

ЗОЛОТАЯ ПРОПОРЦИЯ В АРБЕЛОСЕ. Часть 2

Второе золотое сечение в арбелосе

Продолжаем новое изложение золотой пропорции в арбелосе общего вида, с выработкой единой концептуальной линии и последовательно-доказательного анализа.

Заметим, что деление статьи на отдельные связанные части – это не блажь. Разбиение на структурные единицы способствует улучшению построения и систематизации текста, помогает расставить приоритеты и точнее выстроить смысловую логику в каждой части.

В некотором смысле они независимы, в целом же тесно взаимосвязаны.

Напомним основные обозначения и вспомогательные параметры:

$\hat{O}(A)$ – окружность (дуга) с центром в точке O , проходящая через точку A , при этом допускается перечисление в скобках других возможных точек, OA – радиус окружности;

$P(AB, CD, \dots)$ – точка на пересечении прямых AB, CD и возможно других фигур, указанных в скобках, включая иные прямые и окружности; скобки могут быть опущены;

$S = g(AB)$ – операнд деления прямолинейного отрезка AB точкой S в золотом (*gold*)

отношении $\frac{AS}{SB} = \Phi$, в том числе внешним образом, где $\Phi = \phi^{-1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ – константа золотого сечения (ЗС).

На диаметре AB полуокружности $\hat{O}(A)$ выберем произвольную точку C , и на отрезках $AC = b$, $CB = a$, как на диаметрах, проведем полуокружности $\hat{O}_1(A), \hat{O}_2(B)$. Три

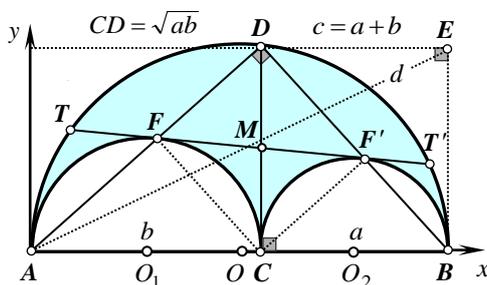


Рис. 1. Геометрическая фигура арбелоса $Ar = Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$

полуокружности образуют геометрическую фигуру – арбелос (рис. 1).

Из точки C восстановим перпендикуляр $CD \perp AB$.

Через точки $F(AD, \hat{O}_1), F'(BD, \hat{O}_2)$ проведем прямую, которая пересекает окружность \hat{O} в точках T, T' и отрезок CD в точке M .

Арбелос вместе с основными линиями будем обозначать $Ar = Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$, где литера r (*radius*) одновременно символизирует наличие в фигуре окружностей, литера A – Архимеда, который положил начало изучению данной фигуры.

По построению $CFDF'$ – прямоугольник, точка M (*middle*) делит его диагонали пополам;

$k = \sqrt{ab}/c$ – угловой коэффициент (тангенс угла наклона) диагонали AE прямоугольника размером $AB \times CD$.

Второе золотое сечение в арбелосе

Теорема 2. На диаметре \hat{O} арбелоса $Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$ построен равнобедренный треугольник $\triangle ABL$ высотой $2 \cdot CD$, через точки $V_1(AL, \hat{O}_1), V_2(BL, \hat{O}_2)$ проведены две окружности $\hat{A}(V_1), \hat{B}(V_2)$, а к ним общие касательные $t(x), -t(x)$, которые пересекают линию CD в точках K, G соответственно (рис. 2). Тогда $G = g(KD)$.

Доказательство. По построению $L = c/2 + i \cdot 2\sqrt{ab}$.

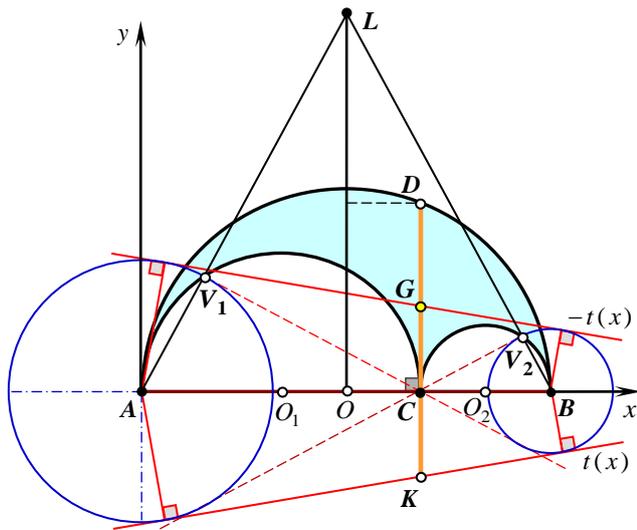


Рис. 2. Второе золотое сечение в арбелосе: $G = g(KD)$

Прямая $AL(x) = \frac{2\sqrt{ab}}{c/2}x = 4kx$.

Определим координаты (x, y) точки V_1 при пересечении прямой $AL(x)$ и \widehat{O}_1 -полуокружности $x^2 + y^2 = bx$:

$$(4kx)^2 = bx - x^2, \quad x = b \cdot \xi, \quad \xi = \frac{1}{1 + 16k^2};$$

$$V_1 = b\xi(1 + i \cdot 4k).$$

Соответственно $V_2 = c - a\xi(1 - i \cdot 4k)$.

Радиусы окружностей:

$$R = b\sqrt{\xi}, \quad r = a\sqrt{\xi}.$$

С учетом равенства $c^2 - (b - a)^2 = 4k^2c$ уравнение касательной

$$t(x) = \frac{(R - r)x - cR}{\sqrt{c^2 - (R - r)^2}} = \frac{(b - a)x - bc}{2kc\sqrt{5}}.$$

Значения касательных при $x = b$ равны $\pm t(b) = \mp \sqrt{ab/5}$.

То есть $CK = CG = CD/\sqrt{5}$, $KD = CD(1 + 1/\sqrt{5})$, откуда следует $G = g(KD)$.

Теорема доказана.

Две другие касательные проходят через точку C ортогонально боковым сторонам треугольника $\triangle ABL$. Но для золотой пропорции этот замечательный факт не пригодился.

На рисунке 3 приведены результаты компьютерной графики для некоторых отношений $\lambda = b/c$ между диаметрами полуокружностей $\widehat{O}_1, \widehat{O}$.

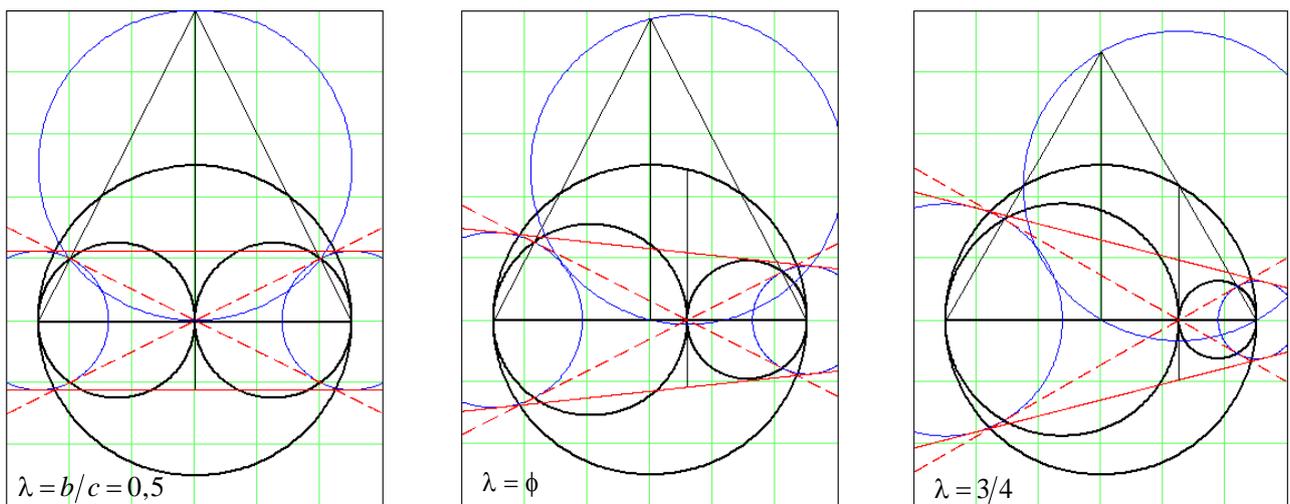


Рис. 3. Примеры построения второго золотого сечения в арбелосах различных λ

Создается впечатление, что в золотом арбелосе окружности $\hat{A}(V_1)$ и $\hat{D}(O)$ касаются. Хорошо бы, для гармоничности общей картины. Но нужно проверить.

Без потери общности положим $c = 1$, тогда $b = \phi$, $a = \phi^2$.

Прямая, $AD(x) = \sqrt{ab}/b \cdot x = \sqrt{\phi}x$ соединяет центры этих окружностей и пересекает их в точках:

$$\hat{A}(V_1): x^2 + (\sqrt{\phi}x)^2 = (\phi\sqrt{\xi})^2 \rightarrow x_A = \sqrt{\frac{\phi^3}{1+16\phi^3}} \approx 0,22230;$$

$$\hat{D}(O): (x-\phi)^2 + (\sqrt{\phi}x - \phi\sqrt{\phi})^2 = (1/2)^2 \rightarrow x_D = \phi - \sqrt{\phi}/2 \approx 0,22496 > x_A.$$

То есть между окружностями присутствует зазор. Мало заметный, но всё-таки есть. Можно найти условия точного касания, но это уже не столь интересно.

Таким образом, золотой арбелос не имеет особых предпочтений в рассмотренной задаче, разве что отношение радиусов равно $R/r = \phi$.

На рисунке 3 (справа) $\lambda = 3/4$, $b/a = 3 \rightarrow r = a/2$, $R = b/2$.

Третье золотое сечение в арбелосе

Золотая пропорция относится к золотому отношению на продолжении отрезка CD .

Теорема 3. В арбелосе $Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$ восстановлены два перпендикуляра: серединный к CD , пересекающий \hat{O} в точках Q и Q' , а также $DP \perp DT'$ с точкой $P(DP, QQ')$, из которой проведена окружность $\hat{P}(T')$, пересекающая линию CD в точках E и K (рис. 4). Тогда $D = g(CE)$, $C = g(DK)$.

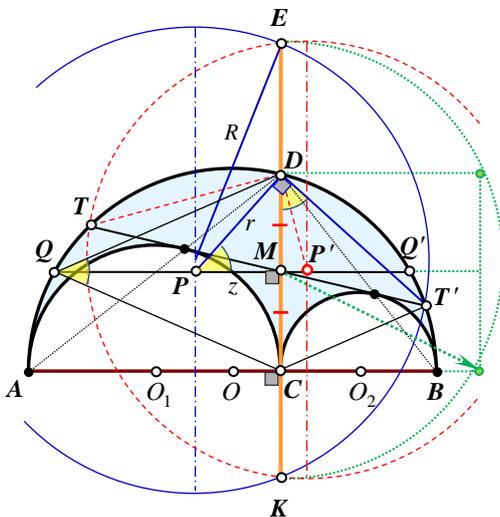


Рис. 4. Третье золотое сечение в арбелосе: $D = g(CE)$, $C = g(DK)$

Обозначим: $z = PM$, $r = PD$, $R = PT' = PE$.

Известно [1], что $DT = DC = DT' = \sqrt{ab}$.

По теореме Пифагора находим:

$$r^2 = (DM)^2 + z^2 = ab/4 + z^2;$$

$$(PT')^2 = r^2 + (DT')^2 = ab/4 + z^2 + ab = 5ab/4 + z^2;$$

$$(EM)^2 = R^2 - z^2 = 5ab/4;$$

$$EC = EM + MC = \sqrt{5ab}/2 + \sqrt{ab}/2 = \sqrt{ab}(\sqrt{5} + 1)/2 = CD \cdot \Phi.$$

По построению $CK = ED$, значит, $KD = CD \cdot \Phi$.

Аналогичные выводы следуют для построения $DP' \perp DT$ с точкой $P'(DP', QQ')$, из которой проведена окружность $\hat{P}'(T)$. Теорема доказана.

Анализ результатов

Теорема 3 непосредственно вытекает из обобщенной модели золотого роста [2], только для частного случая в привязке к параметрам арбелоса.

Никаких дополнительных априорных условий относительно точек P, P' , как это делается в работе [3], не требуется. Золотое отношение определено и доказано.

А вот далее можно продолжать анализ.

В частности, точки P и P' имеют замечательное свойство.

Помимо центров окружностей, воспроизводящих золотые отношения, они являются также центрами описанных окружностей треугольников $\triangle CDQ$ и $\triangle CDQ'$.

Из доказательства теоремы 3 это не следует. Мы гладко прошли последовательность параметров z, r, R , но не получили ни одной зависимости для их аналитического определения. Только парные связи. Поэтому нужны дополнительные зацепки.

Треугольник $\triangle CDQ$ равнобедренный по построению, а точка D является центром описанной окружности $\triangle CTT'$, поэтому имеют место равенства углов:

$$\angle CDT' = 2 \cdot \angle CTT' = 2 \cdot \angle CQM = \angle CQD.$$

Кроме того, равны углы $\angle DPP' = \angle CDT'$ – с перпендикулярными сторонами.

Отсюда следует: $PQ = PD = r$ – радиус описанной окружности $\triangle CDQ$.

Красивая закономерность.

Ордината точки Q равна $CD/2 = \sqrt{ab}/2$. Абсцисса определяется из уравнения окружности \hat{O} : $x^2 + y^2 = cx$, то есть $x^2 + ab/4 = cx$, откуда $x = \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{2}$.

Тогда высота треугольника $h = QM = b - x$, радиус $r = \frac{h^2 + ab}{2h}$ и остальные параметры $z = \sqrt{r^2 - ab/4}$, $R = \sqrt{r^2 + ab}$.

Дополнительно отметим, что равнобедренные треугольники подобны $\triangle DCT' \sim \triangle DCQ$ с равными углами при вершине, откуда следует пропорция $\frac{CT'}{DC} = \frac{DC}{CQ}$.

То есть DC – "дважды" среднегеометрическое $CD = \sqrt{CA \cdot CB} = \sqrt{CQ \cdot CT'}$. – Отлично!

На рисунке 5 приведены результаты компьютерной графики для некоторых отношений $\lambda = b/c$ между диаметрами полуокружностей \hat{O}_1, \hat{O} .

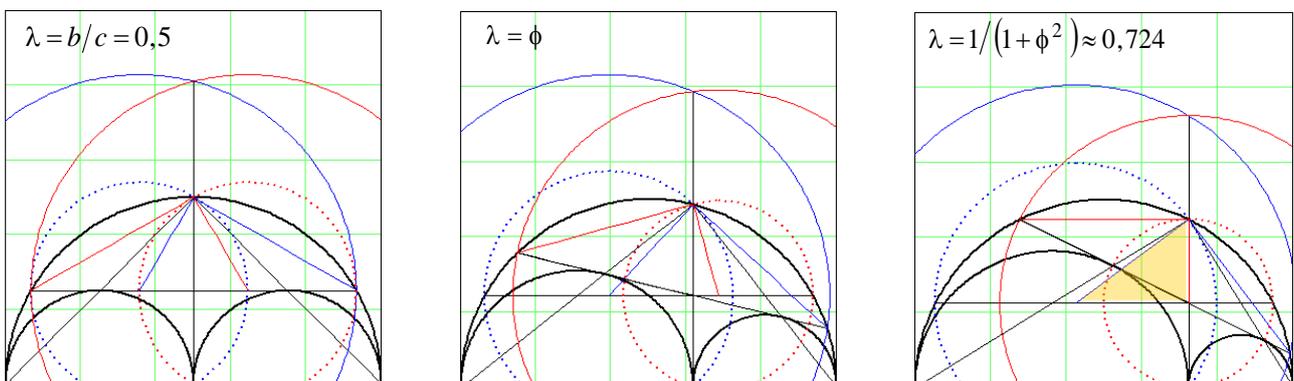


Рис. 5. Примеры построения третьего золотого сечения в арбелосах различных λ : цветом выделен египетский треугольник

Золотой арбелос $\lambda = b/c = \phi$ особенным образом здесь не отличается.

Зато примечателен другой золотиносный случай $\lambda = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} = \frac{1}{1+\phi^2} \approx 0,724$ или

$\delta = a/b = \phi^2$ с такими характерными свойствами:

- $TD \parallel AB$, $DP' \perp AB$, $P' \equiv M$;
- $\frac{R'}{r'} = \sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{ab}}{r} = \frac{6}{5}$, $\frac{\sqrt{ab}}{r'} = 2$;
- $\triangle DPM$ – египетский прямоугольный треугольник с соотношением сторон 3:4:5;
- прямоугольник размером $AB \times CD$ линией CD делится на два золотых

прямоугольника с соотношением сторон $\frac{\sqrt{ab}}{a} = \Phi$ и $\frac{\sqrt{ab}}{b} = \phi$.

Заключение

Итак, три теоремы, три разных золотых сечения в арбелосе общего вида.

Сложность доказательств, на наш взгляд, сведена до минимума.

Доверие к моделям высокое. Так или иначе, арбелосова копилка пополняется новыми знаниями. В том числе золотой пробы.

В первом ЗС особо отличился золотой арбелос ($c/b = b/a = \Phi$) с присущей красивой графикой, благодаря золотым пропорциям, которые внесут в геометрический объект свою неповторимую гармонию.

Довольно неожиданно, но презентабельно проявил себя другой золотиносный частный случай $\delta = a/b = \phi^2$, – в первом и третьем ЗС.

К нему следует присмотреться. Полагаем, это далеко не полный перечень его, несомненно, полезных свойств.

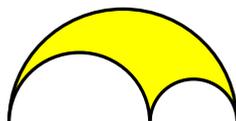
Присоединяйтесь. Творческая лаборатория открыта... – Окей.

Литература:

1. Василенко С.Л., Ковалев А.Н. Золотые пропорции в арбелосе. Часть 1 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28420, 07.04.2023. – <https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165291.htm>.

2. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 12. Обобщенная модель золотого роста // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28412, 01.04.2023. – <https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165283.htm>.

3. Nguyen Ngoc Giang, Le Viet An. Golden sections and Archimedean circles in an Arbelos // International J. of geometry. 2018, 7(2), 25-36. – <https://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2018/10/25-36.pdf>.



© ВаСиЛенко, 2023 
Украина, Харьков