

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 7. Японская храмовая геометрия. Комбинационные сочетания окружностей

Если написанное вчера
не выглядит бессмыслицей сегодня,
то будет стоящей вещью и завтра...

Арсенал-копилка золотых построений постоянно пополняется.

Среди них есть простые и усложненные варианты.

Дело не в трудоемкости черчения. Сегодня это не проблема.

Данные задачи показывают, прежде всего, разнообразие геометрических форм и их сочетаний-комбинаций, приводящих к золотой пропорции.

Они могут, в частности, найти отражение в архитектурных изысканиях, применяться в исследовательских задачах, использоваться в школьных программах.

Наряду с этим поистине уникальные геометрические, алгебраические и числовые свойства золотой пропорции гипотетически могут выступать в качестве "застрельщика" формирования глобальных мировых процессов.

Великий Галилей говорил: «Философия написана в грандиозной книге Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики».

Как нам представляется, велика вероятность, что в спектакле сотворения мира значительная роль отведена именно золотой пропорции.

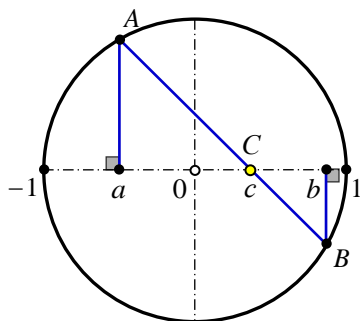
Один из таких упрощенных сценариев, например, описан в работе [1]. В ней представлена численно-игровая математическая модель возникновения макрокосмоса "из ничего". В основе модели лежит золотая константа – ядро генома мироздания.

«И отделил Бог свет от тьмы [солнечным золотым сечением]... а золото той земли хорошее; там бдолах и камень оникс» (Бытие, гл.1–2).

Как утверждал "железный" стоический С.Хокинг: «Фундаментальная тяга человечества к знанию – достаточное основание для продолжения поисков. И мы не удовольствуемся меньшим, чем полное постижение Вселенной, в которой мы живем» [2, гл. 3].

Но вернемся из космоса на нашу грешную Землю, продолжив исследование [3] с простой общей задачи о золотом делении радиуса круга [4, № 24].

Золотое сечение (ЗС) радиуса круга: общая форма.



Дана окружность с центром в начале координат.

Без потери общности её радиус равен 1.

Через две точки окружности $A(a, \sqrt{1-a^2})$ и $B(b, \sqrt{1-b^2})$ проведена хорда, которая пересекает диаметр в точке C .

Абсцисса c находится из уравнения хорды через две точки:

$$c = \frac{a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}}.$$

При заданном параметре c можно определить соотношение между a и b , например, с помощью электронно-вычислительной системы *WolframAlpha*:

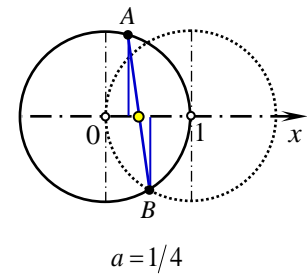
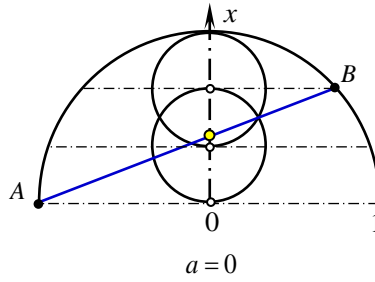
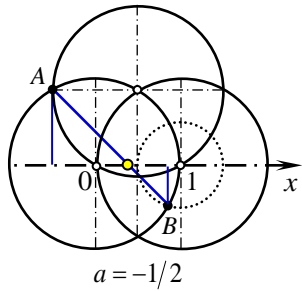
$$a = \frac{(1+c^2)b - 2c}{2cb - (1+c^2)} = \frac{b-s}{b \cdot s - 1}, \quad \text{где } s = \frac{2c}{1+c^2}.$$

Структурные сочетания окружностей

Если точка C делит радиус конкретно золотым сечением (ЗС) $\phi = \Phi^{-1} = (\sqrt{5} - 1)/2$, то $c = \phi^2$, $s = 2/3$ и

$$a = \frac{3b - 2}{2b - 3} \leftrightarrow b = \frac{3a - 2}{2a - 3}.$$

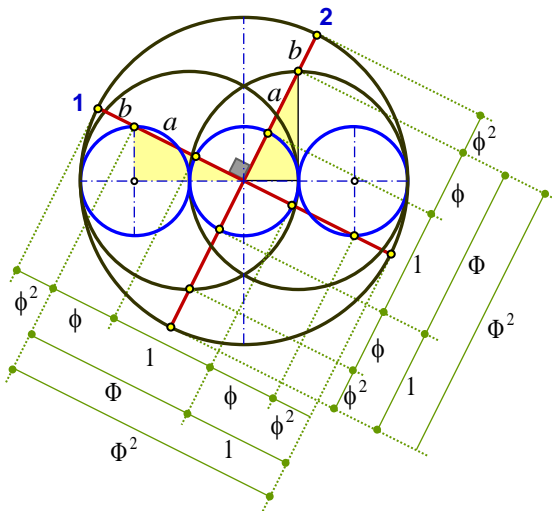
Примерные пары (a, b) , встречающиеся в построениях: $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$, $(0, \frac{2}{3})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.



Три круга в ряд с описанными окружностями.

Графическое изображение содержит три равных последовательно соприкасающихся круга радиусом r . Вокруг каждой пары описаны средние окружности радиусом $2r$, которые, в свою очередь, вписаны в большую окружность радиусом $3r$.

Проведены две принципиально разные, но взаимосвязанные перпендикулярные линии, которые соединяют центр с верхней и нижней точкой: 1 – соседних малых окружностей; 2 – пересекающихся средних окружностей.



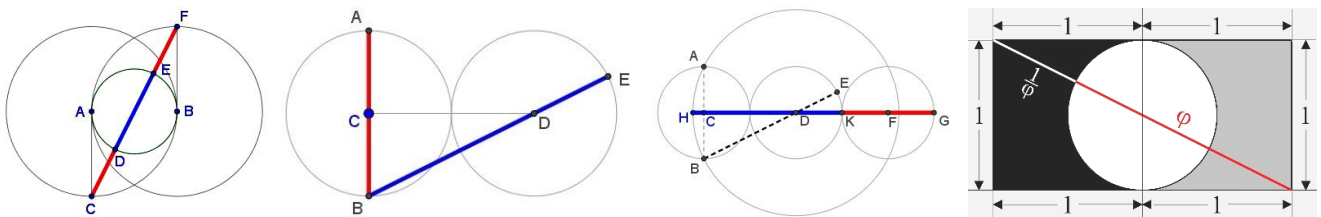
Конструкция органично объединяет в себе различные сочетания окружностей, включая отдельные построения других авторов.

Без потери общности $r = 1/2$. Тогда

$$a = \sqrt{1^2 + (1/2)^2} - 1/2 = \phi; \quad b = 3/2 - a = \phi^2.$$

Если за единицу измерения принять кратчайшее расстояние между точками ϕ^2 , то имеем несколько степеней константы от $\Phi^0 = 1$ до $\Phi^5 = (\Phi + \Phi^2)/\phi^2$, на основе которой образуется множество золотых сечений разных отрезков.

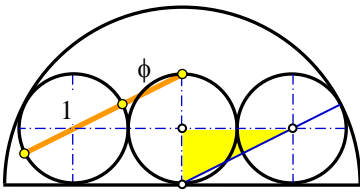
Приведенная модель носит обобщенный характер и включает в себя частные случаи, рассмотренные рядом авторов, например [4]:



где отношение длин синего и красного отрезков равно константе золотого сечения Φ .

Первый из этих рисунков [5] встраивается в плакат ЗС John Arioni.

Три круга в полукруге.

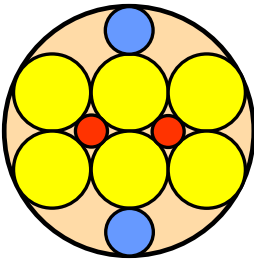


В полукруг радиусом R вписана цепочка трех касающихся окружностей радиусом r [6, с. 84]. Радиусы связаны теоремой Пифагора: $r^2 + (2r)^2 = (R - r)^2$ или $R^2 - 2Rr - 4r^2 = 0$.

Разделив равенство на $4r^2$, и обозначив $x = R/(2r)$, получаем $x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \Phi$. То есть отношение радиуса

полукруга к диаметру маленьких кругов равно константе золотого сечения.

Данная графика приведена специально, чтобы показать, как некоторые авторы сознательно перенасыщают основную идею усложненным построением с целью достижения эффектной визуализации. Хотя суть золотого отношения в данном примере вытекает непосредственно из двух равных касающихся кругов и секущей, проходящей через центр левого и верхнюю точку правого круга. – Реализуется модель золотого роста: единичный диаметр прирастает на константу ϕ , как в предыдущей задаче, $1 + \phi = \Phi$.



Без третьего круга и тем более полукруга. – За ненадобностью.

Если уже и рисовать, то в духе японской храмовой геометрии.

На красивой цветной дощечке (сангаку), в подарок детям.

Например, расположив группу из шести одинаковых кругов (в два ряда по три) внутри большего круга и заполнив пустые пространства

дополнительными парами меньших кругов с общим решением:

$$\frac{R}{d_{\text{ЖЕЛ.}}} = \frac{d_{\text{ЖЕЛ.}}}{d_{\text{СИН.}}} = \Phi \approx 1,618 \neq \frac{d_{\text{СИН.}}}{d_{\text{КРАС.}}} = \frac{\phi}{\sqrt{2}-1} \approx 1,492.$$

Пять кругов в ряд с описанными окружностями.

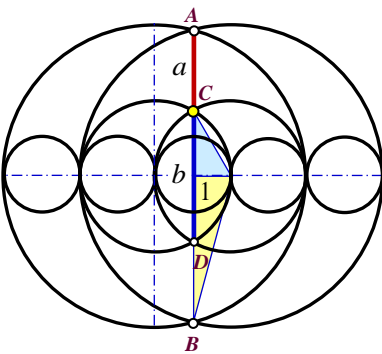


Рисунок адаптирован в продолжение работы [7].

Пять кругов единичного радиуса 1 расположены в ряд, и вокруг них описаны две пары окружностей радиусом 2 и 4.

$$AB = 2\sqrt{4^2 - 1^2} = 2\sqrt{15};$$

$$b = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3};$$

$$a = (AB - b)/2 = \sqrt{15} - \sqrt{3};$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi \text{ или } C = g(DA) \text{ – точка } 3C \text{ отрезка } DA.$$

Пересечение кругов: правильный компас.

Любопытный способ представлен в работе [8] на основе двух пар концентрических окружностей

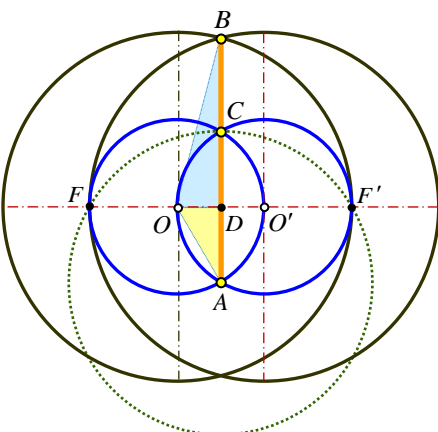
$$O(O'), O'(O), O(F'), O'(F).$$

Пусть $OA = 2$. Тогда $AC = 2 \cdot AD = 2 \cdot \sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$;

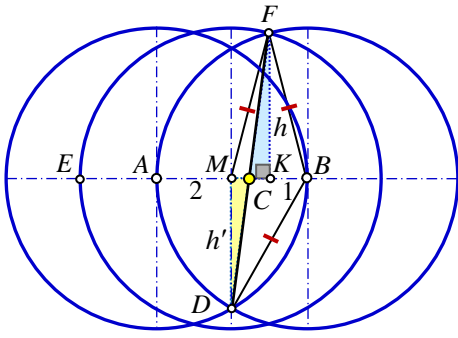
$$AB = AD + BD = \sqrt{3} + \sqrt{4^2 - 1^2} = (1 + \sqrt{5})\sqrt{3}.$$

Точки F, C, F' лежат на окружности $A(C)$, и вся конструкция выполняется только с правильным компасом и золотой пропорцией на вертикальном отрезке:

$$AB/AC = AC/CB = \Phi \text{ или } C = g(AB).$$



Пересечение трех кругов: ржавый компас.



К. Hofstetter продолжил данную задачу, но уже с алгорией ржавого компаса [9].

Проводим $A(B)$, $B(A)$, $M(AB)$, где M – середина AB .

Без потери общности можно принять $AB = 4$:

$$FM = FB = BD = 4, \quad FK \perp MB \rightarrow MK = KB = 1.$$

Выделенные прямоугольные треугольники подобны $\Delta MCD \sim \Delta CKF$, их высоты равны

$$h = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}, \quad h' = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}.$$

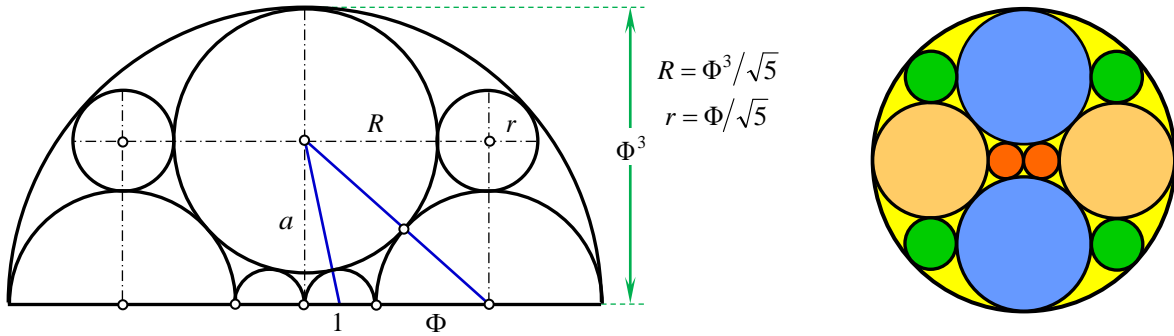
Отношение $MC/CK = \sqrt{12}/\sqrt{15} = 2/\sqrt{5}$.

Поскольку $MC + CK = 1$, то $MC = 2/(\sqrt{5} + 2)$, $CK = 5 - 2\sqrt{5}$;

$$AC = 2 + MC = 2(\sqrt{5} - 1) \quad CB = 1 + CK = 6 - 2\sqrt{5}; \quad \frac{AC}{CB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi \quad \text{или} \quad C = g(AB).$$

Золотое окно.

Восхищаясь сангаку, стоит упомянуть элегантный рисунок Jerzy Kosik [10], который смастерил окно своего дома в духе японской храмовой геометрии.



Априори заданные параметры: единичные диаметры наименьших красных кругов, радиусы Φ кругов слева и справа, радиус Φ^3 наибольшей охватывающей окружности.

Радиус R синих окружностей находится путем приравнивания удаленности a их центра от общего центра:

$$a = \sqrt{(1/2 + R)^2 - (1/2)^2} = \sqrt{R + R^2}; \quad a = \sqrt{(\Phi + R)^2 - (\Phi^2)^2}; \quad R = \frac{\Phi^4 - \Phi^2}{2\Phi - 1} = \frac{\Phi^3}{\sqrt{5}}.$$

Радиус "угловых" окружностей, как дополнение по горизонтали или вертикали:

$$r = 1 + \Phi - R = \Phi^2 - \frac{\Phi^3}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} \quad \text{или} \quad r = \Phi^3 - \Phi - R = \frac{\Phi}{\sqrt{5}}, \quad \frac{R}{r} = \Phi^2.$$

Таким образом, радиус охватывающей окружности в Φ^2 больше, чем у левой и правой окружностей, которые, в свою очередь, в Φ раз больше диаметра внутренних окружностей, а они в $\Phi\sqrt{5}$ раз меньше радиуса четырех "угловых" окружностей.

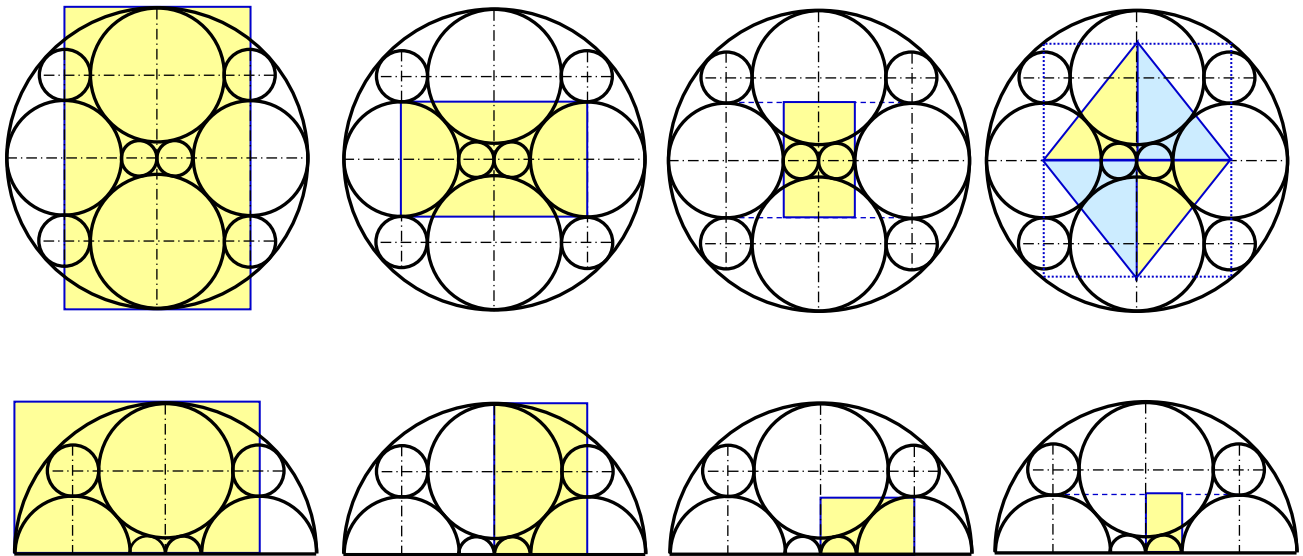
Данная графика выстроена, можно сказать от противного: не в движении к золотому сечению, а в обратном направлении от него. То есть, константа золотой пропорции вводится в структуру изначально искусственно (принудительно).

К двум одинаковым кругам единичного диаметра сразу добавляются аналоги с радиусом Φ , которые затем охватываются окружностью радиусом $1 + 2\Phi = \Phi^3$.

Остальные круги достраиваются в свободные пространства.

Тем не менее, общий замысел оставляет хорошее впечатление. Выглядит вполне гармонично и содержит ряд отношений ЗС.

В частности, имеют место разные проявления золотого прямоугольника с отношением сторон $1:\Phi$ и золотого прямоугольного треугольника Кеплера, стороны которого равны $\Phi^2 \cdot (1, \sqrt{\Phi}, \Phi)$ и составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{\Phi}$.



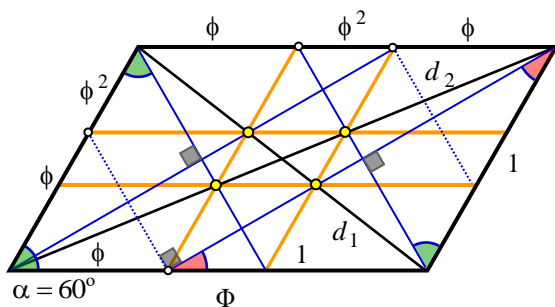
Червонно-золотой параллелограмм в системе четырех окружностей.

В работе [11] введено семейство золотых параллелограммов (ЗП), у которых длины сторон находятся в золотой пропорции $1:\Phi$.

Выделим в этом подмножестве червонно-золотой (высшей пробы) параллелограмм – pure gold (high-carat) parallelogram, в котором не только стороны, но и диагонали находятся в золотой пропорции $1:\Phi$.

Такая геометрическая фигура объединяет естественным образом свойства золотого прямоугольника и золотого ромба, соответственно по сторонам и диагоналям.

Никакого выдающегося новшества в этом, конечно, нет. Вполне ожидаемый и напрашивающийся вариант.



Без потери общности можно принять стороны параллелограмма равными 1 и Φ .

Найдем условия, при которых отношение его диагоналей также равно $d_2 / d_1 = \Phi$.

Пусть α – острый угол между сторонами. С использованием теоремы косинусов имеем

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \Phi^2 = \frac{1 + \Phi^2 - 2\Phi \cdot \cos(\pi - \alpha)}{1 + \Phi^2 - 2\Phi \cdot \cos \alpha}$$

С учетом формулы $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ находим угол и диагонали:

Структурные сочетания окружностей

$$\cos \alpha = \frac{\Phi^4 - 1}{2(\Phi^3 + \Phi)} = \frac{(\Phi^2 - 1)(\Phi^2 + 1)}{2\Phi(\Phi^2 + 1)} = \frac{(\Phi - 1)(\Phi + 1)}{2\Phi} = \frac{\phi \cdot \Phi^2}{2\Phi} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ;$$

$$(d_1, d_2) = \sqrt{1 + \Phi^2 \mp \Phi} = \sqrt{2} \cdot (1, \Phi).$$

Проведем биссектрисы углов. Они отсекают на больших сторонах параллелограмма единичные отрезки. По теореме косинусов длины биссектрис равны 1 и $\sqrt{3}$.

Из построений непосредственно следует, что диагонали параллелограмма и биссектрисы его углов пересекаются в точках, лежащих на золотых линиях, параллельных одной паре сторон четырехугольника и проходящих через точки золотого сечения другой пары сторон: $\Phi = 1 + \phi, 1 = \phi + \phi^2$.

Любой отрезок, заключенный между противоположными сторонами параллелограмма делится золотой линией в отношении 1:Φ.

Любой отрезок, заключенный между стороной параллелограмма и параллельной ему золотой линией, делится другой золотой линией как 1:Φ.

В золотом параллелограмме проявляется особая форма самоподобия: добавление ромба к большей стороне или удаление ромба с меньшей стороны дает также золотой параллелограмм, с тем же соотношением сторон и диагоналей.

Итак, в червленно-золотом параллелограмме:

- сопряженные стороны, а также диагонали находятся в золотом отношении;
- биссектрисы в золотом отношении делят стороны и диагонали, а также делятся сами в точке пересечения с диагоналями.

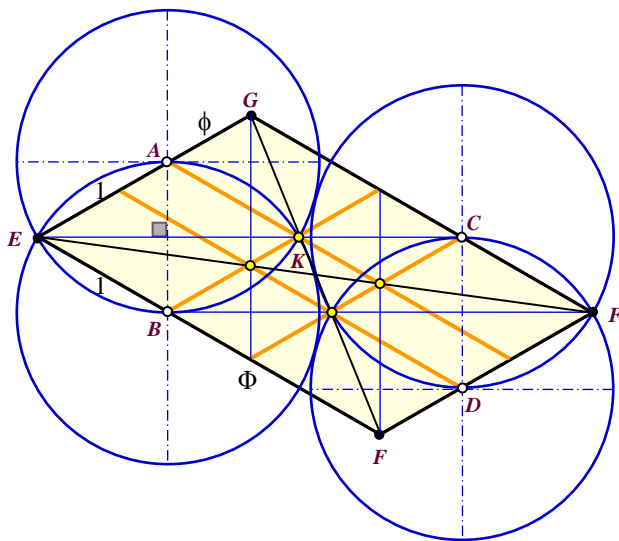
Деление пополам по-прежнему является основообразующим фактором и проявляется в самом золотом отношении, а также через угол параллелограмма $\alpha = 60^\circ$ такой, что $\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ = 1/2$.

Quang Tuan Vui предложил [4, № 34] конфигурацию из четырех конгруэнтных кругов: в каждой паре окружностей (A)-(B) и (C)-(D) одна проходит через центр другой, а обе пары касаются друг с другом так, что (C) касается одновременно (A)-(B).

Образованный параллелограмм *GEFH* – червленно-золотой.

Поясним, почему.

Без потери общности радиусы окружностей $r = 1$.



ΔABE – правильный со стороной 1, $\angle E = 60^\circ$, высота – $\sqrt{3}/2 \rightarrow EK = \sqrt{3}$;

ΔABC – равнобедренный, его основание равно 1, боковые стороны (соединяют центры двух окружностей) – 2, тогда высота – $\sqrt{15}/2$;

сумма высот (биссектриса угла E)

$$EC = \sqrt{15}/2 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)/2 = \sqrt{3} \cdot \Phi$$

– основание равнобедренного треугольника ΔGEC с боковой стороной

$$b = EC / (2 \cdot \cos 30^\circ) = \Phi = 1 + \phi$$

– она же сторона параллелограмма;

другая его сторона:

$$a = GC + CF = \Phi + 1 = \Phi^2.$$

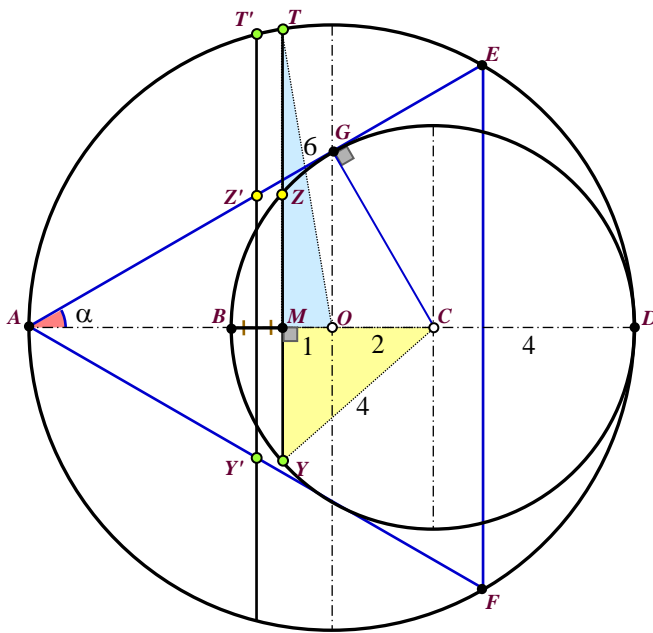
Два неравных круга: из серии задач-двойняшек.

Следующая конструкция ЗС принадлежат Nguyen Thanh Duhg [4, № 47].

Она похожа на хорошо известное золотое сечение (J.Odom) на средней линии правильного треугольника, вписанного в окружность.

Но сходство только внешнее. Две диаграммы совершенно разные. Именно поэтому мы приводим их специально. Чтобы продемонстрировать утонченно-скрупулезную точность золотого сечения. Как говорится, шаг влево, шаг вправо – считается побегом из оазиса ЗС.

На диаграмме буквенные обозначения максимально приближены к оригиналам:



$$AB = BC = CD = 4;$$

$$AO = OD = 2;$$

$$BM = MO = 1;$$

$$TY \perp AD;$$

$$ZM = MY = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7};$$

$$ZY = 2 \cdot ZM = 2\sqrt{7};$$

$$TM = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35};$$

$$TZ = \sqrt{35} - \sqrt{7} = \sqrt{7}(\sqrt{5} - 1);$$

$$\frac{ZY}{TZ} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi.$$

Проведем касательные к внутреннему кругу, $\triangle AEF$ – правильный, поскольку:

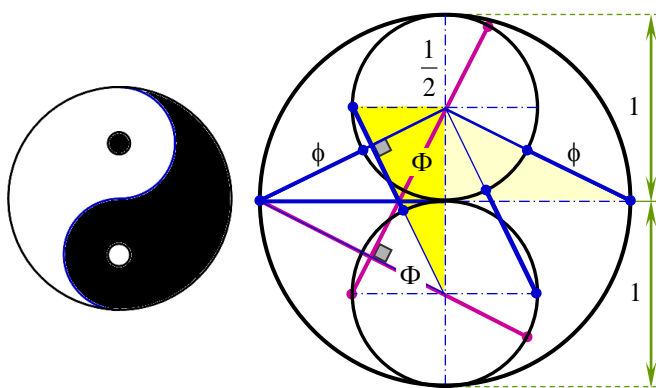
$$AC = 8, CG = 4 = AC/2 \rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Радиус описанной окружности $R = a/\sqrt{3} = 6 \rightarrow a = 6\sqrt{3}$ – сторона треугольника, его высота $h = a \cdot \sqrt{3}/2 = 9$. Средняя линия $Z'Y'$ делит высоту пополам и проходит на расстоянии 4,5 от вершины A, через середину единичного отрезка BM , с золотым отношением $Z'Y'/T'Z' = \Phi$.

Таким образом, $Z = g(TY)$ и $Z' = g(T'Y')$.

Три главные окружности Инь-Ян.

Знаменитый символ инь-ян, пожалуй, является наиболее подходящим местом-хранилищем золотого сечения. Можно сказать, сакральным.



Его графическое изображение, в частности J. Agioni [4], скрывает-содержит множество симметричных проявлений ЗС.

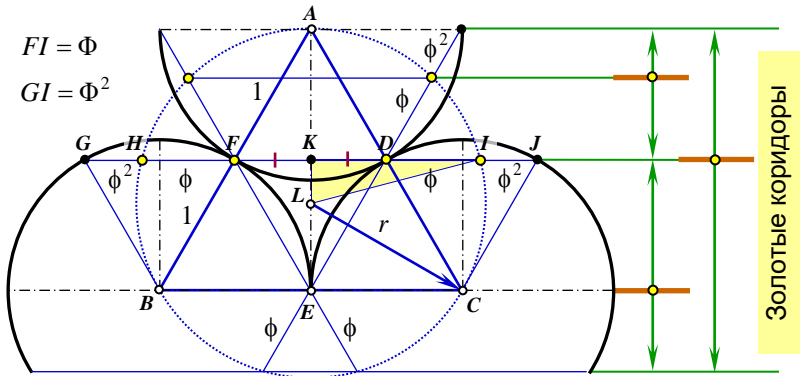
Так, малая константа образуется в треугольнике с катетами 1 и 1/2 на гипотенузе:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Константа Φ формируется путем добавления к параметру ϕ единичного диаметра малой окружности $\Phi = \phi + 1$.

Три попарно касающиеся окружности.

Даны три попарно касающиеся окружности (A), (B), (C); F, D, E – точки касания. FD пересекает круги (B), (C), (ABC) последовательно в точках G, H, F, D, I, J. L – общий центр (ABC), (FED). Без потери общности примем AB = 2.



Тогда в ΔKLI :

$$LI = r = 2/\sqrt{3};$$

$$KL = 1/3 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/6;$$

$$KI = \sqrt{(2/\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3}/6)^2} = \sqrt{5}/2.$$

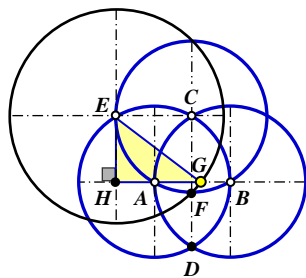
$$DI = \sqrt{5}/2 - 1/2 = \phi,$$

$$IJ = 1 - \phi = \phi^2.$$

Собственно, и вся аналитика.

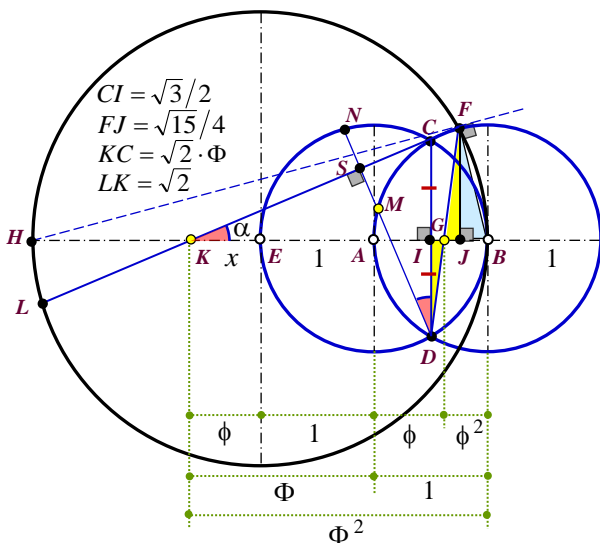
Сформированные на линии GI отрезки $\phi^2, \phi, 1, \Phi, \Phi^2$ в разных сочетаниях образуют множество золотых пропорций. Кроме того, по вертикали можно выделить три золотых интервала-коридора, в которых любая секущая делится ЗС.

Три окружности: "многоходовочка" длиной в 100 лет.



В работе [12] описано 5-шаговое деление единичного отрезка АВ золотым сечением на основе трех одинаковых окружностей A(B), B(A), C(A) и дополнительной E(F). Действительно, $CD = \sqrt{3}, EG = EF = \sqrt{2}$. $HA = 1/2, HG^2 = EG^2 - EH^2 = 2 - 3/4 = 5/4,$ $AG = HG - HA = (\sqrt{5} - 1)/2.$

Позже другие авторы уточнили, что описанная модель уже приводилась более 100 лет назад в книгах [13, с. 51; 14, с. 37]. К Hofstetter модифицировал [7] своё 5-шаговое деление. Кроме того, Tran Quang Hung внес дополнение [4, № 51].



Мы попытались всё упорядочить и обобщить. В результате получилась превосходная конструкция с избытием золотых сечений.

1) На единичном отрезке $AB = 1$ проведены две одинаковые окружности A(B) и B(A), пересекающиеся в точках C и D, а также третья окружность E(B) радиусом 2, которая пересекает малую окружность в точке F.

$$CD \perp AB, FJ \perp AB, HF \perp FB.$$

Радиус малого круга $BF = 1$, диаметр большого $HB = 4$.

По теореме о высоте прямоугольного треугольника ΔHFB : $(BF)^2 = HB \cdot JB$, отсюда

$$JB = 1/4 \rightarrow IJ = 1/2 - 1/4 = 1/4.$$

Структурные сочетания окружностей

По теореме Пифагора $FJ = \sqrt{1^2 - (1/4)^2} = \sqrt{15}/4$.

Из подобия треугольников имеем пропорцию $\frac{IG}{GJ} = \frac{ID}{FJ} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{15}/4} = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$$IG = GJ \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{4} - IG\right) \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \quad \text{и} \quad AG = \frac{1}{2} + IG = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi,$$

то есть G – точка золотого сечения (ЗС) исходного единичного отрезка AB : $G = g(AB)$.

2) Двигаемся дальше... Через точки C, F проведем линию, которая пересекает горизонтальную ось симметрии и большую окружность в точках K и L .

Пусть $x = KE$. Из подобия треугольников $\Delta KCI \sim \Delta KFJ$ следует пропорция катетов:

$$\frac{x+1+1/2}{x+1+3/4} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4} = \phi, \quad KA = 1 + \phi = \Phi, \quad KB = 1 + \Phi = \Phi^2,$$

откуда следует множество ЗС.

3) Продолжим... Гипотенуза $KC = \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (\Phi+1/2)^2} = \Phi\sqrt{2}$;

$$KJ = \Phi + 3/4 \rightarrow \text{гипотенуза } KF = \sqrt{KJ^2 + FJ^2} = \sqrt{(\Phi+3/4)^2 + (\sqrt{15}/4)^2} = \Phi\sqrt{5/2}.$$

По теореме о пересекающихся хордах:

$$HK \cdot KB = LK \cdot KF \quad \text{или} \quad (2-\phi)(2+\phi) = LK \cdot \Phi\sqrt{5/2}, \quad LK = \sqrt{2}, \quad K = g(CL).$$

4) Ещё не всё... Через точку пересечения D малых окружностей проведем $ND \perp LF$.

Прямоугольные треугольники подобны $\Delta CKG \sim \Delta CDS$, поскольку стороны их острых углов взаимно перпендикулярны.

$$\text{Котангенс угла } \text{ctg } \alpha = \frac{KI}{CI} = \frac{\Phi+1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\Phi^3}{\sqrt{3}} \text{ – коэффициент наклона линии } ND \text{ (или её}$$

зеркального отражения) к горизонтальной оси, $\alpha \approx 22,2^\circ$.

Пусть точка G – начало координат.

Координаты точки $D(0, -\sqrt{3}/2)$.

$$\text{Уравнение прямой (зеркальной): } y = \frac{\Phi^3}{\sqrt{3}}x - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнения двух окружностей:

$$(x \pm 1/2)^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = -x^2 \mp x + 3/4.$$

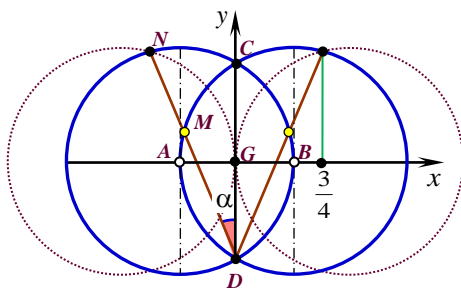
Точки пересечения прямой и окружностей

$$x_{1,2} = \frac{\Phi^3 \mp 1}{\Phi^6/3 + 1} = \left(0,464\dots; \frac{3}{4}\right).$$

$$\text{Отношение абсцисс точек пересечения равно } \frac{x_2}{x_1} = \frac{\Phi^3 + 1}{\Phi^3 - 1} = \frac{2\Phi^2}{2\Phi} = \Phi.$$

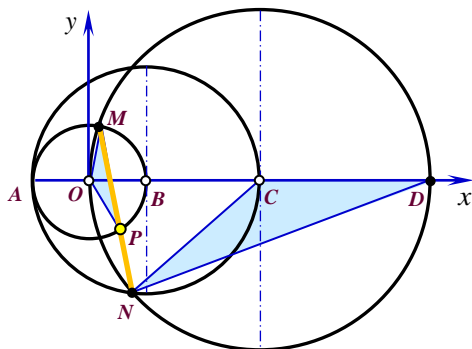
Вследствие подобия, также относятся разности ординат и сами отрезки, $M = g(DN)$.

$$(DN, DM, MN) = \sqrt{3/2} \cdot (\Phi, 1, \phi) \approx (1.982, 1.225, 0.757).$$



К слову, это единственная линия, не считая симметричных отображений, которая отделяет две равные окружности (сдвинутые на радиус) на смежные отрезки в золотом отношении.

5) Но и это не конец. Вуй Quang Tuan пошел ещё дальше: с тремя неравными окружностями [4, № 32].



Относительно начала координат $O(0, 0)$ проводятся три окружности: (O) радиусом 1, $B(A)$ радиусом 2 и $C(O)$ радиусом 3.

Последняя пересекает малую (O) и среднюю $B(A)$ окружности в точках M, N .

Найдем координаты точек M и N при пересечении большей окружности $(x-3)^2 + y^2 = 3^2$ с остальными:

$$M: x^2 + y^2 = 1 \rightarrow M\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\sqrt{35}\right);$$

$$N: (x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow N\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\sqrt{7}\right).$$

По координатам точек определяем квадрат отрезка $(MN)^2 = 7(3 + \sqrt{5})/4$.

Равнобедренные треугольники подобны: $\triangle OMP \sim \triangle CDN$, поскольку острые углы $\angle OMN = \angle ODN$ вписаны в окружность $C(O)$ и опираются на одну и ту же дугу ON .

Зная положение точки $D(6, 0)$, вычислим $(DN)^2 = 63/2$. Тогда $(MP)^2 = 63/2/3^2 = 7/2$.

Окончательно имеем $(MN/MP)^2 = \Phi^2$, то есть $P = g(MN)$.

Знатная и необычная получилась "многоходовочка".

Однако золотой геометрический марафон продолжается...

Счет по-прежнему 1:2 (с делением пополам) – в пользу золотой пропорции.

Пока берем тайм-аут, для восстановления сил и боевого духа. – Окей.

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2 // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 13.07.2011. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html.

2. Хокинг С. От Большого взрыва до черных дыр. Краткая история времени. – М.: Мир, 1990. – 167 с.

3. Василенко С.Л. Современная геометрия золотой пропорции // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 07.02.2013. – artmatlab.ru/articles.php?id=97&sm=2.

4. Cut the knot. Golden Ratio in Geometry. – cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml.

5. Molokach J. Mathematical Gazette, vol. 101, N 551, 2017, p. 303.

6. Pickover C. A passion for mathematics. John & Sons, 2005. – 394 p.

7. Hofstetter K. Another 5-step Division of a Segment in the Golden Section // Forum Geometricorum, 4 (2004), 21-22. – <http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200402.pdf>.

8. Hofstetter K. A Simple construction of the golden section // Forum Geometricorum,

2 (2002), 65-66. – <http://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200208.pdf>.

9. Hofstetter K. Division of a Segment in the Golden Section with Ruler and Rusty Compass // Forum Geometricorum, **5** (2005), 135-136. – <https://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200518.pdf>.

10. Kocik J. Golden window // Math. Magazine, 83 (2010), 384–390.


11. Василенко С.Л. Семейство золотых треугольников и параллелограммов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26931, 23.01.2021. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164608.htm.

12. Hofstetter K. A 5-step Division of a Segment in the Golden Section // Forum Geometricorum, **3** (2003), 205-206. – <https://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200322.pdf>.

13. Lemoine E. Geometrographie ou Art des Constructions Geometriques. – C. Naud, Paris, 1902. – 118 p.

14. Reusch J. Planimetrische Konstruktionen in Geometrographischer Ausfuhrung. – Teubner, Leipzig, 1904. – 102 p.



© ВаСиЛенко, 2022 
Украина, Харьков