

С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 16. Пентагоны да Винчи в арбелосе Архимеда

С восхищением и доброй памятью о великом ученом Леонардо да Винчи

Вместо введения.

Намедни 22 мая 2023 около 22-05 по киевскому времени наблюдал природно-астрономическое сияние да Винчи или пепельное свечение Луны. Недолго, минут пять. Потом Луна скрылась за тучкой. – В северо-западной части небосвода, где нынче садится солнце: от моего района – в направлении Белгородской области.

Необычная красивая картина, возникновение которой впервые описал Леонардо да Винчи (16 век): свечение происходит за счет солнечного света, отраженного от Земли.

Всё-таки гениальным был человек Леонардо да Винчи: художник, изобретатель, писатель, музыкант... Его великие дела говорят сами за себя.

Кроме прочего, он был увлечен исследованием пропорций, включая золотое сечение, ромбокубооктаэдр и др. Без лишних околонаучных спекуляций на эту тему, типа ввел термин "золотое сечение", все картины пронизаны "зашифрованным" ЗС и прочая нелепица.

Хорошо известен его знаменитый рисунок «Витрувианский человек», который иногда называют каноническими пропорциями <по закону квадратов>. Человек рассматривался в единении с окружающим миром с позиций четырех (!) стихий: земли, воды, воздуха и огня.

Часто используется как символ внутренней симметрии человеческого тела.

Но к золотому сечению, о чём часто голословно повторяют ортодоксальные приверженцы «золотого догматизма», вряд ли имеет отношение, поскольку не содержит в явном виде пентаграмму либо подобие углов в 36, 54 или 72 град.

А без них, как не расставляй ноги, ЗС и не пахнет.

Единственным критерием истины он считал опыт: «Пусты и полны заблуждений те науки, которые не порождены опытом». Появилось желание как-то зафиксировать лунное событие, вспомнив великого итальянского ученого и креативную личность.

Погружение в тему.

В работе [1] исследованы правильные пятиугольники (пентагоны) под общим углом зрения рассмотрения геометрических объектов при делении целого пополам – необходимого и обычно достаточного условия для формирования золотой пропорции.

Отталкиваясь от геометрического построения пентагона, в работе [2] предложено уникальное разбиение числовой действительной оси точками на интервалы с использованием степеней константы золотого сечения Φ^n и бинарного дополнения $D = 1011010110110101101011\dots$ к бесконечному слову Фибоначчи. Полученное разбиение дает максимально возможное число пропорциональных отрезков и более чем в три раза превышает альтернативное деление на равные части.

Построению пентагона в золотом арбелосе посвящена заметка [3].

Идея хорошая. Однако остается не ясным, какие свойства относятся к арбелосу общего вида, а какие обусловлены присутствием именно золотого сечения.

Вопрос принципиальный, и касается не только данной задачи. Он главенствует в сопоставлении логических категорий общего и частного.

Начинать, конечно, лучше с внешней оболочки или кекса целиком. А уже потом анализировать, какие дополнительные качества привносят частные случаи – изюминки.

Как ни странно, но часто бывает легче обосновывать именно положения общего характера, чем надрывать пупок над их конкретными проявлениями, выковыривая изюм.

Целью настоящей работы является построение пентагонов в арбелосе и установление их взаимных свойств, включая рассмотрение эксклюзивного золотоносного варианта.

В память о великом художнике и ученом назовем их пентагонами да Винчи.

Общие сведения.

Арбелос Архимеда связан с тремя коллинеарными точками A, B и C и представляет собой криволинейную треугольную область между тремя полукругами в одной полуплоскости, диаметрами которых являются AB, BC и AC .

То есть образуются возможные сочетания из трех по два.

Вполне допустимо оперировать и с полными окружностями. Так сподручнее.

Весьма удобными являются обозначения, принятые нами в более ранних работах:

$Ar = Ar(\widehat{O}, \widehat{O}_1, \widehat{O}_2)$ – арбелос, где литера r (*radius*) одновременно символизирует наличие в фигуре окружностей $(\widehat{O}, \widehat{O}_1, \widehat{O}_2)$ с их центрами (O, O_1, O_2) , литера A – Архимеда, который, который положил начало изучению данной фигуры;

$$c = AB = AC + CB = b + a;$$

$C = g(AB)$ – операнд золотого (*gold*) сечения прямолинейного отрезка $AB = AC + CB$ в

точке C с выполнением золотой пропорции $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \Phi$, где $\Phi = \phi^{-1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ – константа

золотого сечения, точки A и B – границы соответственно большего и меньшего отрезков.

Интересное. Правильными пятиугольниками нельзя замостить евклидову плоскость, но можно заполнить гиперболическую плоскость и сферу. К настоящему времени найдено 15 типов выпуклых пятиугольных паркетов, последний – в 2015 году.

Строго аналитически не доказано, но исследования с применением компьютеров указывают на то, что данная тема, похоже, закрыта.

Предварительные наброски.

В ранее рассмотренной конфигурации из трех правильных пятиугольников [1] перманентное движение-развитие их вершин формирует пару золотых спиралей, образующих пентагонально-золотой рог изобилия (рис. 1).

В настоящей работе задействованы шесть пентагонов.

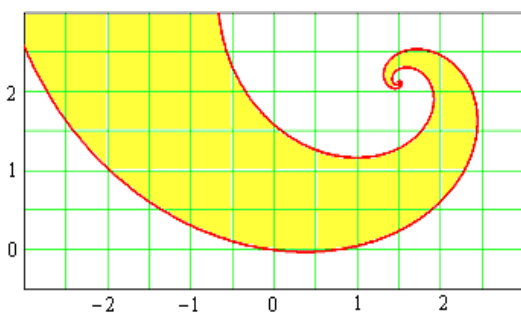


Рис. 1. Пентагонально-золотой рог изобилия

При желании можно больше, можно меньше. Главное – смыслы и общие взаимосвязи.

Три пентагона естественным образом вписываются в три окружности арбелоса.

Остальные фигуры нужно поискать и грамотно расположить так, чтобы они органично встраивались в арбелос, образуя с ним единую гармоничную структуру.

Для общего анализа нам пригодится следующая лемма, связанная с известными свойствами пентагона.

Лемма. Пентагон $p' = A'B'C'D'E'$ образован вращением правильного пентагона $p = ABCDE$ на 180 градусов вокруг своего центра O с последующим параллельным движением-переносом вдоль осей координат, тогда (рис. 2):

если $C' \in AE$ и $B' \in ED$, то $B = g(E'D')$, $B' = g(ED)$, $C = g(E'A')$, $C' = g(EA)$;
 если $D' = B$ и $B' = D$, то $O = g(O'C')$, $O' = g(OC)$, $C = g(DE') = g(BA')$, $C' = g(BE) = g(DA)$.

Доказательство. Поворот на 180 градусов меняет ориентацию пентагона с вершиной вверху на вершину внизу. Сдвиг его центра $O \rightarrow O'$ на величину y выравнивает фигуры по высоте, на величину x – совмещает вершины со сторонами $C' \in AE$, $C \in A'E'$ (рис. 2-а).

Без потери общности примем сторону пентагона = 1.

Треугольники $\triangle EB'C' = \triangle E'BC$ – равнобедренные с углом при основании 36° .

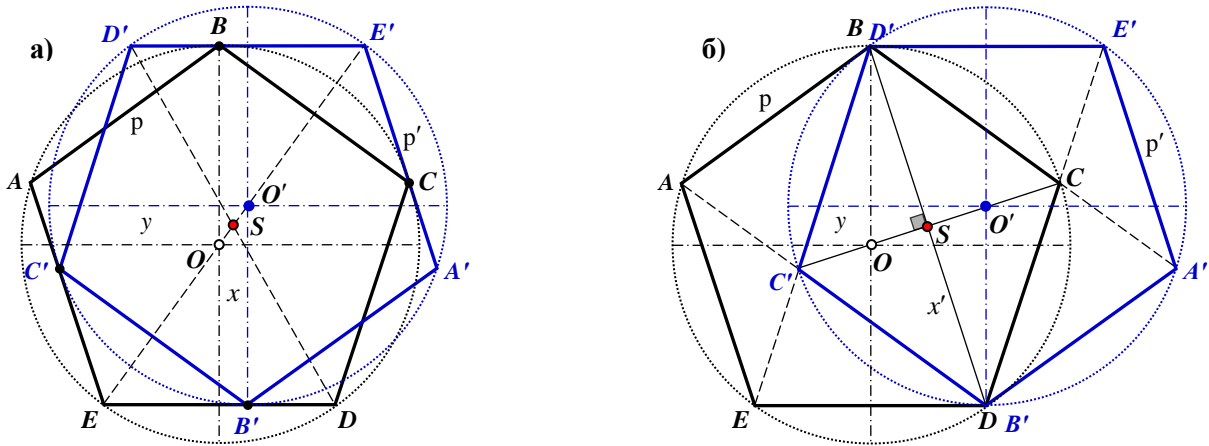


Рис. 2. Движение пентагона $p \rightarrow p'$ с образованием золотых пропорций:
 а) на сторонах пентагона; б) на продолжении сторон

По теореме синусов

$$EB' = EC' = B'C' \cdot \frac{\sin 36^\circ}{\sin 108^\circ} = \frac{s}{s\Phi} = \phi, \quad \text{где } s = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \sqrt{2-\phi}/2.$$

$$\text{Тогда } x = \phi - 1/2 = \phi^3/2; \quad y = \Delta x \cdot \operatorname{tg} 54^\circ = \frac{\phi^3}{2} \cdot \frac{\Phi}{\sqrt{1+\phi^2}} = \frac{\phi^2}{2\sqrt{1+\phi^2}}.$$

По сути, имеем преобразование симметрии пентагонов относительно точки S – середины межцентрового отрезка $OO' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Во втором случае (рис. 2-б) осуществляется аналогичное преобразование симметрии, которое отличается лишь величиной $x' = 1/2$, $OO' = \sqrt{x'^2 + y^2}$

Вершины C' и C симметричны относительно точки S и находятся на пересечении диагоналей пентагонов, которые этой точкой делятся золотым сечением.

Кроме того, $BCDC'$ – ромб, значит $BS = SD$ и $\angle BSC = 90^\circ$. Лемма доказана.

Далее перейдем непосредственно к арбелосу (рис. 3).

Пентагоны в арбелосе общего вида.

Рассмотрим произвольный арбелос $Ar = Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$.

Точка A совмещена с началом декартовых координат.

Без потери общности радиус большой окружности \hat{O} принят равным $1 = a + b$.

Пентагоны $p_m(P_{m0} \dots P_{m4})$ зададим вершинами P_{mn} , где $m = \overline{0, 5}$ – номера пентагонов, $n = \overline{0, 4}$ – их вершины, пронумерованные против часовой стрелки; дабы не загромождать чертеж, букву P можно не проставлять, ограничившись двумя цифровыми индексами.

В три окружности арбелоса $Ar = Ar(\widehat{O}, \widehat{O}_1, \widehat{O}_2)$ вписаны три пентагона (p_0, p_1, p_2) с начальными вершинами (P_{00}, P_{10}, P_{20}) на AB (рис. 3).

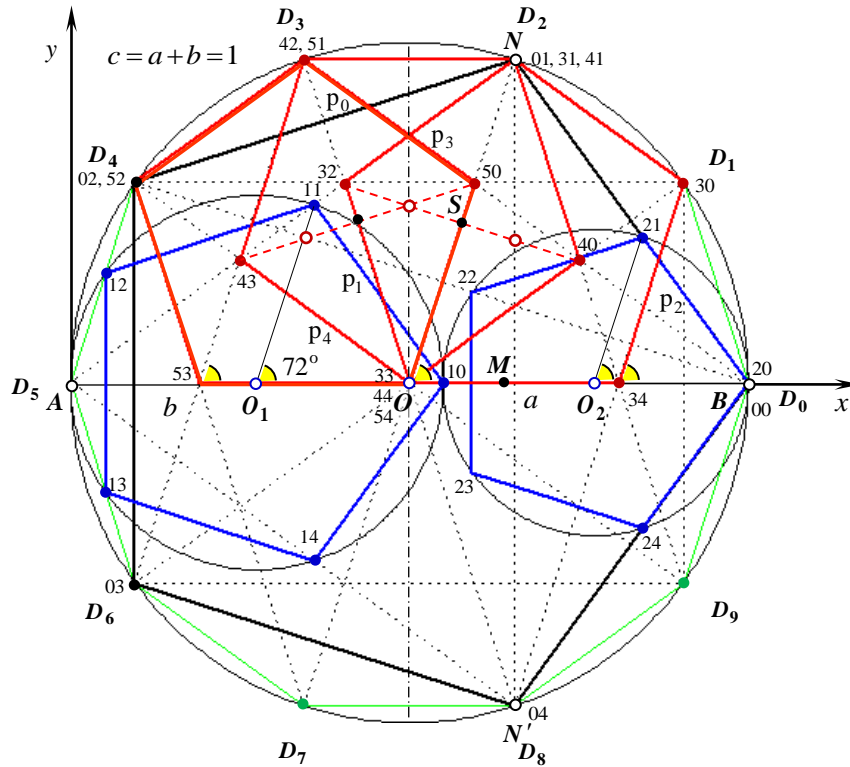


Рис. 3. Шесть пентагонов $p_0 \div p_5$ в арбелосе

Кроме того, в арбелос Ar вписаны три одинаковых пентагона $p_3 = p_4 = p_5$ (выделены красным цветом): третий с диагональю NO , $N = P_{01}$, четвертый – с вершинами $P_{41} = N$ и $P_{44} \equiv O$, пятый – симметричен третьему относительно вертикального диаметра \widehat{O} .

Пентагоны p_0, p_3, p_4, p_5 – жестко связаны с окружностью \widehat{O} , параметры пентагонов p_1, p_2 могут варьировать в зависимости от априорно задаваемого отношения a/b .

По свойствам арбелоса отрезки OO_2, O_1B имеют общую середину $M = 1 + (1 - a)/2$.

Координаты точек выражаются в комплексной форме.

Теорема (о шести пентагонах). Если в арбелос Ar вписаны шесть правильных пентагонов $p_0 \div p_5$, то верны утверждения:

- (I) стороны пентагонов $p_3 = p_4 = p_5$ равны ϕ , их диагонали соответственно – 1;
- (II) вершины $P_{30}, P_{52} \in \widehat{O}$;
- (III) вершины P_{11}, P_{32}, P_{43} – коллинеарные точки на AN ;
- (IV) пентагоны p_3, p_4 симметричны относительно точки S – середины ON .

Доказательство. Обозначим $z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ = \frac{\phi + i\sqrt{2+\Phi}}{2}$, где $i^2 = -1$.

Из рассмотрения пентагона p_0 следует $P_{01} = N = 1 + z = \frac{\Phi^2 + i\sqrt{2+\Phi}}{2}$.

Высота пентагона p_3 определяется ординатой точки N и равна $h_3 = \sqrt{2+\Phi}/2$.

Значит, его сторона равна ϕ , диагональ – единичному радиусу окружности \hat{O} , вершина P_{33} совпадает с центром O , вершина P_{30} лежит на окружности \hat{O} , радиус описанной окружности $R_3 = \frac{1}{\sqrt{2+\Phi}}$.

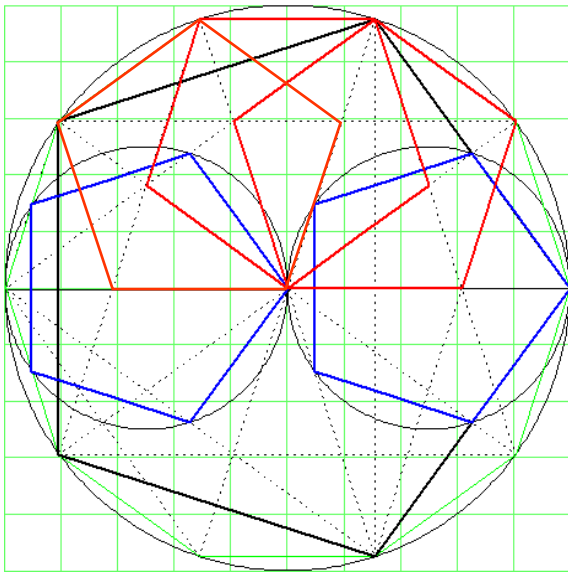
Находим другие вершины: $P_{34} = 1 + \phi = \Phi$, $P_{30} = \Phi + \phi \cdot z$, $P_{32} = P_{30} - 1 = \phi(1 + z)$, а также верхние вершины пентагонов p_1 и p_2 : $P_{11} = b(1 + z)$, $P_{21} = 2 - a(1 - z)$.

Точки P_{11}, P_{32}, P_{43} лежат на прямой AN , вершина P_{21} – на BN .

Для правильного пентагона p_3 точка пересечения $N'(P_{32}P_{33}, P_{30}P_{34})$ симметрична вершине P_{31} относительно стороны $P_{33}P_{34} \in AB$. Теорема доказана.

Для визуальной оценки взаимного расположения фигур, на рисунке 4 представлены два частных случая, в зависимости от отношения a/b .

$$\lambda = b/c = 0.5, \quad \delta = a/b = 1$$



$$\lambda = \frac{2+\phi}{4} \approx 0.655, \quad \delta = \frac{2-\phi}{2+\phi} \approx 0.528$$

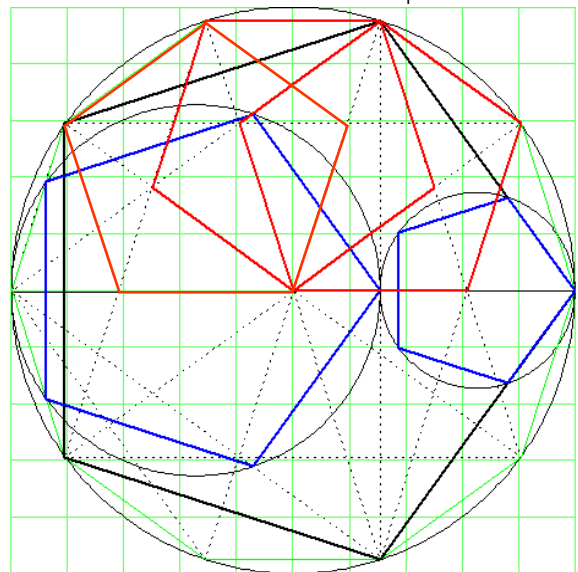


Рис. 4. Пентагоны в арбелосе: частные случаи

Пентагоны и декадон.

Точки $A, B, N, N' \in p_0$ являются одновременно вершинами правильного 10-угольника (декагона), вписанного в \hat{O} (рис. 3). Пронумеруем его вершины $D_0 \div D_9$, начиная с точки B .

Из сравнения углов следует, что все стороны пентагонов $p_3 = p_4 = p_5$ длиной ϕ являются сторонами декагона либо лежат на его диагоналях. – Вещи очевидные и хорошо видны на рисунке 3.

Кроме того, можно выделить ряд равнобедренных треугольников:

$$\begin{aligned} \Delta D_4 D_5 P_{53} &= \Delta D_1 D_0 P_{34}, & \Delta D_3 O P_{53} &= \Delta D_2 O P_{34}, \\ \Delta D_5 O P_{43} &= \Delta D_0 O P_{40}, & \Delta D_4 P_{43} P_{32} &= \Delta D_1 P_{40} P_{50}, \end{aligned}$$

$\Delta D_4 D_7 P_{50} = \Delta D_1 D_8 P_{32}$, а также ромбы $D_3 P_{50} O P_{43} = D_2 P_{40} O P_{32}$ – согласно лемме.

Любопытны также точки пересечения двух средних диагоналей декагона (через две вершины) с наибольшей диагональю, например, $P_{53}(d_{36}, d_{47}, d_{50})$, $P_{50}(d_{03}, d_{14}, d_{27})$ и другие.

В геометрии известна фигура: зоногон – центрально симметричный выпуклый многоугольник, имеющий четное количество сторон и равные противоположные стороны и углы. По Коксетеру любой $2m$ -угольный зоногон можно разбить на $m(m-1)/2$ ромбов.

То есть декагон ($m = 5$) разбивается на 10 ромбов. В частности, по пять ромбов типа $D_1 D_2 D_3 P_{50}$ и $D_1 P_{50} O P_{34}$.

А теперь заключительный штрих или вишенка на торте...

Пентагоны да Винчи в золотом арбелосе.

Точки $P_{11} = b(1+z)$ и $P_{32} = \phi(1+z)$ совпадают (узловая точка G), если $b = \phi = a/b$ и/или $a = \phi^2 = \Phi^{-2}$, то есть в золотом арбелосе (рис. 5).

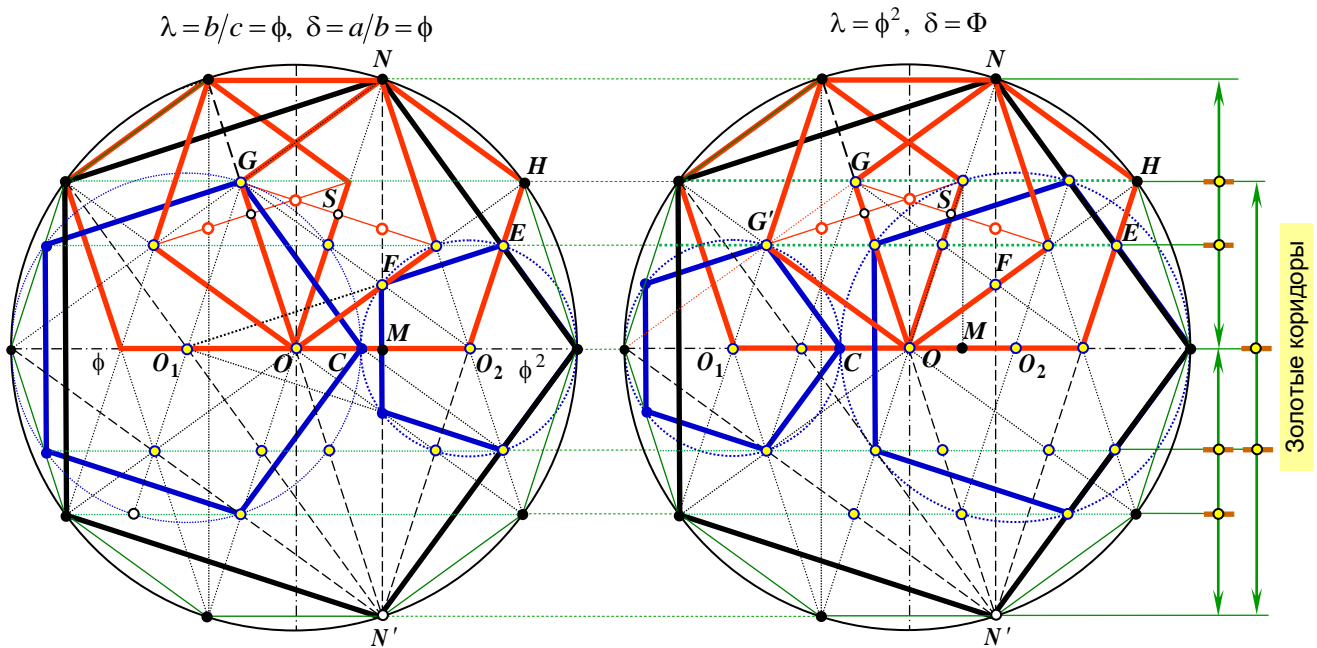


Рис. 5. Шесть пентагонов да Винчи в золотом арбелосе

При этом $M = 1 + (1 - \phi^2)/2 = \Phi^2/2$. Абсцисса точки $x_N = \frac{1-a}{2} = \frac{\phi}{2}$, ордината $y_N = \frac{\sqrt{4-\phi^2}}{2}$ – при пресечении с окружностью $\hat{O}: x^2 + y^2 = 1$.

Значит, точка N лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $OO_2 = P_{33}P_{34} = \phi$, а вершина пентагона $P_{21} \in P_{30}P_{34}$ или $E \in HO_2$.

Точки $P_{11} = b(1+z)$ и $P_{43} = \phi^2(1+z)$ совпадают (узловая точка G'), если $b = \phi^2 = b/c$. То есть тоже в золотом арбелосе, только при смене местами окружностей $\widehat{O}_1, \widehat{O}_2$. Пентагоны равны $p_3 = p_4$ и симметричны относительно точки $S = c + z/2$ – середины ON .

Золотые коридоры.

Помимо золотых сечений (ЗС) в каждом из пентагонов, имеет место множество ЗС между самими пентагонами и характерными точками золотого арбелоса.

В частности, на оси абсцисс $O_1 = g(AO) = g(O_2A)$, $O = g(O_1C) = g(O_2O_1)$, $C = g(AB) = g(O_2O) = g(O_1O_2)$, $O_2 = g(OB)$ и др., а по вертикали можно выделить золотые интервалы-коридоры (см. рис. 5), в которых любая секущая делится ЗС, например: $G = g(AN)$, $E = g(NB)$, $O_2 = g(N'H)$ и т.д. – Воистину кладезь золота высшей пробы.

В заключение приведем примеры формирования логарифмических (изогональных) спиралей за счет вращения правильных фигур: треугольника, квадрата и пентагона (рис. 6).

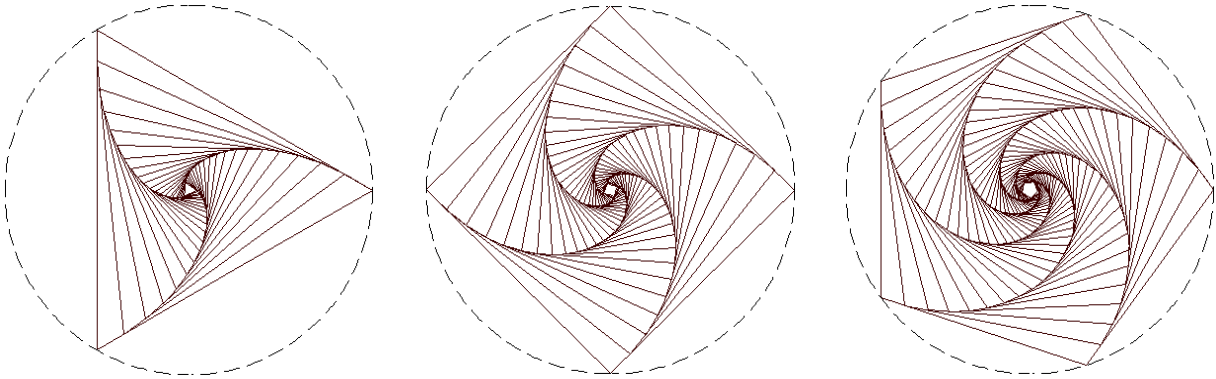


Рис. 6. Образование логарифмических спиралей при вращении правильных фигур

Для удобства представления, изменение декартовых координат вершин правильного n -угольника выразим в комплексной форме:

$$Z = A^m \cdot (\cos \omega + i \cdot \sin \omega),$$

$$\omega = m \cdot \varphi + \frac{2\pi k}{n}, \quad A = \frac{\cos \pi/n}{\cos(\pi/n - \varphi)}, \quad k = \overline{0, n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

где A^m – изменяющийся радиус описанной окружности, φ – угловая координата начальной вершины n -угольника.

Вместо выводов.

Пятиконечная звезда (пифагорейский пентакль, пентаграмма), построенная на базе пентагона, широко распространена во всём мире, как важный идеологический и/или религиозно-мистический символ. Причем весьма спорный и неоднозначный.

Идеограмма символизирует одновременно безопасность и бога войны. Означает свет, знания, совершенство и заодно является эмблемой военных армий, террористов, оккультистов и т.п. В перевернутом виде – печать Бафомета (дьявола).

Пятиконечная звезда часто проецируется на человека с вытянутыми в стороны руками и расставленными ногами: Витрувианский человек Леонардо да Винчи, рисунок-пентаграмма Агриппы – немецкого алхимика, оккультиста (16 век).

Число пять имеет разные проявления-ассоциации:

- пять человеческих чувств;
- пятый элемент (сущность) в алхимии и натурфилософии – эфир, квинтэссенция;
- пятая колонна – нарицательное наименование вражеской агентуры либо группировки, которая, тайно или явно противодействует основной политике государств;
- пять точек Лагранжа в орбитальной задаче трех тел;
- пятое число Фибоначчи;
- пять правильных многогранников (доказательство в «Началах» Эвклида, а также следует из теоремы Эйлера – сумма числа граней и числа вершин на 2 больше числа ребер)...

В одном символе слились воедино: защита и нападение, силы добра и зла.

Смотрю на пагубные последствия военных действий и в одночасье на красивый лунный феномен, которому миллионы лет, и думаю: каким же никчемным может быть человек в своих примитивно-злых устремлениях и действиях.

Творцы и разрушители... Первые несут свет, добро, правду. Другие проповедуют насилие, зло, обман, а их помыслами руководит дьявол – главный враг праведности.

Невольно вспоминаются аналогии с физическим принципом причинности, резонирующим эффектом бабочки, возвратным законом бумеранга и т.п.

Малюсенькие колебания-воздействия крылышек способны вызвать лавинообразный эффект, повернув бумеранг в лоб его запустившего.

Надо полагать, создатели-новаторы противоракетных средств обязательно синтезируют «Бумеранг да Винчи», способный разворачивать и возвращать реактивно-летательные аппараты назад в "родную гавань". Сродни искусственному интеллекту (ИИ), о котором часто пишет уважаемый Андрей Никитин – один из авторов АТ и мой давний соавтор ряда совместных публикаций.

Человек всегда боится чего-то нового, неизвестного. Никитин задает вполне резонный вопрос: когда начинать бояться ИИ? – В обозримой перспективе ничего не грозит. Пока же происходит подмена понятий, и речь идет лишь об отдельных технологиях и/или элементах, отдаленно напоминающих некоторые свойства ИИ. Не более того. – Создадут стандарты и протоколы безопасности, введут лицензирование, аудит и т.п. Всё будет в полном порядке.

Либо движение вперед и прогресс, либо регресс и деградация...

Когда-то боялись паровых машин. Кибернетика прошла путь от лженауки до панацеи.

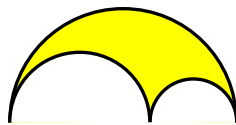
Угрозу людям несет не искусственный, а богом данный (до конца непонятно зачем) природный естественный разум-интеллект. – «Надейся на Господа всем сердцем твоим, и не полагайся на разум (?) твой» (Притч. 3:5).


Опасаться нужно импульсивных необдуманных действий, ошибок и лжи своих правительств, с надеждой на их трезвый коллективный интеллект и мудрые решения. – Окей.

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 9. Пентагоны // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28329, 09.02.2023. – <https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165233.htm>.
2. Василенко С.Л. От пентаграммы к уникальному разбиению числовой оси на пропорциональные отрезки // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26809, 03.12.2020. – URL: <https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164561.htm>.
3. Hiroshi Okumura. A note on regular pentagons arising from the golden arbelos // Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, 2016, 5, 75-77. – <https://geometry-math-journal.ro/pdf/Volume5-Issue2/1.pdf>.



© Василенко, 2023 
Украина, Харьков,
город на 5 холмах