Комаров В.М.

Рон-исчисление арифметических действий

Парадокс окончательно установленный ныне состоит в том, что именно предельные абстракции являются истинным оружием, которое правит нашим осмыслением конкретного факта.

А.Н. Уайтхед [23]

Современная система знаний показывает, что понятие Числа является фундаментальным понятием математики и в интерпретациях соотносится практически со всеми известными видами реальности. Число (в смысле мощности Кантора) справедливо относится к *самым абстрактным понятиям*. Однако думать так было бы, на наш взгляд, ошибкой. В математике существует понятие, которое можно смело поставить или выше числа, или, по крайней мере, рядом с ним. Этим понятием является *действие над числом*[1].

Принципы исчисления действий

Исчисление действий(ИД) основывается на различении **сущности** математических объектов и самих **объектов** (имея в ввиду под ними некие явленные сущности). При этом, конечно, предполагается, что **кратность** явленности (данности, положенности, наличности) тех или иных объектов в качестве особой, является весьма важной характеристикой, имеющей непосредственное отношение к формированию структуры действия.

Таким образом в ИД для основных ее объектов, каковыми являются **числа** a, b, c… , **действия над числами** α, β, γ, … , и **опероны** (действия над действиями) $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, … вводится необходимость различать их *сущности,* обозначаемой знаком **W ,** и *кратность* их данности (наличности, осуществленности, положенности), обозначаемой **C**.

Итак, для построения ИД специально должны быть оговорены два условия:

- все формализованные в ней объекты, обозначаемые одними и теми же знаками должны являться объектами одной сущности (здесь имеется ввиду, что **сущность того или иного математического объекта задается в определении**).
- объекты, которые в данном контексте должны восприниматься, как разные сущности следует обозначать разными символами.

В этом смысле, например, множество {a, a, b, b, b, c, b}, элементами которого являются *числа*, представляет три числовые сущности, т.е. всего только три числа: a, b и c. Однако кратность их представленности различна: **a** представлено трижды, **b** представлено с кратностью 4 , а **c** с кратностью 1.

Другой аспект различения типов существования объектов касается проблемы *свободности или связанности их существования*, и необходимости при формализации исчисления

---

[1] Именно **действие** (или операция над числом) по сути своей предназначено как для порождения чисел, так и для любых их качественных или количественных трансформаций. Из всех чисел, которыми оперирует человек, непосредственно данными, первичными, как бы экзистенциально сущими можно считать, пожалуй, *только малые числа натурального ряда в пределах одного десятка*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7… . Все остальные так или иначе определяются и формализуются через тот или иной (осознаваемый, а иногда и не осознаваемый) конкретный *способ их порождения*, называемый *арифметическим действием (или арифметической операцией.* Различные моменты этого утверждения иллюстрируются следующими примерами:

Пример 1. ***Большие* натуральные числа.** Всякое большое натуральное число N (в отличие от малых чисел) более удобно и определяется и воспринимается, как некое *малое* **n**, к которому многократно **прибавляют 1**. Этот простой пример показывает, как мы видим, обнаруживает необходимость при определении того или иного достаточно большого числа использования *действия* «прибавления»).

Пример 2. ***Большое* число N= 10^{10}**, записанное в таком виде, с очевидностью требует для своего и определения и формального представления *операции* возведения в степень.

Пример 3. **Минус единица «-1»**– является числом вообще нового качества по отношению к любому натуральному положительному числу.

Это становится вполне очевидным, если в записи числа «–1» заметить сокращенный вариант более полной записи с использованием действия вычитания вида «0-1».

Пример 4. Любое **рациональное число** вида m/n есть прямое порождение *операции* деления.

Пример 5. **Мнимая единица i=**$\sqrt{0-1}$ определяется и оформляется уже не с помощью одного, а *двух действий*: вычитания и корня.

Пример 6. **Иррациональное число** $\sqrt{2}$ по определению порождается *операцией* корня.

Пример 7. **Трансцендентное число e (**e - основание натуральных логарифмов**)** для своего определения требует бесконечного ряда сразу *трех действий*:

e=1+(1/2!)+ (1/3!)+(1/4!)+ (1/5!)+…

этот момент особо выделять. В исчислении действий для этой цели вводятся понятия *связанного и свободного* существования математических объектов.

Существование объектов назовем ***связанным***, если эти объекты объединены теми или иными действиями в некое единое целое, в некий единый «агрегат». В противном случае их существование будем называть *свободным*.

Пример 1. $\exists$a, a, a, b, a, a, b, b, c - в данном случае квантор существования $\exists$ утверждает *свободное* существование объектов a, b, c в разной кратности их данности.

Пример 2. $\exists$ a, b, $(a\,\alpha\,((b\,\beta\,a\,\gamma\,a)\,\alpha\,b\,\gamma\,a)\,\alpha\,b)$ -это алгебраическое выражение утверждает *связанное* существование (в некоем *одном* выражении) объектов a, b. Связывание в этом случае осуществляется действиями α, β, γ.

Пример 3. $\exists$a, b, {a, b}, a+b -все эти три выражения утверждают разные типы существования. Квантор $\exists$a, b утверждает *свободное* существование a и b. Квантор $\exists\{a, b\}$ утверждает *связанное* существование a, b (a и b здесь не просто существуют, но существуют, связанные принадлежностью к множеству {a, b}). Выражение «a+b» утверждает еще более связанное существование a и b. Числа a и b здесь не просто существуют, но существуют объединенными в прямом смысле действием сложения в одно выражение a+b.

Пример 4. $\alpha \equiv a + a + a + a + a$ -алгебраическое выражение α представляет собой пример связанного состояния всего двух сущностей: одна из них есть число a с кратностью 5, а другая есть действие «+» с кратностью 4.

В ИД мы придерживаемся определения числа в смысле Кантора-Лосева, тождественного понятию мощности множества:

Число *есть многое, объединенное одно, когда различия между элементами этого многого опираются только на факт их бытия, факт их существования (без обращения к качественной или порядковой определенности их взаимных различий).*

Этих кратких замечаний, на наш взгляд достаточно, чтобы *действию над числом* дать определение.

Определение 1. **Действие над числом есть способ изменения сущности числа.**

Из этого определения следует, что изменить число - значит изменить его сущность, содержащуюся по определению в его „многоединстве". Иными словами, это означает, что требуется изменить либо его модуль (*многое* числа), либо его вторую часть, в которой число представлено как *монада, как нечто единое.* Эта вторая часть есть *качество* числа (положительное, отрицательное, мнимое и т.п.). Отсюда также следует, что отождествить два числа - значит привести их сущности (модуль и качество) к тождеству.

Определение 2. **Алгебраическое выражение** – это множество чисел, связанных в одно целое некоторым множеством действий (кратность чисел и действий произвольна). Примеры алгебраических выражений:

1. $(a\,\beta\,a\,\gamma\,a)\,\alpha\,a\,\gamma\,a$ 2. $a\,\alpha\,[(b\,\beta\,a\,\gamma\,a)\,\alpha\,b\,\gamma\,a]\,\alpha\,b$

Определение 3. **Унарное действие** $\alpha(a)$ - алгебраическое выражение α с одной числовой сущностью a (кратность числа и действий произвольна).

Примеры унарных действий:

1. $\alpha(a)= (a\,\beta\,a\,\gamma\,a)\,\alpha\,a\,\gamma\,a$ 2. $\beta(a)= a + a^2 + a^3$ 3. $\gamma(a)= a + a^2 + a^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-a}$, $(0 < a < 1)$.

Определение 4. **Бинарное действие** $a\,\eta\,b$ - алгебраическое выражение с двумя числовыми сущностями a и b.

Для бинарного действия принимаем следующие обозначения:

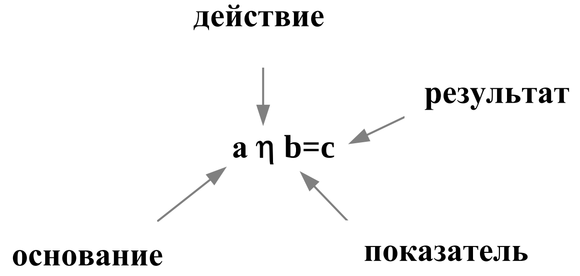


Рис. 1. Составные части бинарного действия

Здесь числа a и b являются *операндами* действия η. Левый операнд «a» называется *основанием*, а правый «b» -*показателем* этого действия, «c» - результатом.

Примеры бинарных действий:

1. Бинарное действие η : $a \eta b = a \alpha ((b \beta a \gamma a) \alpha b \gamma a) \alpha b$

2. Другие примеры определений бинарных действий α, β, γ:

$$\frac{a - b}{a + b} = a \ \alpha \ b, \qquad a^{b} \cdot b^{a} = a \ \beta \ b,$$

$$\log_{\frac{a}{b}} (a + b) = a \ \gamma \ b.$$

В чем отличие описываемых подходов от общепринятых, используемых в современной теоретической арифметике и алгебре?

Первое:

В ИД предлагается иметь дело с числовыми сущностями, и абстрагироваться от кратности вхождения чисел в те или иные алгебраические выражения[2].

Второе:

При определении **действий над числами** подчеркивается необходимость абстрагирования от количества копий числа, считая их одним числом, а **собственно *действиями* над числами предлагается считать именно те, которые выполняют в отношении числа не копирующую и «множительную», а, прежде всего, преобразующую функцию.**

Третье:

При определении того или иного бинарного действия допускается применение ***различных*** арифметических или алгебраических действий (а не только какого-либо одного, как это делается обычно, например, при определении умножения $a \cdot b = a + a + a + \ldots + a$). Это позволяет в ИД создавать действия гораздо более сложной структуры, чем это обычно принято, за счет включения в их определения множества самых разных действий[3].

Четвертое:

И, наконец, для обеспечения дальнейшего свободного развития понятия **действие**, в ИД допускается возможность **составления** вновь определяемого моно действия $\mathcal{D}$ из тех или иных ранее определенных, известных действий различной кратности. В этом случае действие $\mathcal{D}$ будет являться некой функцией **f** и от самих этих действий и от их кратностей:

$$\mathcal{D} = f(n\alpha, m\beta, p\gamma).$$

В такой записи монодействие $\mathcal{D}$ приобретает структуру, и оказывается составленной из действий α, β и γ с кратностями, соответственно m, n и p.

Все эти приемы в совокупности позволяют придавать любому вновь определяемому действию форму бинарного, несмотря на «не бинарность» формального вида его определения, а также, несмотря на многократность вхождения в него чисел a и b, и многократность использования в алгебраической структуре различных алгебраических операций.

---

[2] Конечно, этот приём не нов, и в явном или неявном виде уже используется в самой арифметике. Например, умножение, $a \cdot b$ считается *бинарным* действием над числами a и b. Хотя его определение в развернутом виде: $a \cdot b = a + a + \ldots + a$ - есть многократное сложение одного и того же числа, и в таком виде имеет форму не бинарного, b-арного действия.

[3] В этом смысле теперь выражение «$a \chi (a \beta a) \ \ldots \ ) \gamma a$» вполне допустимо считать *монодействием*. Для этого нам пришлось постулировать, что действие над числами *может иметь различные части:* χ, β, γ (а не только состоять многократно из *одной* какой-либо части: или только χ, или только β, или только γ), т.е. может быть создано из действий разных сущностей. Например, в случае с умножением: $a \cdot b = a + a + \ldots + a$, его структуру определяет только одно действие α = „+", но повторенное (b - 1) раз.

В свете сказанного выражение a+ab+b, например, вполне допустимо считать бинарным действием, обозначая его символом υ (если отвлечься от того, что числа a и b входят многократно в данное выражение, а именно дважды, и что оно составлено не из одного, а сразу из двух действий - сложения и умножения):

$$a \, \underline{\upsilon} \, b = a + ab + b.$$

Аналогично, отвлекаясь от количества вхождений чисел a и b и от количества соединяющих их действий, следующие выражения также можно считать бинарными действиями, обозначая их соответственно α, β, γ :

$$\frac{a - b}{a + b} = a \,\alpha\, b, \qquad a^{b} \cdot b^{a} = a \,\beta\, b, \qquad \log_{(a+b)} \frac{a}{b} = a \,\gamma\, b.$$

Подобный прием абстрагирования от кратности данности некоей сущности в определении тех или иных объектов математики, не нов. Традиционно он используется при определениях весьма многих математических объектов.

Пример 1. Параллельный перенос не изменяет вектора $\vec{a}$, т.е. не изменяет его сущности, и потому, когда мы видим такую картину на плоскости (рис. 2), говорим, что имеем дело, не со множеством векторов, а с одним вектором $\vec{a}$**.** При этом производится абстрагирование от различий в «привязке» к системе координат (x, y, z), т.е. от векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ (копий много, а вектор один):

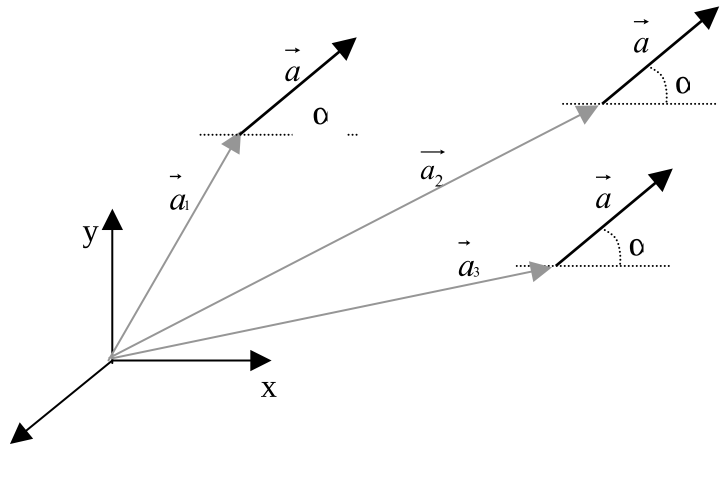


Рис. 2. Многократное представление *одного* вектора $\vec{a}$ на плоскости.

Пример 2. Определение периодической функции также предполагает абстрагирование от сдвига во времени:

$$f(x) = f(x + 2\pi n) = f(x + 2\pi m).$$

Из предложенного подхода и данного нами определения бинарному действию вытекает очень важная естественная и вполне конструктивная возможность *сравнения* (*отождествления)* двух действий:

Определение 6. *Два действия* α *и* β *равны на множестве U , если для всех чисел из U они дают равные результаты:*

$$\forall a, b \in U\big((a \,\alpha\, b = a \,\beta\, b) \leftrightarrow (\alpha = \beta)\big). \qquad (3)$$

В противном случае два действия α *и* β *не равны на множестве U, если:*

$$\exists a, b \in U\big((a \,\alpha\, b \neq a \,\beta\, b) \leftrightarrow (\alpha \neq \beta)\big). \qquad (4)$$

В заключение целесообразно еще раз напомнить и уже в окончательном виде сформулировать основные требования к формализации, принятые в ИД:

обозначать одними и теми же символами одни и те же алгебраические сущности (независимо от связного или свободного их существования), абстрагируясь соответственно от кратности их данности.

Основной и показательный квантрон

В отношении к *преобразующим* свойствам действий над числами целесообразно выделить два специальных типа действий. К первому типу следует отнести *собственно* действия в обычном, общепринятом смысле, т.к. они изменяют само число, его сущность, т.е. или изменяют его модуль, или его качество. Что формально записывается так: $\mathcal{D}(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$. Эта запись означает, что $\mathcal{D}$ подействовало на число a и получилось другое число b не равное исходному.

Для целей развития «технологии» ИД не менее важно выделить и более подробно обсудить второй не менее важный тип действия. К этому второму типу следует отнести не собственно действие, а некоторый его «аналог», т.к. с его помощью создается возможность оперировать не с сущностями чисел и действий, а с их кратностями. Эти действия являются как бы квазидействиями или «преддействиями». Они реально участвуют только в подготовительном формировании определений различных новых действий и выполняют при этом для тех или иных математических объектов копирующую, множительную функцию, не изменяющую их сущности. Числа и действия при таких преобразованиях остаются подобными, точнее, тождественно равными себе.

Итак, этой «операции» поручается специфическая «работа» не с сущностями чисел, а именно с их кратностями, т.е. с многократным бытием одной и той же сущности. Для конкретного осуществления и построения подобных квазиопераций в ИД вводится обобщенный «синтетический» принцип, называемый условно **рон-принципом**. Одной его составляющей является принцип **совмещения в одно целое разнонаправленных (полярных) по смыслу операций,** с последующим его повторением и использованием в качестве нового преобразования. Такой прием назовем *роновым*, хотя само название «рон» лишь частично отражает его смысл. Прием, называемый нами **Рон-принципом**, вводится как некий обобщенный принцип рекурсии (***рон** –аббревиатура латинского названия принципа естественного повторения операций: **r**epetitio **o**peratio **n**aturalis–«**ron**»*). Он состоит из трех составляющих:

- цикличности повторения какого-либо действия с целью увеличения его кратности (объема);
- совмещения в одно противоположных по смыслу элементарных операций;
- самоподстановки, самозамыкания (рекурсии), самокопирования.

Поясним более детально его суть. В целом он представляет собой прием, основывающийся на повторениях двух прямо противоположных по смыслу операций преобразования некоего объекта и последующего объединения, совмещения их в одно целое.

Пусть имеется некий объект a и способ α, который позволяет из a получить новый объект b. Этот способ - *первое преобразование*. Схематически его изобразим как на рис. 3. а):

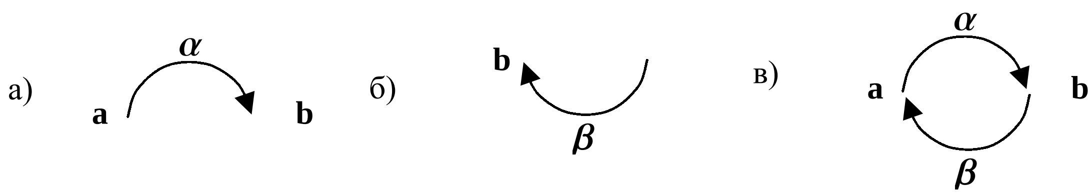


Рис. 3. Элементы и фазы замыкания

Вводим *второе преобразование*: объект b подставляем вместо a (т.е. *возвращаем* назад в один из операндов действия). Сам факт *подстановки* можно понимать, как некое иное новое преобразование β (см. рис. 3. б).

Конечно, преобразующие функции операций α и β качественно различны. Первое α – действительно преобразование, а второе β*–просто возвращение, копирование* полученного результата в исходный пункт без изменения. В операциях α и β наличествуют как бы сходственно-противоположные моменты. Действие α, преобразуя число, изменяет его сущность, зафиксированную в его определении. Действие β, наоборот, перемещает число из конечного пункта в начальный, не меняя его по существу. Объединяя эти два преобразования в одно, мы получаем новый преобразующий элемент. Он представляет собой один период нового «+ −» - единого преобразования, напоминающего вращение (рекурсия), но только дискретное (см. рис. 3. в)):

Такое преобразование объекта а уместно считать элементарным «квантом» самозамкнутого действия над **кратностями** чисел, включенных в структуру действия, который назовем **квантроном** и будем обозначать символом **@**.

Определение 7. **Квантрон @** есть способ изменения объема действия, состоящий в *одно*шаговом самозамыкании результата действия (подстановкой) в операнды.

Применительно к случаю с бинарными действиями над числами получается следующая картина. Имеем бинарное действие α над числами а и b, которое позволяет получить результат **c** (см. рис. 4. а)):

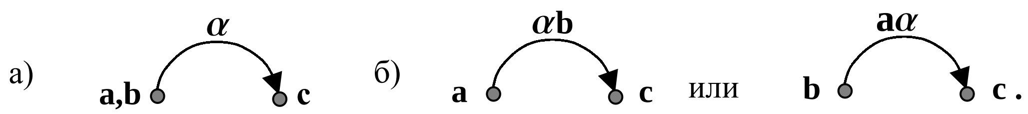


Рис. 4. Элементы и фазы замыкания в бинарном действии

В общем случае числа а и b у бинарных действий выполняют различные функции. Одно из чисел (любое) является объектом преобразования, а другое преобразующим элементом, т.е. выполняет функции самого действия. С учетом этого замечания схема преобразования будет выглядеть как на рис. 4 б). Тогда различных вариантов замыканий (т.е. различных определений квантронов) результата **c** в начальный пункт возможно несколько.

Определение 8. **Основной квантрон** –одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой результата действия в основание:

$$@^{1}(a \,\underline{\alpha}\, b) = (a \,\underline{\alpha}\, b) \,\underline{\alpha}\, b$$

Определение 9. **Показательный квантрон** –одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой результата действия в показатель:

$$\overrightarrow{@}^{1}(a \,\underline{\alpha}\, b) = a \,\underline{\alpha}\, (a \,\underline{\alpha}\, b)$$

Квантрон, определямый далее называется бирекурсивным, т.к. при его определении осуществляется двойная самоподстановка результата, т.е. в каждый из операндов.

Определение 10. **Бирекурсивный квантрон**–одношаговое увеличение объема действия самоподстановкой результата действия и в основание и в показатель:

$$\overleftrightarrow{@}^{1}(a \,\underline{\alpha}\, b) = (a \,\underline{\alpha}\, b) \,\underline{\alpha}\, (a \,\underline{\alpha}\, b)$$

Соответственно квантрон допускает возможность его повторного применения, и, тем самым, построения на его основе различных квантронных композиций:

1. Композиции основных квантронов:

$$\overleftarrow{@}^{0}(a \,\underline{\alpha}\, a) = a \,\underline{\alpha}\, a$$ -пустой квантрон

$$\overleftarrow{@}^{1}(a \,\underline{\alpha}\, a) = (a \,\underline{\alpha}\, a) \,\underline{\alpha}\, a$$ - квантрон

$$\vdots$$

$$\overleftarrow{@}^{n}(a \,\underline{\alpha}\, a) = \underbrace{\overleftarrow{@}\overleftarrow{@}....\overleftarrow{@}}_{n}(a \,\underline{\alpha}\, a) =$$

$$= \underbrace{\big((a \,\underline{\alpha}\, a) \,\underline{\alpha}\, a\big) \,\underline{\alpha}\, a .... \,\underline{\alpha}\, a}_{n+1}$$ - n-кратный квантрон

1. Композиции показательных квантронов:

$$\overrightarrow{@}^{0}(a \,\underline{\propto}\, b) = a \,\underline{\propto}\, b$$ -пустой квантрон

$$\overrightarrow{@}^{1}(a \,\underline{\propto}\, b) = a \,\underline{\propto}\, (a \,\underline{\propto}\, b)$$ - квантрон

$$\vdots \qquad \dots\dots\dots\dots$$

$$\overrightarrow{@}^{n}(a \,\underline{\propto}\, b) = \underbrace{\overrightarrow{@}\overrightarrow{@}\dots\overrightarrow{@}}_{n}(a \,\underline{\propto}\, b) =$$

$$= \underbrace{\propto \underline{a} \dots \left(\propto \underline{a}(a \,\underline{\propto}\, b)\right)}_{n+1}$$ - n-кратный квантрон

Иерархическая свертка, оперон

Как следует из предыдущего рассмотрения - квантрон является подготовительной операцией, которая является необходимым элементом, «квантом» в формировании нового действия над числом. Его назначение состоит в *размножении двух сущностей*: числа и действия. Это размножение является не совсем обычным, так как происходит внутри некоего единого образования (само в себе), постепенно при этом увеличивающегося в «размерах», но остающегося, несмотря на это в рамках одной и той же сущности действия и числа:

Номера шагов самозамыкания	Результат
0	$a \,\underline{\propto}\, a$
1	$(a \,\underline{\propto}\, a) \,\underline{\propto}\, a$
$\vdots$	$\vdots$
b	$\underbrace{\left((a \,\underline{\propto}\, a) \,\underline{\propto}\, a\right)\underline{\propto}}_{b+1}$

Примеры квантронного увеличения объемов действий:

Пример 1. Для сложения:

0	$a+a$
1	$a+a+a$
$\vdots$	$\vdots$
	$\underbrace{a+a+a\dots+a}_{b+1}$

Пример 2. Для умножения:

0	$a \cdot a$
1	$a \cdot a \cdot a$
$\vdots$	$\vdots$
	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots \cdot a}_{b+1}$

Каждое такое алгебраическое выражение $\underbrace{a \,\underline{\propto} \dots \left(a \,\underline{\propto}(a \,\underline{\propto}\, a)\right)}_{b}$ есть единое образование, которое с каждым актом рекурсии количественно увеличивается в размерах за счет увеличения кратности вхождения в определяемое действие числа а и связывания его копий в единое целое многократным повтором действия α. В заключение можно сказать*, что квантрон выполняет функцию увеличения «объема» действия α.*

Этот процесс увеличения объема, вообще говоря, может продолжаться сколь угодно долго. Однако известное диалектическое требование состоит в том, чтобы всякий такой процесс нарастания был стеснен (т.е. становление прекращено, остановлено). Этот прием является иллюстрацией опять-таки принципа соединения в одно двух противоположностей: расширения и стеснения, движения и покоя. Итак, процесс нарастания кратностей одних и тех же сущностей должен быть остановлен. Каким должен быть критерий этой остановки (стеснения)?

Исходное действие $a\underline{\alpha}b$ было бинарным. Мы имеем возможность, используя принцип дискретного вращения (подстановкой, самозамыканием), размножать его элементы. Выход из «дурной» бесконечности и незавершенности возникающего при этом процесса состоит в том, чтобы использовать для этого *второе число,* придав ему выполнение <u>двойной функции</u>. Оно должно стать объектом нового высшего действия β, то есть войти в его состав, а именно, в структуру вновь определяемого бинарного действия. Число должно стать указателем того конкретного процесса, с помощью которого определяется новое действие β на основе вполне определенного преобразования действия α. Следовательно, число b должно стать указателем сразу на несколько взаимозависимых моментов, определяющих структуру вновь определяемого действия. А именно, что

- квантрон применен b-2 раза,
- само действие при этом размножилось b-1 раз,
- кратность вхождения числа a в высшее действие при этом равна числу b.

Формально такая запись выглядит так (стрелка, в данном случае, указывает на адресацию подстановок):

$$a\,\underline{a+1}\,b = \underbrace{a\,\underline{a}....\big(\,a\,\underline{a}(a\,\underline{\alpha}\,a)\big)}_{b} = a\underline{\beta}b\,.$$

Ограничение роста объема действия значением числа b приводит к тому, что *кратность* числа a в структуре определяемого действия α оказывается равной b, а *кратность* самого действия α оказывается равной b-1.

Придание именно такого смысла всей этой процедуре и позволяет в итоге возвратить действию *бинарную форму*, которая на промежуточном этапе указанных преобразований временно утрачивается.

Таким образом, процедура построения высшего действия β оказывается «квантованной». Для ее получения используется принцип отрицания отрицания:

- для получения квантрона, путем объединения в *одно целое* двух полярных движений: одного направленного из начала в конец, а другого - из конца в начало (рекурсия);

- для стеснения количественного нарастания квантрона (где моменты нарастания и стеснения, движения и покоя также противоположны и также соединяются в одно).

На этом этапе обсуждения принципов построения исчисления действий мы приходим к целесообразности введения нового важнейшего понятия - **оперона** $\mathcal{P}(\alpha)$, как некоей *ограниченной* композиции квантронов, назначение которого состоит в преобразовании собственно самого действия.

О п р е д е л е н и е 11. **Опероном** $\mathcal{P}(\alpha)$ *назовем финитно ограниченную композицию квантронов:*

$$\mathcal{P}(aa = \underbrace{@@@...@}_{b-2}\,(\alpha)$$

Конкретизируя тип замыкания и кратность повторения квантронов числом b-2 , определим основные разновидности оперонов.

Определение 12. **Оперон основной** $\overleftarrow{\mathcal{P}}^1$ есть (b-2)-кратная *композиция* основных квантронов:

$$\overleftarrow{\mathcal{P}}^1(a\underline{\alpha}b) = \underbrace{@@....@}_{b-2}(a\ \underline{\alpha}\ b)$$

Определение 13. **Оперон показательный** есть (b-2)-кратная *композиция* показательных квантронов:

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^1(a\underline{\alpha}b) = \underbrace{@@....@}_{b-2}(a\ \underline{\alpha}\ b)$$

Определение 14. **Оперон бирекурсивный** есть (b-1)-кратная *композиция* бирекурсивных квантронов:

$$\overleftrightarrow{\mathcal{P}}^1(a\underline{\alpha}\,b) = \underbrace{@@@\ ...\ @}_{b-1}(a\,\underline{\alpha}\,b)$$

Такое определение оперона позволяет всякий раз <u>возвращать</u> вновь определяемому действию форму бинарного действия, от которой изначально приходится уходить квантронным преобразованием:

$$\mathcal{P}(a\,\underline{\alpha}\,b) = a\,\underline{\beta}\,b\,.$$

Происходит трансформация действия α, так что уже $\alpha \neq \beta$.

Для чего следует проводить ограничение композиции квантронов? Это позволяет получить новый математический объект - **оперон** - новую «операцию», но уже над <u>самими действиями</u>. Причем *оперон* в этом случае выступает в виде некоего нового, уже высшего «кванта» содержательного преобразования действия. Уместно этот квант условиться считать единичным и строго отличать от других преобразователей самих действий над числами.

Переходы от действия α к действиям $\underset{\longrightarrow}{\alpha+1}$ и $\underset{\longleftarrow}{\alpha+1}$ являются развернутыми определениями операторов повышения ступени действия на единицу (рекурсией в основание или в показатель). Эти виды «замыканий» позволяют получать новые действия, в том числе и от любого нового, постулированного как базового или некоего вновь только что полученного.

В развернутом виде: $$\overleftarrow{\mathcal{P}}^1(a\underline{\alpha}b) = a\ \underset{\longleftarrow}{\alpha+1}\ b = \underbrace{(((a\,\alpha\,a)\alpha a)\ldots)\alpha a}_{b} \qquad (5)$$

Аналогично определяется $\overrightarrow{\mathcal{P}}^1(a\underline{\alpha}b)$. В развернутом виде:

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^1(a\underline{\alpha}b) = a\,\underset{\longrightarrow}{\alpha+1}\,b = \underbrace{a\,\underline{\alpha}(a\,\underline{\alpha}\ldots(\underline{\alpha}(a\,\underline{\alpha}\,b)))}_{b}. \qquad (6)$$

Обратные действия и опероны обратных действий

В этой статье дается лишь краткая сводка определений, необходимых для изложения непосредственно следующего раздела о <u>ступенях</u> бинарных действий.

Обобщенный корень. *Число* $c = a\,\overline{\alpha}\,b$ $(a\,\overline{\alpha}\,b \equiv \sqrt[a]{b}^{\,\alpha})$ *называется обобщенным корнем* a*-й степени из* b *ступени* α, *если оно удовлетворяет условию:*

$$c\,\alpha\,a = (a\,\overline{\alpha}\,b)\,\alpha\,a = b\,.$$

Переход от прямого действия к обратному будем понимать как некий особый оперон, позволяющий построить новое действие, отличное от исходного и обозначать его символом $\mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{K}(\alpha) = \overleftarrow{\alpha}$ и $\alpha \neq \overleftarrow{\alpha}$.

Оперон корня $\mathcal{K}$ *есть преобразование прямого действия* α *в обратное* $\overleftarrow{\alpha}$, *осуществляемое по следующему правилу:*

- *На основе прямого действия* α *вводится уравнение, где в качестве неизвестного принимается основание бинарного действия:*

$$a_x \; \alpha \; b = c.$$

- *Результат решения этого уравнения записывается в виде:*

$$a_x = b \overleftarrow{\alpha} c = \sqrt[b]{c}^{\,\alpha}.$$

В оперонной форме это преобразование будет иметь вид: $\mathcal{K}(\alpha) = \overleftarrow{\alpha}$. Эта запись означает, что оперон $\mathcal{K}$ преобразует действие α в обратное действие $\overleftarrow{\alpha}$.

Обобщённым логарифм. *Число* $c = a \overrightarrow{\alpha} b = l\alpha g_b a$ *называется обобщённым логарифмом числа a по основанию* b *ступени* α, *если при этом для c выполняется следующее условие:*

$$b \, \alpha \, (a \overrightarrow{\alpha} b) = a$$

Оперон логарифма $\mathcal{L}$ *есть преобразование прямого действия* α *в обратное* $\overrightarrow{\alpha}$, *осуществляемое по следующему правилу:*

- *Вводится уравнение, где за неизвестное принимается показатель:*

$$a \, \alpha \; b_x = c.$$

- *Результат решения уравнения записывается в виде:*

$$b_x = c \overrightarrow{\alpha} a = l\alpha g_a c.$$

В опероновой форме это преобразование действия α будет иметь вид:

$$\mathcal{L}(\alpha) = \overrightarrow{\alpha}.$$

Ступень действия и β-ряд

Известно, что в целях «экономии мышления» гораздо удобнее «конструировать» натуральные числа, начиная с простейшего числа – единицы. Последовательно прибавляя его к себе самому, можно получить весь натуральный ряд. Деля далее элементы натурального ряда друг на друга, -получить рациональные числа и т.д. Но, при этом, как бы, всегда имеется в виду, что исходным, начальным числом была единица 1.

Аналогично, при «конструировании» <u>множества</u> действий также имеет смысл говорить о некотором исходном, базовом действии α. Применяя к нему различные опероны и их композиции, будем получать все новые и новые действия β , χ , δ. . . . Все они, так или иначе будут некими функциями от преобразования начального действия α. Они будут **ступенями** преобразований именно этого действия α.

Если оперон $\mathcal{P}$ преобразует действие α в действие β, т.е. $\mathcal{P}(\alpha)=\beta$, то исходное действие α будем называть *начальным,* а полученное действие β будем называть *производным.*

β-рядом назовем всякий ряд производных действий γ, δ, λ …, последовательно получаемый с помощью оперонов $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, и $\mathcal{K}$ из некоторого начального действия β**.**

Базовым действием *β-ряда* будем называть самое первое начальное действие β**.**

В современной математике, а именно арифметике, практически используется только одно базовое действие *-сложение*. Из него и строятся 6 остальных действий: вычитание, деление, умножение...и т.п.

Главным β-рядом назовем ряд производных прямых и обратных действий β, γ, δ, λ …, последовательно получаемых из **сложения**, как базового действия, с помощью оперонов $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, и $\mathcal{K}$.

Прямые действия главного β-ряда:

Новое обозначение	$a\ \underset{\to}{1}\ b$	$a\ \underset{\to}{2}\ b$	$a\ \underset{\to}{3}\ b$	$a\ \underset{\to}{4}\ b$	$a\ \underset{\to}{5}\ b$	...	$a\ \underset{\to}{\alpha}\ b$
Старое обозначение	**a+b**	$a \cdot b$	a^b	${}^{b}\!\cdot a$	...	...	...

Базовое действие   Производные действия

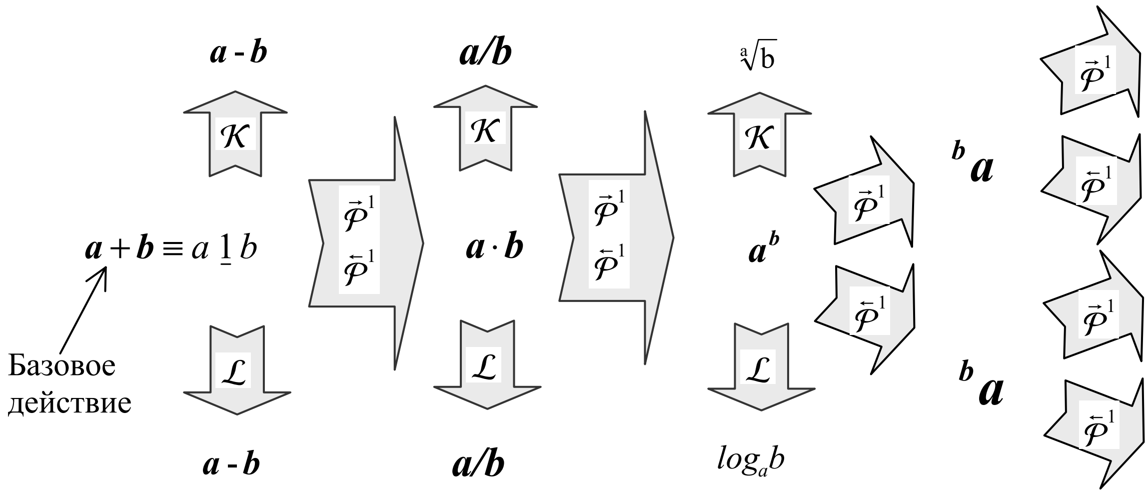


Рис. 4. Диаграмма известных действий *главного* β-ряда.

Рассмотрим, какими в общем случае могут быть ветви преобразования базового действия α: a $\underline{\alpha}$ b = c.

Во-первых, мы можем использовать два оперона повышения ступени. С замыканием результата бинарного действия в основание (см. рис. 5. а):

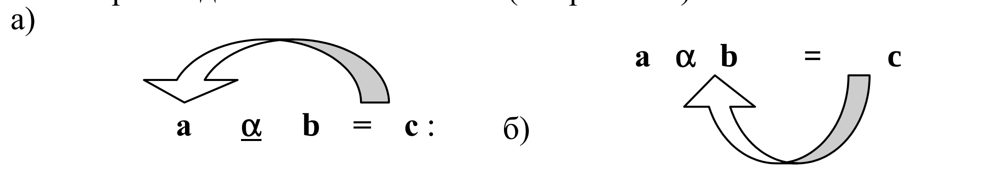


Рис. 5. Элементы и фазы замыкания в бинарном действии в основание а) и б).

Тогда получим:

$$\overleftarrow{\mathcal{P}}(a\ \underline{\alpha}\ b) = a\ \beta_1 b = \underbrace{((a\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a....\ \underline{\alpha}\ a}_{n}$$

и в показатель (см. рис. 5. б). Тогда получим:

$$\vec{\mathcal{P}}(a\ \underline{\alpha}\ b) = a\ \beta_2\ b = \underbrace{\underline{\alpha}\ a....(\ \underline{\alpha}\ a(a\ \underline{\alpha}\ a))}_{n}$$

Оба эти оперона повышают ступень преобразования действия, начиная со сложения. Принимая преобразующую «силу» оперонов $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ и $\vec{\mathcal{P}}$ за единицу, возможно, выразить эти записи так:

$$\overleftarrow{\mathcal{P}}(a\ \underline{\alpha}\ b) = a\ \beta_1 b = \underbrace{((a\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a)\ \underline{\alpha}\ a....\ \underline{\alpha}\ a}_{n} = a\ \underset{\longleftarrow}{\alpha+1}\ b$$

где стрелка внизу указывает на особенность примененного оперона, а запись $a\ \underset{\longleftarrow}{\alpha+1}\ b$ с прибавлением 1 говорит о том, что к действию α применен оперон $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ один раз. Аналогично:

$$\mathcal{P}(\mathrm{a}\ \underline{\alpha}\ \mathrm{b}) = \mathrm{a}\ \beta_2\ \mathrm{b} = \underbrace{a\ \underline{a} \ldots \left(a\ \underline{\alpha}(a\ \underline{\alpha}\ a)\right)}_{n} = a\ \underrightarrow{\alpha+1}\ b .$$

*Следует обратить внимание на то, что для выделения **прямых** действий используется подчеркивание снизу, для **обратных** –сверху.*

В общем случае бинарные операции некоммутативны:

$$\mathrm{a}\ \underline{\alpha}\ \mathrm{b} \neq \mathrm{b}\ \underline{\alpha}\ \mathrm{a}\ .$$

Поэтому, проводя рекурсию, возврат, подстановку результата в основание а или в показатель b, мы получим разные действия. Наиболее ярко это видно на примере обобщения степени в сверхстепень. Пусть $\mathrm{a}\ \underline{\alpha}\ \mathrm{b} = \mathrm{a}^{\mathrm{b}} = \mathrm{c}$. Подставим многократно с в основание:

$$((\mathrm{a}\underbrace{{}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{b}})^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\mathrm{b})}}_{\mathrm{b}} = \mathrm{c}_1 .$$

Полагая, что a=b , получим:

$$((\mathrm{a}\underbrace{{}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{a}})^{\cdot^{\cdot^{\cdot}})\mathrm{a}}}_{\mathrm{b}} = {}^{\mathrm{b}}\mathrm{a}\ . \qquad (7)$$

В выражении (7) показатель b называется показателем слабой сверхстепени [9,10,15]. Если же возврат (рекурсию) результата провести в показатель b, получим:

$$\mathrm{a}^{\underbrace{\left(\mathrm{a}^{\left(\cdot^{\cdot^{\cdot}\left(\mathrm{a}^{\mathrm{b}}\right)}\right)}\right)}_{\mathrm{b}}} = \mathrm{c}_1\ .$$

Полагая a=b и сокращая запись, получим:

$$\mathrm{a}^{\underbrace{\left(\mathrm{a}^{\left(\cdot^{\cdot^{\cdot}\left(\mathrm{a}^{\mathrm{a}}\right)}\right)}\right)}_{\mathrm{b}}} = {}^{\mathrm{b}}_{\cdot}\ \mathrm{a}\ . \qquad (8)$$

Формула (8) есть сильная (показательная) сверхстепень и по своим свойствам она резко отличается от свойств слабой (основной) сверхстепени ${}^{\mathrm{b}}\mathrm{a}$ (хотя обе эти операции появляются на одной и той же 4-й ступени обобщения). Учет различия рекурсий в основание или в показатель -один из ключевых моментов и с ч и с л е н и я, позволивший получить наиболее интересные результаты.

Всякий оператор (оперон)- это новый математический объект, выражающий идею о законе $\mathcal{P}$ преобразования одного действия α в другое β:

$$\mathcal{P}(\alpha) = \beta .$$

В процессе преобразования действия происходит преобразование и ступени действия. Введение понятия “*ступени действия*”, как абстрактно-количественной его характеристики, отражающей в своей формальной структуре основные моменты процесса обобщения базового действия, и является также важнейшим моментом и с ч и с л е н и я д е й с т в и й. По своему назначению “ступень действия” формально отражает в себе все основные моменты трансформации действия начальной ступени.

Если принять ступень действия сложения за единицу: $\mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{a}\ \underline{1}\ \mathrm{b}$ и условиться считать переход от сложения к умножению единичным, то умножение будет иметь вторую ступень: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{a}\ \underline{2}\ \mathrm{b}$. Использование одного и того же закона перехода от операции к операции, дает основание скачки ступени принимать за <u>единичные</u>. Однако скачки ступеней при различных видах рекурсии (основной и показательной) не будут тождественными - это первое. Второе, изменения ступени будут происходить и при переходах к обратным операциям данной ступени.

Проиллюстрируем эти высказывания на примере операции возведения в степень. Возведение в степень является операцией третьей ступени обобщения сложения: $\mathrm{a}^{\mathrm{b}} = \mathrm{a}\ \underline{3}\ \mathrm{b}$. От этого действия можно совершить четыре перехода: благодаря основной и показательной рекурсиям соответственно к слабой и сильной сверхстепени, и благодаря обратным оперонам, - к операциям корня и логарифма.

Действие 4-й ступени $\overset{b}{\cdot}a$ в терминах ступеней будет обозначаться так: $\overset{b}{\cdot}a = a\,\underset{\rightarrow}{\underline{4}}\,b$.

Правая часть этой записи показывает, что данное действие ${}^{b}a = a\,\underset{\rightarrow}{\underline{4}}\,b$ получено из предыдущего рекурсией в показатель (показывает стрелка). Записи $\log_b^a = a\,\overset{\rightarrow}{\overline{3}}\,b$ и $\sqrt[a]{b} = a\,\overset{\leftarrow}{\overline{3}}\,b$ показывают, что данные операции получены из действия 3-й ступени переходом к обратным действиям этих же ступеней (**у обратных действий подчеркивание и стрелки - сверху**).

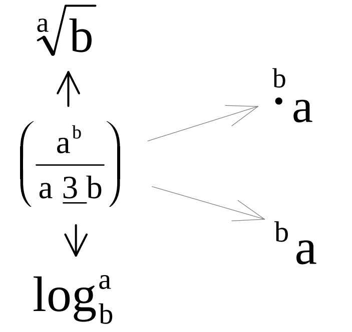


Рис. 6. Варианты преобразований прямого действия

Таким образом, мы принимаем гипотезу о том, что всякое действие с неоднородной структурой (т.е. с количественно различным вхождением чисел a, b и действий α, β, γ ... их соединяющих в одно целое) можно обозначать как действие некоей новой произвольно фиксированной ступени **μ:** $a\ \alpha\ b\ \beta\ a\ \gamma\ b\ \ldots\ \beta\ a\ = a\ \underline{\mu}\ b$.

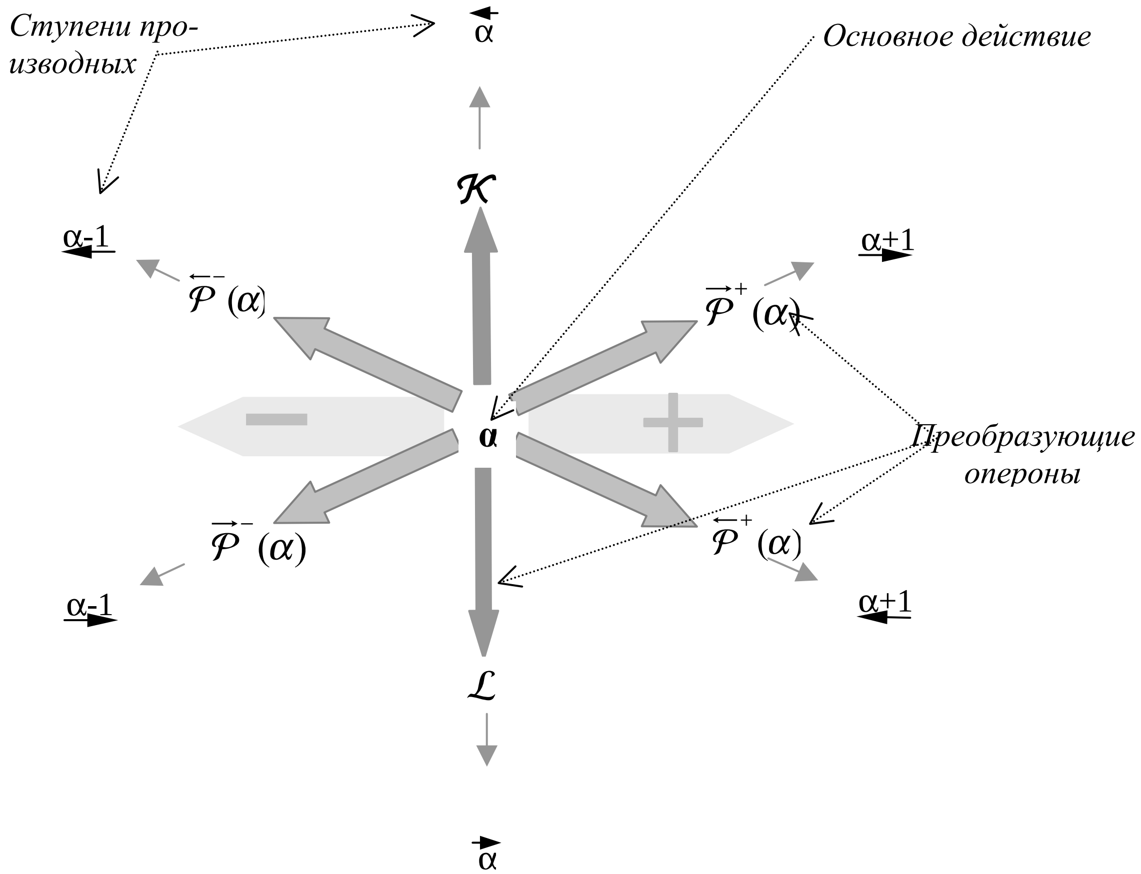


Рис.7. Диаграмма получения новых независимых друг от друга *производных* действий из *основного* действия α с помощью оперонов $\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$.

В этом случае со ступенью бинарного действия можно «работать» как с математическим объектом-числом: повышать и понижать ее, и выполнять с ней различные преобразования. В общем случае от действия ступени $\underline{\alpha}$, как показали наши исследования, возможны с помощью следующих оперонов:

$\overleftarrow{\mathcal{P}}^{+}(\alpha)$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}^{-}(\alpha)$ -повышения и понижения ступени по основанию;

$\overrightarrow{\mathcal{P}}^{+}(\alpha)$ и $\overrightarrow{\mathcal{P}}^{-}(\alpha)$ -повышения и понижения ступени по показателю;

$\mathcal{K}$- корня; $\mathcal{L}$- логарифма - выполнения, как минимум, 6-и независимых друг от друга переходов к новым действиям (см. рис. 7).

Варианты определений оперонов

В заключение этого краткого введения добавим, что выбранный способ обобщения бинарных действий не является единственно возможным, т.к. самозамыкание результата “c” в действии a $\underline{\alpha}$ b = c может осуществляться не только в основание или в показатель,

Табл. 1

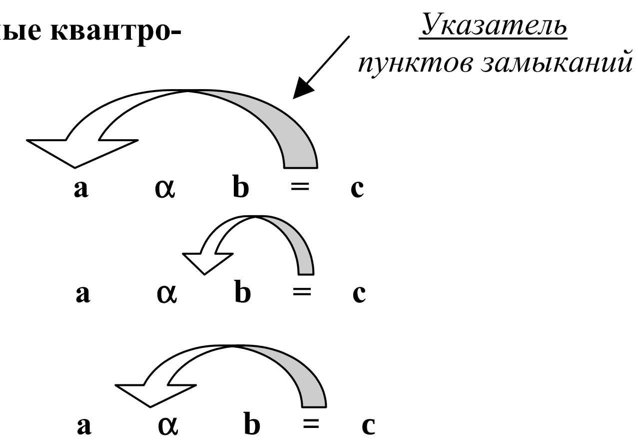
	Пункты замыка-	Варианты замыканий						
основание	**a**	. . .		. . .		. . .		. . .
ступень	α				. . .	. . .	. . .	
показатель	**b**		. . .	. . .			. . .	. . .
виды оперонов		$\overleftarrow{\mathcal{P}}$	$\overrightarrow{\mathcal{P}}$	$\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$	$\overset{s}{\mathcal{P}}$	$\overset{s}{\overleftarrow{\mathcal{P}}}$	$\overset{s}{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$	$\overset{s}{\overleftrightarrow{\mathcal{P}}}$

но одновременно и в основание и в показатель, и многими другими способами. В общем случае другие возможные варианты самозамыкания при образовании новых действий удобно изобразить схематично. Отметим следующие их модификации, при условии использования различных пунктов замыкания (см. табл. 1).

$$\overleftarrow{@},\ \overrightarrow{@},\ \overleftrightarrow{@},\ \overset{s}{@},\ \overset{s}{\overleftarrow{@}},\ \overset{s}{\overrightarrow{@}},\ \overset{s}{\overleftrightarrow{@}}\ .$$

Более подробно:

Монорекурсивные квантро-



$$\overrightarrow{@}(a\alpha b) = a\alpha(a\alpha b);$$

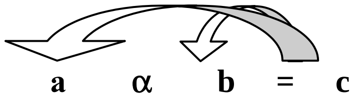
$$\overleftarrow{@}(a\alpha b) = \underline{(a\alpha b)}\alpha b$$

Рис8. а) Диаграммы получения различных квантронов

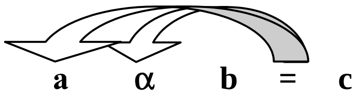
В ИД мы рассматриваем только опероны $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ и, отчасти, $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$. Хотя, конечно, *замыкание* можно мыслить и более дифференцированно, как *избирательно* упорядоченную структуру. В этом случае подстановка (самозамыкание) определенным образом последовательно упорядочена по адресам a, α, b. Тем самым в начале должно быть дано определение различным типам квантронов:

Бирекурсивные квантроны

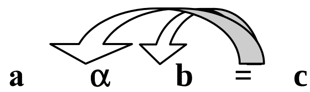
$$\overleftrightarrow{@}(a\alpha b) = (a\alpha b)\alpha(a\alpha b);$$



$$\overset{s}{\overleftarrow{@}}(a\alpha b) = (a\alpha b)\,\underline{(a\alpha b)}\,b;$$



$$\overset{s}{\overrightarrow{@}}(a\alpha b) = a\,\underline{(a\alpha b)}\,(a\alpha b);$$



Смешанный квантрон

$$\overset{s}{\overleftrightarrow{@}}(a\alpha b) = (a\alpha b)\,\underline{(a\alpha b)}\,(a\alpha b).$$

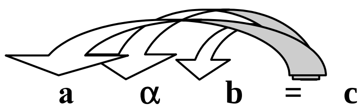


Рис. 8. б) Диаграммы получения различных квантронов

Проведенное нами исследование свойств действий в ИД касается только частного случая использования только полярных определений квантронов:

$$\overleftarrow{@}\,,\;\overrightarrow{@}\,.$$

Ряды действий в этом случае названы **Ронами**, а их исчисление - **Рон-исчислением**