{\alpha}}+1}(-b) = a \underleftarrow{\underline{\alpha}+1}(b+2) \tag{2.5.5}$$

Пример 2.5.1. На примере умножения $a\cdot b = a\,\underline{2}\,b$ проиллюстрируем действие теоремы (2.5.3):

$$a\cdot(-b) = a\,\underrightarrow{1+1}(-b) = a\,\underleftarrow{\overrightarrow{1}+1}(b+2) =$$
$$= \underbrace{((a\,\overrightarrow{1}\,a)\,\overrightarrow{1}\,a\ldots)\,\overrightarrow{1}}_{b+2}\,a = (\underbrace{((a-a)-a)-\ldots)-a}_{b+2} = -a\cdot b\,.$$

Пример 2.5.2. Аналогичный результат получается, если для вычисления $a\cdot(-b) = a\,\underline{2}\,(-b)$ используют формулу (2.5.2):

$$a\cdot(-b) = a\,\underline{2}\,(-b) = a\,\underleftarrow{1+1}(-b) = a\,\underrightarrow{\overleftarrow{1}+1}(b+2) =$$
$$= \underbrace{a\,\overleftarrow{1}(a\,\overleftarrow{1}\ldots(a\,\overleftarrow{1}}_{b+2}\,a)) = (\underbrace{-a+(-a+\ldots(-a+a)}_{b+2})) = -a\cdot b\,.$$

Пример 2.5.3. Определим $a\,\underline{3}\,(-b)$ по формуле (2.5.3):

$$a\,\underline{3}\,(-b) = a\,\underrightarrow{2+1}(-b) = a\,\underleftarrow{\overrightarrow{2}+1}(b+2) =$$
$$= \underbrace{((a\,\overrightarrow{2}\,a)\,\overrightarrow{2}\,a\ldots)\,\overrightarrow{2}}_{b+2}\,a = (\underbrace{((a/a)/a)/\ldots)/a}_{b+2} = \frac{1}{a^b} = a^{-b}\,.$$

Пример 2.5.4. Определим $a\,\underleftarrow{4}\,(-b)$ по формуле

$$a\,\underleftarrow{4}\,(-b) = a\,\underleftarrow{3+1}(-b) = a\,\underrightarrow{\overleftarrow{3}+1}(b+2) =$$
$$= \underbrace{a\,\overleftarrow{3}\,(a\,\overleftarrow{3}\ldots(a\,\overleftarrow{3}}_{b+2}\,a)) = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{1}{a}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)^{\frac{1}{a}} = a^{\left(\frac{1}{a^{b+1}}\right)} = a^{\left(a^{-b-1}\right)} = {}^{-b}a\,.$$

Прямое использование формулы слабой сверхстепени ${}^{-b}a = a^{\left(a^{(-b)-1}\right)}$ дает тот же результат.

Пример 2.5.5. Определим $a\,\underrightarrow{4}\,(-b)$ по формуле (2.5.3):

$$a\,\underrightarrow{4}\,(-b) = a\,\underrightarrow{3+1}(-b) = a\,\underleftarrow{\overrightarrow{3}+1}(b+2) =$$
$$= \underbrace{((a\,\overrightarrow{3}\,a)\,\overrightarrow{3}\,a\ldots)\,\overrightarrow{3}}_{b+2}\,a = \underbrace{\log_a(\log_a(\ldots(\log_a a}_{b+1})))\,. \tag{2.5.6}$$

2.6 Произвольные β-ряды

Применить оперон отрицательного преобразования $\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}$ к действиям $a+b$ и $a-b$ не представляется возможным из-за невыполнения условий леммы 2.4.1, так как $a\overrightarrow{1}a\neq 1$, $a\,\underline{1}\,a\neq 1$ и $a\overleftarrow{1}a\neq 1$.

Дальнейшие не стандартные преобразования действий $a\overleftarrow{1}b$ и $a\overrightarrow{1}b$ были рассмотрены в примерах 2.3.1 и 2.3.2 путём применения оперона повышения ступени:

$$a\,\underleftarrow{\overleftarrow{1}+1}\,b = a\,\underrightarrow{\overrightarrow{1}+1}\,b = \begin{cases} 0, & \text{если } b=2\cdot n \\ a, & \text{если } b=2\cdot n+1,\ n\in \mathrm{N} \end{cases} \tag{2.6.1}$$

$$a\,\underleftarrow{\overrightarrow{1}+1}\,b = a\,\underrightarrow{\overleftarrow{1}+1}\,b = a\cdot(2-b)$$

Диаграмма получения действий из сложения, а затем и из вычитания примет вид:

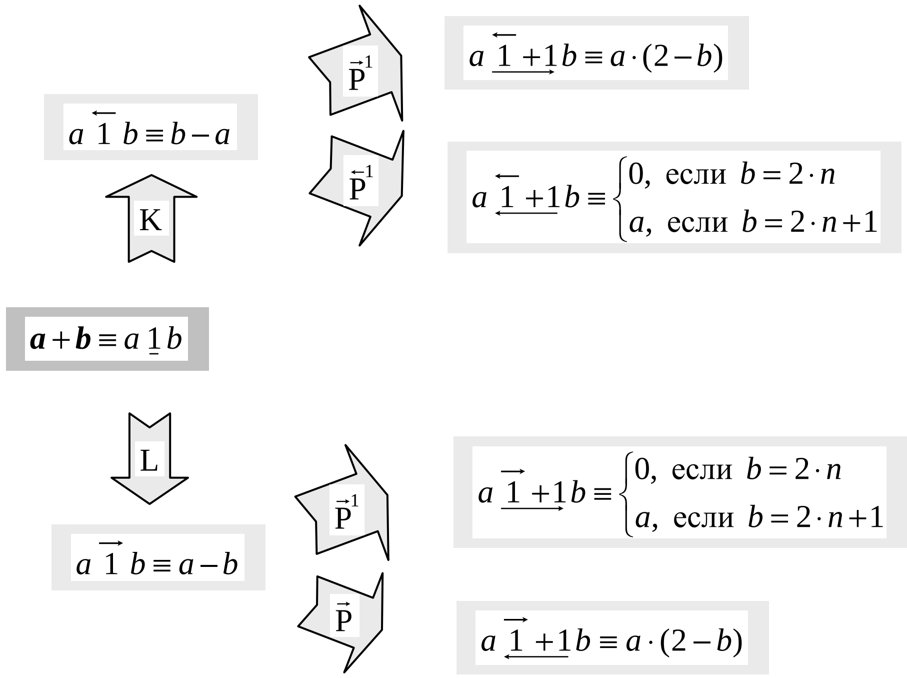


Рис. 2.6.3. Диаграмма преобразования действий главного ряда.

Дальнейшее движение по образованию новых действий можно продолжить от действия ступени $\delta = \underleftarrow{\overleftarrow{1}+1} = \underrightarrow{\overrightarrow{1}+1}$:

$$a\,\underline{\delta}\,b = a\,\underrightarrow{\overrightarrow{1}+1}\,b\,.$$

Определим операцию корня:

$$\mathrm{K}(a_x\,\underleftarrow{\overrightarrow{1}+1}\,b=c) = \mathrm{K}(a_x\,\underrightarrow{\overleftarrow{1}+1}\,b=c) = \mathrm{K}(a_x(2-b)=c) = a_x = b\,\underleftarrow{\overleftarrow{\overrightarrow{1}+1}}\,c = \frac{c}{2-b}\,.$$

В обычном виде получим:

$$a\,\underleftarrow{\overleftarrow{\overrightarrow{1}+1}}\,b = a\,\underrightarrow{\overleftarrow{\overleftarrow{1}+1}}\,b = a\,\overleftarrow{\delta}\,b = \frac{b}{2-a}\,. \tag{2.6.2}$$

Определим операцию логарифма:

$$\mathrm{L}(a\,\underleftarrow{\overrightarrow{1}+1}\,b_x=c) = \mathrm{L}(a\,\underrightarrow{\overleftarrow{1}+1}\,b_x=c) = \mathrm{L}(a(2-b_x)=c) = b_x = b\,\underleftarrow{\overrightarrow{\overrightarrow{1}+1}}\,c = 2-\frac{c}{a}\,.$$

В обычном виде:

$$a\,\overrightarrow{\delta}\,b = a\,\underleftarrow{\overrightarrow{\overrightarrow{1}+1}}\,b = b\,\underrightarrow{\overrightarrow{\overleftarrow{1}+1}}\,c = 2-\frac{a}{b}\,. \tag{2.6.3}$$

Применим к данной операции $a\,\underline{\delta}\,b$ опероны $\vec{P}^1$ и $\overleftarrow{P}^1$.

По определению оперона $\vec{P}^1$ будем иметь:

$$a\,\underleftarrow{\delta+1}\,2 = a(2-a)$$

$$a\,\underleftarrow{\delta+1}\,3 = a(2-a)(2-a) = a(2-a)^2$$

$$\ldots$$

$$a\,\underleftarrow{\delta+1}\,b = a(2-a)^{b-1}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\overleftarrow{P}^1\overleftarrow{P}^1 K(a\,\underline{1}\,b) = \overleftarrow{P}^1\overleftarrow{P}^1(a-b) = \overleftarrow{P}^1(a\,\underline{\delta}\,b) = \\ &= a\,\underleftarrow{\underline{\overleftarrow{1}+1}+1}\,b = a\,\underleftarrow{\overleftarrow{1}+2}\,b = a(2-a)^{b-1}\end{aligned} \qquad (2.6.4)$$

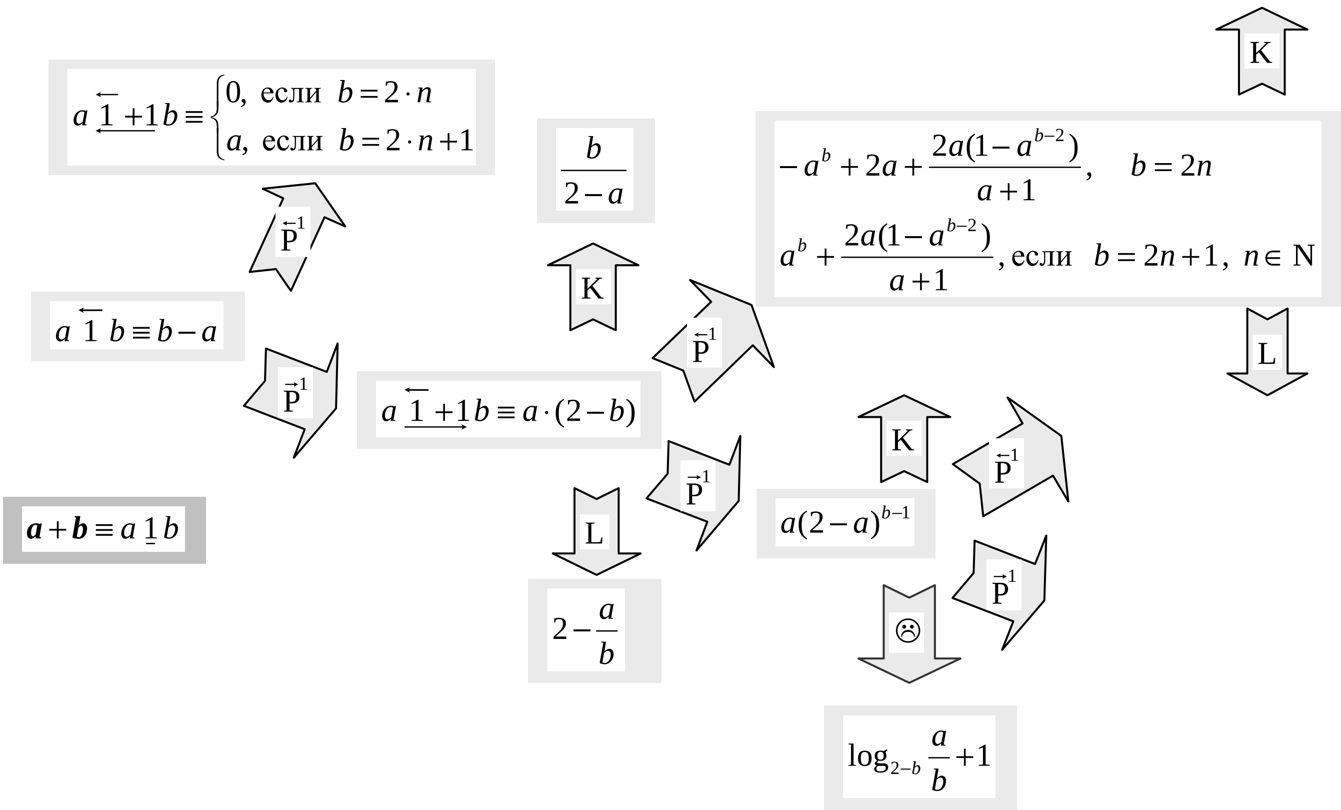


Рис. 2.6.4. Диаграмма дальнейших шагов преобразования действий главного ряда.

Результаты, полученные по самым первым шагам преобразования сложения, представлены на диаграмме 2.6.3.

Примем в качестве исходной операции действие второй ступени - умножение. Применение к нему оперонов логарифма и повышения ступени даёт следующие результаты (см. примеры 2.3.3., 2.3.4).

$$\begin{aligned}&\vec{P}^1 L(a\cdot b) = a\,\underrightarrow{\overrightarrow{2}+1}\,b = a\,\underleftarrow{\overleftarrow{2}+1}\,b = \begin{cases}1, & b=2n\\ a, & b=2n+1,\ n\in N\end{cases}\\ &\overleftarrow{P}^1 L(a\cdot b) = a\,\underleftarrow{\overrightarrow{2}+1}\,b = a\,\underrightarrow{\overleftarrow{2}+1}\,b = a^{2-b}\end{aligned} \qquad (2.6.8)$$

К операции деления $a \overrightarrow{2} b = \frac{a}{b}$ **возможно применение оперона отрицательного преобразования (обобщения)!** В этом случае выполняются достаточные условия $a \overrightarrow{2} a = 1;\ a \overleftarrow{2} a = 1$. По теореме 2.4.1. будем иметь:

$$a \underrightarrow{\overrightarrow{2}-1} b = b \underleftarrow{\overrightarrow{2}-1} a = a \overrightarrow{2} (b \overleftarrow{2} a + 1) = \frac{a}{\frac{a}{b}+1} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} . \qquad (2.6.9)$$

Обозначим ступень полученной операции ξ:

$$a \underline{\xi} b = a \underrightarrow{\overrightarrow{2}-1} b = b \underleftarrow{\overrightarrow{2}-1} a .$$

Определим для операции $a \underline{\xi} b$ корень и логарифм.

Пусть $a \underline{\xi} b = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = c$, тогда

$$\mathrm{K}\left(a_x \underline{\xi} b = c\right) = a_x = \frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = b \overleftarrow{\xi} c .$$

В обычном виде:

$$a \overleftarrow{\xi} b = \frac{1}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} , \qquad (2.6.10)$$

$$\mathrm{L}\left(a \underline{\xi} b_x = c\right) = b_x = \frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}} = c \overrightarrow{\xi} a .$$

В обычном виде: $$a \overrightarrow{\xi} b = \frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} . \qquad (2.6.11)$$

Дальнейшее применение оперонов $\overrightarrow{\mathrm{P}}^{1}$ и $\overleftarrow{\mathrm{P}}^{-1}$ к операциям $a \overrightarrow{\xi} b$ и $a \overleftarrow{\xi} b$ невозможно, т.к. при $a = b$ выражения $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ и $\frac{1}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ становятся неопределёнными.

Получение новых операций возможно также и на основе действия

$$a \underleftarrow{\overrightarrow{2}-1} b = a^{2-b}$$

путём использования оперонов $\overleftarrow{\mathrm{P}}^{1}$, K, L.

В качестве следующего примера действия произвольной ступени рассмотрим операцию

$$a \underline{\pi} b = \sqrt{a^2 + b^2} . \qquad (2.6.16)$$

Применим к ней опероны $\overleftarrow{\mathrm{P}}^{1}$, K, L.

$$\mathrm{K}(a \underline{\pi} b) = \mathrm{K}(a_x \underline{\pi} b = c) = a_x = b \overleftarrow{\pi} c = \sqrt{c^2 - b^2} ,$$

$$a \overleftarrow{\pi} b = \sqrt{b^2 - a^2} , \qquad (2.6.17)$$

$$\mathrm{L}(a \underline{\pi} b) = \mathrm{L}(a \underline{\pi} b_x = c) = b_x = c \overrightarrow{\pi} a = \sqrt{c^2 - a^2} ,$$

$$a \overrightarrow{\pi} b = \sqrt{a^2 - b^2} , \qquad (2.6.18)$$

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^1\left(a\,\underline{\pi}\,b\right) = ((\underbrace{(a\,\underline{\pi}\,a)\,\underline{\pi}\,a....)\,\underline{\pi}\,a}_{b} = a\sqrt{b} = a\,\underleftarrow{\pi+1}\,b = a\,\underrightarrow{\pi+1}\,b\;.$$

К действию $a\,\underline{\pi+1}\,b = a\sqrt{b}$ также применим опероны K, L, P:

$$\mathrm{K}(a\,\underline{\pi+1}\,b) = \mathrm{K}(a_x\,\underline{\pi+1}\,b = c) = a_x = b\,\overleftarrow{\pi+1}\,c = \frac{c}{\sqrt{b}}\,,$$

$$a\,\overleftarrow{\pi+1}\,b = \frac{b}{\sqrt{a}}\,, \qquad (2.6.19)$$

$$\mathrm{L}(a\,\underline{\pi+1}\,b) = \mathrm{L}(a\,\underline{\pi+1}\,b_x = c) = b_x = c\,\overrightarrow{\pi+1}\,a = \left(\frac{c}{a}\right)^2,$$

$$a\,\overrightarrow{\pi+1}\,b = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \qquad (2.6.20)$$

$$\overleftarrow{\mathrm{P}}^1\left(a\,\underline{\pi+1}\,b\right) = ((\underbrace{(a\,\underline{\pi+1}\,a)\,\underline{\pi+1}\,a....)\,\underline{\pi+1}\,a}_{b} = a\,\underleftarrow{\pi+2}\,b = a^{\frac{b+1}{2}}\;, \qquad (2.6.21)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}^1\left(a\,\underline{\pi+1}\,b\right) = \underbrace{a\,\underline{\pi+1}\,(a\,\underline{\pi+1}\,(....(a\,\underline{\pi+1}\,a)))}_{b} = a\,\underrightarrow{\pi+2}\,b = a^{\left(2-2^{1-b}\right)}\;. \qquad (2.6.22)$$

Диаграмма получения этих действий будет выглядеть так:

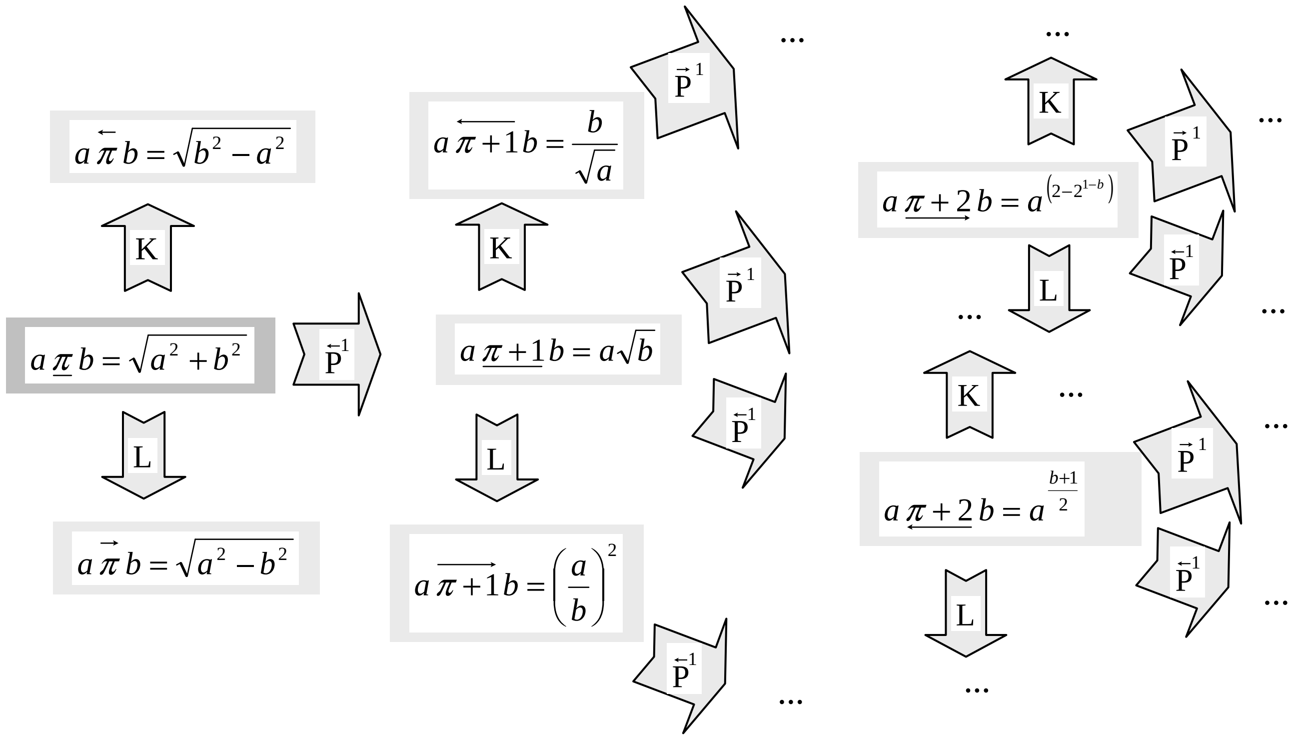


Рис. 2.6.6. Диаграмма преобразований действий от базового действия $a\,\underline{\pi}\,b = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. ИСЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ И ПОНЯТИЯ АНАЛИЗА

3.1. Алгебраическая структура определений производной и интеграла

Определение производной в виде:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \qquad (3.1.1)$$

было дано И. Ньютоном, Г. Лейбницем в 17 веке и с тех пор не претерпели существенных изменений. Технология получения производной состоит в задании изменения у функций, и сравнении изменений функции и аргумента.

Сопоставим шаги определения обычной производной y' и новой „производной ” $y^{\cup}$:

- *задается изменение независимой переменной:*

Δx — $\xi_{\mathbf{x}}$

(х изменяется **на** величину Δx) — (аргумент изменяется не на сколько-то, а **во сколько)**

- *ищется новое значение аргумента:*

$\mathbf{x_2} = \mathbf{x_1} + \Delta x$ — $\mathbf{x_2} = \xi_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x_1}$,

где x_1 - начальное значение,
а x_2 - конечное значение аргумента.

- *ищется изменение функции:*

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) \qquad \xi_{\mathbf{y}} = \frac{y(\xi x)}{y(x)} \qquad (3.1.2)$$

на сколько изменилась функция — **во сколько раз** изменилась функция

- *производится предельное сравнение изменений функции и аргумента:*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad (3.1.3) \qquad y^{\cup} = \lim_{\xi_x \to 1} \log_{\xi_x} \xi_y \quad (3.1.4)$$

(Нетрудно показать, что $\lim\limits_{\xi_x \to 1} \log_{\xi_x} \xi_y$ существует, во всех тех случаях, когда существует и обычная производная y'). Диаграммы действий, использованных и в том и в другом случае, имеют вид:

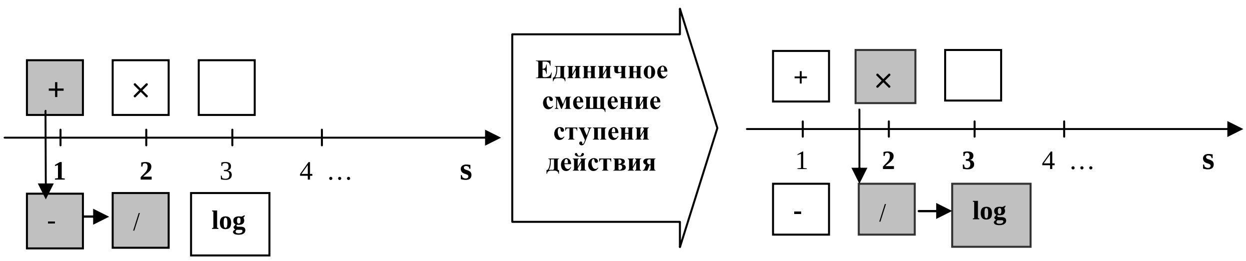


Рис. 1.1.7 Сопоставление диаграмм действий двух разных в алгебраическом отношении определений „производных.”

Эти операции выделены на диаграмме действий (рис. 1.1.7.)

Используя правило Лопиталя, будем иметь:

$$y'_2 = \lim_{\xi \to 1} \log_{\xi}\left(\frac{y(x\cdot\xi)}{y(x)}\right) = \lim_{\xi \to 1} \frac{\ln y(x\cdot\xi) - \ln y(x)}{\ln(\xi)} = \lim_{\xi \to 1} \frac{\dfrac{1}{y(x\cdot\xi)} \cdot y'_{\xi}(x\cdot\xi)\cdot(\xi\cdot x)'}{\dfrac{1}{\xi}} = \frac{x}{y}\cdot y' \quad (3.1.5)$$

(Дифференцирование в выражении 3.1.5 проводилось по ξ).

Полученный таким способом дифференциальный оператор $y'_2 = \frac{x}{y} y' = \frac{y'}{y/x}$, как мы видим, можно выразить через обычную производную. Он имеет следующую геометрическую интерпретацию, вытекающую из соотношения (3.1.5):

$$y'_2 = \frac{y'}{y/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y / \Delta x}{y/x} \right) \tag{3.1.6}$$

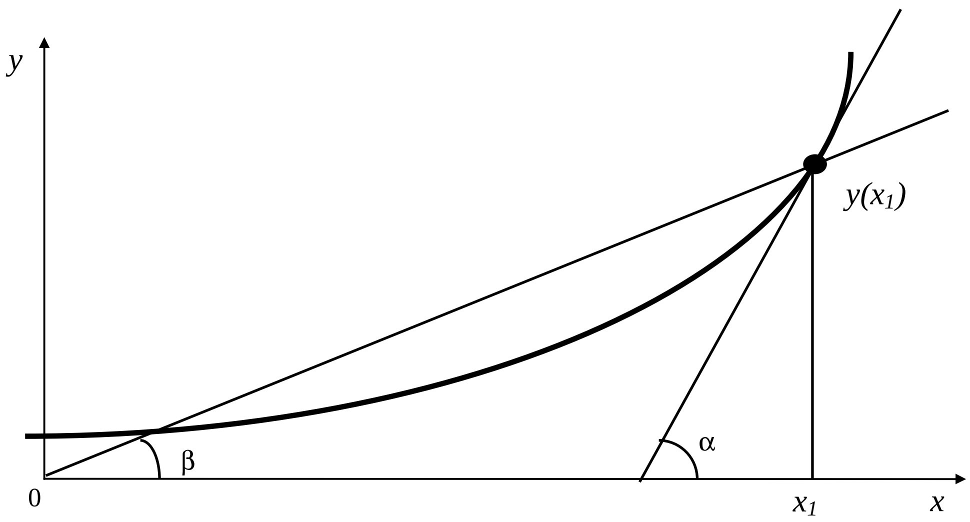


Рис. 3.1.3. К геометрической интерпретация **дифдва:** α - угол наклона касательной в заданной точке x_1, β - угол наклона радиуса-вектора из начала координат к той же точке x_1.

Производную второй ступени будем называть кратко **дифдва** и обозначать так:

$$y^{\cup} = y'_2 = \frac{y'}{y/x} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}.$$

Некоторые свойства *дифдва*:

1. $c^{\cup} = 0$
2. $(cy)^{\cup} = y^{\cup}$
3. $(c+y)^{\cup} = \dfrac{y}{c+y} y^{\cup}$
4. $(u+v)^{\cup} = \dfrac{1}{u+v}\left(uu^{\cup} + vv^{\cup}\right)$ (3.1.7)
5. $(v \cdot u)^{\cup} = v^{\cup} + u^{\cup}$
6. $\left(v/u\right)^{\cup} = v^{\cup} - u^{\cup}$
7. $\left(u(v(x))\right)^{\cup} = u_v^{\cup} \cdot v'_x(x)$

Для основных элементарных функций *дифдва* даёт следующие результаты:

1. $x^{\cup} = 1$
2. $\left(x^n\right)^{\cup} = n$
3. $\left(e^x\right)^{\cup} = x$
4. $(\ln x)^{\cup} = \dfrac{1}{\ln x}$

5. $(\sin x)^{\cup} = x \operatorname{ctg} x$ (3.1.8)

6. $(\cos x)^{\cup} = -x \operatorname{tg} x$

7. $(\operatorname{tg} x)^{\cup} = 2x \operatorname{cosec} 2x$

8. $(\operatorname{ctg} x)^{\cup} = -2x \sec 2x$

9. $(\arcsin x)^{\cup} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

10. $(\arccos x)^{\cup} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$

Назовём $\underset{2}{\mathrm{P}}(x)$ первообразной второй ступени от функции $y(x)$, если

$$\underset{2}{\mathrm{P}}^{\cup}(x) = y(x)$$

Покажем, что „интегральное” произведение вида

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\xi_i^{\,y_i(x)} \tag{3.1.9}$$

является первообразной второй ступени $\underset{2}{\mathrm{P}}(x)$ для функции $y(x)$.

Для этого нужно показать, что $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\xi_i^{\,y_i(x)}\right)^{\cup} = y(x)$.

Форма выражения (3.1.9) возникает на основе аналогии с определением интегральной суммы:

$$☞(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i(x)\cdot\Delta x = \int y(x)dx \tag{3.1.10}$$

В обобщенном виде выражение (3.1.10) примет вид:

$$☞(x) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}} \overset{n}{\underset{i=1}{1}}\left(\Delta x_i \; \underline{2} \; y_i(x)\right) \tag{3.1.11}$$

Повысим ступени используемых здесь действий на единицу:

$$\underset{2}{\mathrm{P}}(x) \equiv \underset{2}{\mathrm{P}}\big(y(x)\big) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \xi_{xi}\to 1}} \overset{n}{\underset{i=1}{2}}\left(\xi_{xi} \; \underline{3} \; y_i(x)\right) \tag{3.1.12}$$

Выражение (3.1.12) тождественно записи (3.1.9):

$$\underset{2}{\mathrm{P}}(x) = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\xi_x^{\,y_i(x)} \tag{3.1.13}$$

Последовательность составления интегрального произведения (3.1.13) аналогична последовательности составления интегральной суммы:

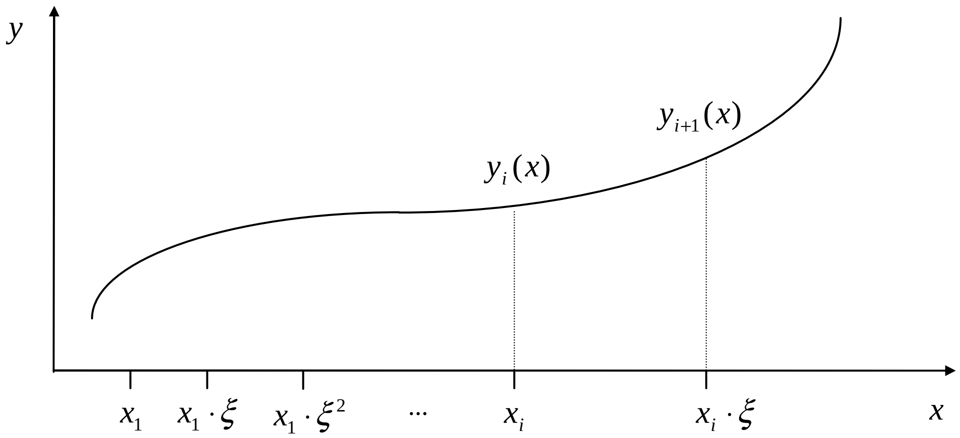


Рис. 3.1.4.

- разбиваем ось абсцисс на отрезки, причём каждая следующая точка разбиения x_{i+1} отличается от предыдущей x_i в ξ раз (см. рис. 3.1.1), т.е. $x_{i+1} = x_i \cdot \xi$:
- определяем (вводим) элементарную степень:

$$\xi_i^{\,y_i(x)}$$

- определяем произведение элементарных степеней и переходим к пределу

$$\underset{2}{\mathrm{P}}(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right)^{y_i(x)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^{y_i(x)}, \text{ т.к.}$$

$$\xi_x = \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_i + \Delta x_i}{x_i} = 1 + \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Тогда

$$\underset{2}{\mathrm{P}}(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^{\frac{x_i}{\Delta x_i}} \right)^{\frac{\Delta x_i}{x_i} \cdot y_i(x)} = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i(x)\Delta x}{x_i}} = e^{\int \frac{y(x)dx}{x}} \qquad (3.1.14)$$

Если допустить, что $\underset{2}{\mathrm{P}}^{\cup}(x) = \dfrac{x \cdot \mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)} = y(x)$, то интегрируя это выражение для $\mathrm{P}(x)$, получим тот же результат:

$$\frac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)} = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow \frac{d\mathrm{P}(x)}{\mathrm{P}(x)} = \frac{y(x)}{x} dx \Rightarrow \int \frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \int \frac{y(x)}{x} dx \Rightarrow \mathrm{P}(x) = e^{\int \frac{y(x)}{x} dx}$$

Выражение вида

$$\underset{2}{\mathrm{P}}(x) = \underset{2}{\mathrm{P}}\big(y(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \xi^{y(x)} \equiv \mathcal{S}\xi^{y(x)} \qquad (3.1.15)$$

назовём **мультигралом** (т.к. данное выражение вводится с использованием бесконечного *произведения*) или интегралом второй ступени функции $y(x)$.

При этом $\underset{2}{\mathrm{P}}(x)$ является первообразной второй ступени для функции $y(x)$:

$$\underset{2}{\mathrm{P}}^{\cup}(x) = y(x) \tag{3.1.16}$$

и, кроме того,

$$\mathcal{S}\xi^{y(x)} = e^{\int \frac{y(x)}{x} dx} \tag{3.1.17}$$

Отметим основные свойства *мультиграла*, вытекающие из определения (3.1.15) и соотношений (3.1.16), (3.1.17).

1. $$\overset{b}{\underset{a}{\mathcal{S}}}\xi^{y(x)} = \frac{\underset{2}{\mathrm{P}}(b)}{\underset{2}{\mathrm{P}}(a)} \tag{3.1.18}$$
2. $$\mathcal{S}\xi^{y(x)} = c \cdot \underset{2}{\mathrm{P}}(x) \tag{3.1.19}$$
3. $$\mathcal{S}\xi^{u+v} = \mathcal{S}\xi^{u} \cdot \mathcal{S}\xi^{v} = c \cdot \underset{2}{\mathrm{P}}(u) \cdot \underset{2}{\mathrm{P}}(v) \tag{3.1.20}$$
4. $$\mathcal{S}\xi^{a+y(x)} = x^a \cdot \mathcal{S}\xi^{y(x)} = cx^a \, \underset{2}{\mathrm{P}}\big(y(x)\big) \tag{3.1.21}$$
5. $$\mathcal{S}\xi^{a \cdot y(x)} = \left(\mathcal{S}\xi^{y(x)}\right)^a = c^a \cdot \left(\underset{2}{\mathrm{P}}(y(x))\right)^a \tag{3.1.22}$$

Мультигралы некоторых элементарных функций:

1. $$\mathcal{S}\xi^{a} = c \cdot x^a \tag{3.1.23}$$
2. $$\mathcal{S}\xi^{x} = c \cdot e^x \tag{3.1.24}$$
3. $$\mathcal{S}\xi^{\ln x} = c \cdot \sqrt{x^{\ln x}} \tag{3.1.25}$$
4. $$\mathcal{S}\xi^{\frac{1}{\ln x}} = c \cdot \ln x \tag{3.1.26}$$
5. $$\mathcal{S}\xi^{\operatorname{ctg} x} = c \cdot \sin x \tag{3.1.27}$$
6. $$\mathcal{S}\xi^{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{c \cdot \cos x} \tag{3.1.28}$$
7. $$\mathcal{S}\xi^{x^2} = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \tag{3.1.29}$$
8. $$\mathcal{S}\xi^{x^n} = c \cdot e^{\frac{x^n}{n}} \tag{3.1.30}$$

Таблица 3.3.

Выражения обобщенных производной и интеграла через обычные производную и интеграл первой ступени.

Метрика приращений	Производная	Интеграл
$x_2 = x_1 + \Delta x$	$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\mathrm{P}(y) = \int y(x)dx$
$x_2 = x \cdot \xi$	$y^{\cup} = \underset{2}{y'} = \frac{x}{y} y'$	$\underset{2}{\mathrm{P}}(y) = e^{\int \frac{y(x)}{x} dx}$
$x_2^{1-n} = x_1^{1-n} + \xi^{1-n}$	$\underset{n}{y'} = \frac{x^n}{y^n} y'$	$\underset{n}{\mathrm{P}}(y) = \left((1-n) \int \frac{y(x)}{x^n} dx \right)^{\frac{1}{1-n}}$
$g(x_2) = g(x_1) + g(\xi)$	$\underset{pg}{y'} = \frac{g'_y(y)}{g'_x(x)} y'$	$\underset{pg}{\mathrm{P}}(y) = g^{-1}\left(\int g'_x(x) y(x) dx \right)$
$g(x_2) = g(x_1) \cdot g(\xi)$	$\underset{ug}{y'} = \frac{g(x) g'_y(y)}{g(y) g'_x(x)} y'$	$\underset{ug}{\mathrm{P}}(y) = g^{-1}\left(e^{\int \frac{g'_x(x) y(x)}{g(x)} dx} \right)$
$g^{1-n}(x_2) = g^{1-n}(x_1) + g^{1-n}(\xi)$	$\underset{npg}{y'} = \frac{g^n(x) g'_y(y)}{g^n(y) g'_x(x)} y'$	$\underset{npg}{\mathrm{P}}(y) = g^{-1}\left((1-n) \int \frac{g'_x(x) y(x)}{g^n(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-n}}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Феноменология действий и чисел, а также других так или иначе связанных с ними понятий показывает, что последовательное обобщение сложения и переходы к действиям более высоких или «параллельных» ступеней активизируют процесс развития практически всех основных понятий математики.

Исследование этих вопросов, составившее содержание данной книги, как мы могли убедиться, демонстрирует реальную возможность открывать и исследовать свойства новых математических объектов, продолжая естественную экстраполяцию уже известных тенденций обобщений.

Кроме того исследование, проведенное в ИД, предоставляет также и качественно новые возможности для открытия и исследования свойств новых, ранее неизвестных математических объектов:

- **действий отрицательных ступеней;**
- **ряды действий, начинающихся не только от сложения, но и от неких произвольных начальных, *базовых* действий.**

Аналогичные возможности открываются и в связи с попытками дальнейшего развития определений производной и интеграла. Исследование их кратко приведено в 3-м разделе, чтобы показать реальную возможность дальнейших обобщений. Конкретная реализация этих шагов состояла в том, чтобы расширив класс специальных алгебраических бинарных операций, существенно расширить далее и класс дифференциальных операторов.

Мы сознаем, что выполненная работа всего лишь еще один небольшой шаг в разработке бесконечной темы, касающейся проблемы глубочайшего единства и гармонии числа и действия. Число и действие развиваются в теснейшем взаимодействии по отношению друг к другу, и получение новых знаний о Действии приведет, надо полагать, к практически неограниченному росту знаний и о числе.

В заключение хочется выразить надежду, что предложенное направление исследования понятий числа и понятия действия не является надуманным и «абстрактным», но является вполне естественным следствием исторически наметившихся тенденций, и окажется плодотворным как для теоретической, так и для прикладной математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов И. К. Арифметика. Развитие понятия о числе и действия над числами. -М .: Учпедгиз, 1962.
2. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. -М.: Учпедгиз, 1939.
3. Бесконечность и вселенная. -М.: Мысль, 1969.
4. Богомолов С.А. Актуальная бесконечность. -СПб.: 1923, Л.М., 1934.
5. Больцано Б. Парадоксы бесконечного. –Одесса, 1911.
6. Бунин В.А. Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов. В сб. МОИП «Математическая физика. Электродинамика. История физики» -М.: 1967.
7. Бунин В.А., Чудинов В.А. Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы. В сб. МОИП «Новые вопросы электродинамики» М.: 1976.
8. Бурбаки Н. Теория множеств. -М.: 1965
9. Граве Д. Энциклопедия математики. –Киев: 1912.
10. Драбкина М.Е. Основания арифметики. -Изд. Мин. высш. образ., 1962
11. Жегалкин И.И. Трансфинитные числа. -М.: Университет, 1907.
12. Кантор Г. Труды по теории множеств. -М.: Наука, 1985.
13. Клайн М. «Математика, поиск истины». -М.: Мир, 1988
14. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. -М.-Л.: 1937.
15. Лосев А.Ф. Бытие-Имя-Космос . -М.: Мысль, 1998
16. Лосев А.Ф. Миф-Число-Сущность. -М.: Мысль, 1994
17. Лосев А.Ф. Очерки античного символизма и мифологии. -М.: Мысль, 1998
18. Лосев А.Ф. Структура и Хаос. -М.: Мысль, 1998.
19. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. –Киев: Наукова думка, 1982
20. Френкель А.А. Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. -М.: 1966
21. Хаусдорф Ф. Теория множеств. -М.-Л., 1937
22. Шафаревич И. О некоторых тенденциях развития математики. -ж. «Москва», 1990, №12, стр.5
23. Weyl H. A Half-Centure of Mathematics.-«Amer. Math. Mothly»,1951, vol. 58, №8, p. 523

Cohen P.J. The Indenpendence of the Continuum Hipothesis. «Proc. Nat. Acad. Sci. USA»,1963, vol. 50, p1145, 1964, vol. 51, p.105