С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 13. Дифференциальные уравнения

Не множь сущности без необходимости
(принцип "бритвы Окама")

Вместо вступления.

После довольно продолжительного бума вокруг золотого сечения (ЗС) на страницах АТ произошло некоторое затишье.

Или перед бурей-всплеском, или в силу известных жизненных обстоятельств.

Звучали даже мнения, что тема исчерпала себя.

По нашему глубокому мнению, осознание подлинного смысла ЗС в природе только вначале своего пути. Ученые с головой окунулись в глубины математического омута, всё больше погружаясь в исследования подводной части айсберга знаний, забыв про его вершину. Она вроде как на виду, и потому не столь интересна.

Напрасно. Чрезмерная сложность – отнюдь не показатель и мерило качества и/или мастер-класса. Сегодня, как и прежде, в большой цене никогда не стареющие, наглядные и доступно-простые формы моделей.

Они всегда востребованы. Их достоверность не вызывает мучительных сомнений и глубоких размышлений.

Конечно, бритва Окама в науке – не жесткое правило, однако, весьма полезное действие-пожелание. Идея преимущества простых решений существует ещё со времен Аристотеля. Позже переформулировано в закон достаточного основания.

«Всё можно упрощать до тех пор, пока это возможно, но не более» (А.Эйнштейн).

Если уже есть приемлемое простое объяснение, не обязательно выдумывать новое.

ЗС вырастает из "коротких штанишек".

Сфера исследований и применимости ЗС постоянно расширяется.

Речь идет не об архитектуре или живописи, где чаще всего ЗС искусственно «притягивается за уши». Нарочито вытаскивается даже оттуда, где его никогда не было. Якобы оно способствует повышению значимости исследуемого объекта. – Своего рода пятиугольный знак качества. Таким путем осуществляется фальшивое внедрение ЗС в несвойственные ему процессы и объекты. В основной массе без должных проработок и доказательств.

Мы также не про разные "обобщенные золотые сечения", которые включают другие, менее значимые числа, никак не связаны с фундаментальной константой ЗС. Модальность их якобы золотого обобщения – с приставкой "псевдо". Феномену ЗС навязывается девальвация и превращение в бессистемную и неорганизованную смесь малосодержательных текстов-образов, которые искажают или затуманивают суть золотого сечения, либо приписывают ему мнимые смыслы и значения.

Имеется в виду реальная прикладная направленность ЗС с подлинным содержанием, на строгой доказательной базе.

Круг таких задач постоянно расширяется.

Серьезных работ в этом направлении становится всё больше.

От панегирических дифирамбов Луки Пачоли с божественной окраской – к действительно настоящему проявлению ЗС, с гарантированной идентификацией.

Наконец, добрались и до дифференциальных уравнений, в которых определяются не числа, как в алгебраических уравнениях, а функции.

Математический аспект задачи.

Имеется система из двух дифференциальных уравнений, в которых равны производные и обратные функции:

$$y_1'(x) = y_2^{-1}(x), \qquad y_2'(x) = y_1^{-1}(x). \tag{1}$$

Представим функции в степенной форме $y_1 = ax^{\alpha}$, $y_2 = bx^{\beta}$.

Находим и приравниваем производные и обратные функции:

$$\begin{cases} a\,\alpha x^{\alpha-1} = (x/b)^{1/\beta} \\ b\,\beta x^{\beta-1} = (x/a)^{1/\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} \alpha-1=1/\beta, \\ \beta-1=1/\alpha, \end{cases} \to \ \underline{\alpha=\beta}, \quad \alpha^2-\alpha-1=0, \quad \alpha_{1,2}=(\Phi,-\phi); \\ \begin{cases} a\,\alpha=(1/b)^{1/\alpha} \\ b\,\alpha=(1/a)^{1/\alpha} \end{cases} \quad \frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^{1/\alpha} \to \ \underline{a=b}, \end{array}$$

где $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 = \phi^{-1} = 1+\phi$ – константа золотого сечения.

Таким образом, $y_1 = y_2 = y$ – одна и та же функция, которая эквивалентна системе уравнений (1), равно как и системе n уравнений в работе [1].

А вот решений, в отличие от [1], в зависимости от значений $\alpha_{1,2} = (\Phi, -\phi)$ всё-таки два, которые обозначим как y и Y:

$$\underline{\alpha_1=\Phi}, \quad a\Phi = 1/a^{\phi}, \quad a^{\Phi}=\phi, \quad a=\phi^{\phi}, \quad y=\phi^{\phi}x^{\Phi} \quad \text{или} \quad y=(\Phi-1)^{\Phi-1}x^{\Phi}.$$

$$\underline{\alpha_2=-\phi}, \quad \Phi\to-\phi: \ Y=(-\phi-1)^{-\phi-1}x^{-\phi}=(-\Phi)^{-\Phi}x^{-\phi}=(-1)^{-\Phi}\phi^{\Phi}x^{-\phi}=e^{-\Phi\pi i}\cdot\phi^{\Phi}x^{-\phi};$$

$$Y'=Y^{-1}=(-\Phi)^{-\Phi}\phi\,x^{-\phi-1}=(-1)^{-\phi}\phi^{\Phi+1}x^{-\Phi}=e^{-\phi\pi i}\cdot\phi^{\Phi+1}x^{-\Phi}.$$

Функция $\phi^{\phi}x^{\Phi}$ – действительная, функция $(-\Phi)^{-\Phi}x^{-\phi}$ – комплексная, и обе удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=y^{-1}$ (рис. 1). Частное y/y' определяет диагонали золотых прямоугольников с отношением сторон 1:Φ.

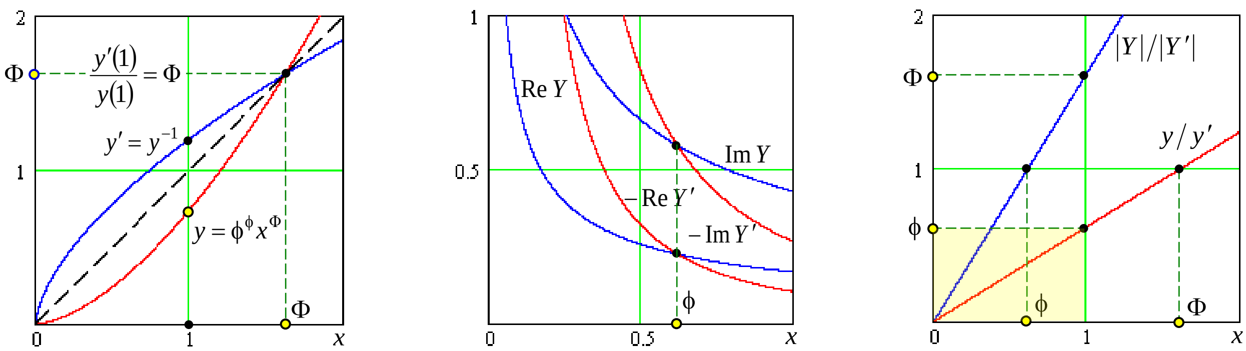

Рис. 1. Графики функций $y=\phi^{\phi}x^{\Phi}$ и $Y=(-\Phi)^{-\Phi}x^{-\phi}$

Напомним, что каждое действительное число, включая отрицательное, представляется точкой на комплексной плоскости, лежащей на действительной оси.

Возведение в степень сводится к изменению модуля этого числа и повороту радиус-вектора этой точки на некоторый угол, зависящий от показателя степени.

Каким бы ни был показатель степени, для него всегда найдется свой угол поворота.

В нашем случае угол поворота задается векторами единичной длины:

$$(-1)^{-\Phi} = e^{-\Phi\pi i} = \cos(-\Phi\pi) + i\sin(-\Phi\pi) \approx 0{,}362 + i\,0{,}932\,;$$

$$(-1)^{-\phi} = e^{-\phi\pi i} = \cos(-\phi\pi) + i\sin(-\phi\pi) \approx -0{,}362 - i\,0{,}932\,.$$

Для фиксированного аргумента $x = t$ отношения реальных частей, мнимых частей и модулей равны между собой:

$$\frac{\operatorname{Re} Y}{-\operatorname{Re} Y'} = \frac{\operatorname{Im} Y}{-\operatorname{Im} Y'} = \frac{|Y|}{|Y'|} = t\,\Phi\,.$$

На наш взгляд, несмотря на присутствие мнимых чисел во втором решении, оно выглядит вполне убедительно и реалистично. Во всяком случае, хорошо корреспондируется с геометрией золотого сечения на евклидовой плоскости.

Доверяй, но проверяй.

В приложении приведен анализ решения [1] с поправкой на устранение ошибки.

Как видно, система уравнений замыкается на одну единственную функцию.

По аналогии с системами регулирования с обратной связью, роль которой играет последнее уравнение, замыкающее систему на первое из них.

Можно было это и не делать. – Зато потренировались, а заодно вспомнили числа Фибоначчи.

Итак, что имеем в сухом остатке...

1) Система уравнений избыточна. Можно обойтись максимум двумя уравнениями, чтобы воссоздать целостную картину и дать общую установку-формулировку: найти степенную функцию, производная которой равна обратной функции. Найденная функция является решением для всех $y_n(x)$ независимо от их количества.

2) В результате допущенной ошибки получено неверное решение. Чтобы в этом убедиться, достаточно было довести само решение до конца с получением искомой функции и провести элементарную проверку на равенство производной и обратной функции.

3) Потеря одного значимого корня квадратного уравнения $(-\phi)$, а с ним и эффектного решения в области функций комплексного переменного.

Итог с минорным звучанием. Второй раз обращаемся к американскому профессору математики (первый в работе [2]) в связи с его задачами на золотое сечение, и оба раза наблюдаем, к сожалению, неверные решения.

В подобных случаях у нас на работе говорят «Горе от ума». На что следует ответ (по В.Черномырдину, 1993) «Хотели как лучше, а получилось как всегда». – I wanted the best turned out as always.

Это, конечно, лирика. Мы искренне признательны профессору Michael Penn за его неутомимую энергию в расширении-популяризации математических знаний, включая настойчивые стремления найти новые области приложения золотого сечения.

Кто ничего не делает, тот не ошибается, а кто не ошибается, не продвинется дальше (Пауль Винклер, Три тысячи хороших мыслей, 1685). – К слову, никакого отношения к «Пословицам русского народа» Вл. Даля не имеет. По этой теме сочно высказался известный русский писатель-афорист Л.Крайнов-Рытов «На ашипках учемся».

Неточности – дело поправимое. Главное – оригинальные и содержательные идеи.

Но не цепляться якорем и мертвой хваткой за свои наработки, если они в корне неверные, – по примеру одного из авторов АТ, описанном, например, в работе [3].

Одна императрица в слове из трех букв делала четыре ошибки: слово "ещё" она по традиции писала на старославянском, и получалось "исчо", – как слышится, так и пишется.

Но именно по её распоряжению русский язык с 1768 года стал официальным в науке и преподавании.

«Ашипка ашипке рознь»… Окей.

To be continued...

Приложение.

Анализ решения Michael Penn

Рассмотрим систему из n дифференциальных уравнений:

$$y_k'(x) = y_{k+1}^{-1}(x), \quad y_n' = y_1^{-1}(x), \quad k = \overline{1, n-1}. \qquad (1)$$

Функции представим в степенной форме $y_i = a_i x^{r_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Их производные и обратные функции соответственно равны:

$$y_i' = a_i r_i x^{r_i - 1}, \quad y_i^{-1} = (x/a_i)^{1/r_i} \qquad (2)$$

и подставляются в систему (1):

$$r_1 - 1 = \frac{1}{r_2}, \ \ldots, \quad r_{n-1} - 1 = \frac{1}{r_n}, \quad r_n - 1 = \frac{1}{r_1}; \qquad (3)$$

$$r_2 = \frac{1}{r_1 - 1}, \quad r_3 = \frac{r_1 - 1}{2 - r_1}, \quad r_4 = \frac{r_1 - 2}{3 - 2r_1}, \quad r_5 = \frac{2r_1 - 3}{5 - 3r_1}, \ \ldots, \quad r_n = \frac{F_{n-2} r_1 - F_{n-1}}{F_n - F_{n-1} r_1} = \frac{r_1 + 1}{r_1},$$

где $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ – числа Фибоначчи.

Из последнего равенства определяем:

$$(F_{n-1} + F_{n-2}) r_1^2 = F_n r_1 + F_n \quad \to \quad r_1^2 = r_1 + 1 \quad \to \quad r_1 = \Phi = \phi^{-1} = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2.$$

Есть ещё второй корень $r = -\phi$.

После последовательной подстановки в (2), начиная со степени $r_1 = \Phi$, находим

$$r_n = 1 + 1/r_1 = 1 + \phi = \Phi, \quad r_{n-1} = 1 + 1/r_n = 1 + \phi = \Phi, \ \ldots \ \to \quad r_i = \Phi,$$

то есть все степени r_i равны константе золотого сечения.

С учетом равенства $\Phi - 1 = 1/\Phi = \phi$ возвращаемся к основной системе (1)–(2):

$$a_k \Phi x^{\phi} = x^{\phi} \big/ a_{k+1}^{\phi} \quad \to \quad a_k \Phi = a_{k+1}^{-\phi},$$

$$a_n \Phi = a_1^{-\phi} \quad \to \quad a_n = \phi\, a_1^{-\phi}.$$

Ошибочно определены степени a_i^{ϕ}, правильно $a_i^{-\phi}$. – Далее естественно неверно.

Проследим процесс формирования коэффициентов a_i на примере $n = 3$.

Много индексов, поэтому для удобства восприятия обозначим $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$:

$$a\Phi = b^{-\phi},\quad b\Phi = c^{-\phi},\quad c\Phi = a^{-\phi} \to c = \phi a^{-\phi};$$

$$b\Phi = \left(\phi a^{-\phi}\right)^{-\phi} = \phi^{-\phi} a^{\phi^2} \quad \to \quad b = \phi^{\phi^2} a^{\phi^2};$$

$$a\Phi = \left(\phi^{\phi^2} a^{\phi^2}\right)^{-\phi} = \phi^{-\phi^3} a^{-\phi^3} \ \to \ a = \phi^{\left(1-\phi^3\right)/\left(1+\phi^3\right)} = \phi^{\phi};$$

$$b = \phi^{\phi^2} \phi^{\phi^{\phi^2}} = \phi^{\phi^2} \phi^{\phi^3} = \phi^{\phi},\quad c = \phi\,\phi^{\phi^{-\phi}} = \phi\,\phi^{-\phi^2} = \phi^{\phi}.$$

Таким образом, все функции равны: $y = \phi^{\phi} x^{\Phi}$.

Проверяем равенство $y' = y^{-1}$:

$$y' = \phi^{\phi}\Phi x^{\Phi-1} = \phi^{-\phi^2} x^{\phi};$$

$$y^{-1} = x^{\phi} \Big/ \left(\phi^{\phi}\right)^{\phi} = \phi^{-\phi^2} x^{\phi}.$$

Итак, действительная функция $y = \phi^{\phi} x^{\Phi}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = y^{-1}$, что согласуется, например, с энциклопедией целочисленных последовательностей [4], где упомянут параметр $\phi^{\phi} \approx 0{,}7427\ldots$

M.Penn находит $a = \phi^{-\Phi^2}$, $y(x) = \phi^{-\Phi^2} x^{\Phi}$, но не проверяет правильность решения.

Литература:

1. Michael Penn. A PHinominal differential equation. 21 February 2023. – https://www.youtube.com/watch?v=YyiiSg76DT4.

2. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 11. Бесконечные круги // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28357, 26.02.2023. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165248.htm.

3. Василенко С.Л. Доверяй, но проверяй (окончание) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.24364, 23.03.2018. – URL: https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163658.htm.

4. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – https://oeis.org/A335020.