

Семенюта Н. Ф.

## О «ЗОЛОТЫХ» СЕЧЕНИЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

### Исходные положения

Настоящая статья является продолжением работ автора по исследованию свойств гармонических последовательностей чисел. [1, 2, 3]. В ранее опубликованных работах были рассмотрены электрические модели последовательностей рекуррентных чисел Фибоначчи, Люка и др., показаны их связи с гармоническими последовательностями чисел, тождеством Кассини, уравнением передачи электрической цепи и др.

В статье приведены результаты новых исследований рекуррентных последовательностей чисел, их характеристические уравнения и «золотые» сечения, вытекающие из уравнений электрических моделей и др. [4, 5, 6]. Показаны энергооптимальные условия работы электрических моделей, связь «золотого» сечения и простых цепных дробей.

### Геометрические модели золотого сечения

«Золотое» сечение – это закон пропорциональной связи целого и составляющих это целое частей. Простейшее «золотое» сечение («золотая» пропорция, «золотая» середина) – это симметричное деление отрезка  $a + b$  на две равные части  $a = b$ , или пропорция  $a/b = 1$  (рисунок 1,  $a$ ).

Под «золотым» также понимают деление отрезка в крайнем и среднем отношении (рисунок 1,  $\bar{b}$ ), когда целое  $(a + b)$  так относится к большей своей части  $(a)$ , как большая часть  $(a)$  – к меньшей  $(b)$ :

$$(a + b)/a = a/b = 1,6180339... = \Phi \quad (1)$$

или отношение

$$a/(a + b) = b/a = 1/1,618 = 0,6180339... = \Phi^{-1}.$$

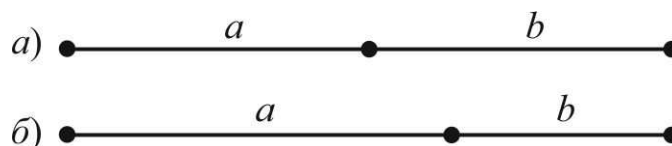


Рисунок 1 – Деление отрезка:  $a$  – симметричное на две равные части;  
 $\bar{b}$  – асимметричное на две неравные части

Одним из замечательных свойств «золотого» сечения является его связь с гиперболическими функциями [7]. Для установления связи между «золотым» сечением и гиперболическими функциями (экспонентой), примем:

$$\Phi = e^\gamma, \quad \gamma = \ln \Phi = 0,481212\dots,$$

$$\Phi^{-1} = e^{-\gamma}, \quad \gamma = \ln \Phi^{-1} = -0,481212\dots,$$

где  $e$  – основание натуральных логарифмов,  $e = 2,71828\dots$  Тогда,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \gamma &= \frac{1}{2}, & \operatorname{ch} \gamma &= \frac{\sqrt{5}}{2}, & \operatorname{th} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \operatorname{sh}^2 \gamma &= \frac{5}{4}, & \operatorname{ch}^2 \gamma &= \frac{1}{4}, & \operatorname{sh} \gamma \cdot \operatorname{ch} \gamma &= \frac{\sqrt{5}}{4}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{sh} \gamma + \operatorname{ch} \gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi, \quad (2)$$

$$\operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} \gamma = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\Phi^{-1}, \quad (3)$$

$$(\operatorname{sh} \gamma + \operatorname{ch} \gamma)^2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \Phi^2,$$

$$(\operatorname{sh} \gamma - \operatorname{ch} \gamma)^2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \Phi^{-2}.$$

Из полученного также следует:

$$e^\gamma + e^{-\gamma} = \Phi + \Phi^{-1} = \sqrt{5} = 2\operatorname{ch} \gamma, \quad e^\gamma - e^{-\gamma} = \Phi - \Phi^{-1} = 1 = 2\operatorname{sh} \gamma.$$

$$\operatorname{ch} \gamma = \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} = \frac{\Phi + \Phi^{-1}}{2}, \quad \operatorname{sh} \gamma = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2} = \frac{\Phi - \Phi^{-1}}{2}.$$

Приведенные формулы являются яркой демонстрацией родственных связей «золотого» сечения, экспоненты и гиперболических функций. Эти же связи явились началом исследования проявления «золотого» сечения в теории электрических цепей и связи. Более широкое исследование связи «золотого» сечения и гиперболических функций было проведено автором в конце 60-х годов прошлого столетия при анализе однородных электрических цепей и опубликовано в трудах Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта в 1971–1974 гг. [1, 2, 3].

## Алгебраическая модель золотого сечения

Задача о «золотом» сечении имеет также алгебраические решения. Обозначив в (1) отношение  $a/b = x$ , получим приведенное квадратное уравнение «золотого» сечения

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad (4)$$

Численные значения корней уравнения соответственно, равны:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618034\dots = \Phi, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,618034\dots = -\Phi^{-1}.$$

Корни уравнения  $x_1$  и  $x_2$  связаны также с гиперболическими функциями (2), (3).

Задача о «золотом» сечении допускает также математическое обобщение по свободному члену квадратного уравнения (4). Введем в отношение (1) новый параметр – множитель  $q$ :

$$(aq + b)/a = a/b, \quad a/b = x. \quad (5)$$

Тогда получим обобщенное квадратное уравнение

$$x^2 - qx - 1 = 0, \quad (6)$$

частным случаем, которого ( $q = 1$ ) является уравнение (4).

Уравнению (6) соответствует широкий класс гармонических последовательностей чисел. Так, при  $q = 0, 1, 2, 3, \dots$  корни уравнения (6) соответственно равны:

$$\begin{array}{llll} q = 0, & x^2 - 0x - 1 = 0, & x_1 = 1, & x_2 = 1, \\ q = 1, & x^2 - 1x - 1 = 0, & x_1 = (1 + \sqrt{5})/2, & x_2 = (1 - \sqrt{5})/2, \\ q = 2, & x^2 - 2x - 1 = 0, & x_1 = (1 + \sqrt{2}), & x_2 = (1 - \sqrt{2}), \\ q = 3, & x^2 - 3x - 1 = 0, & x_1 = (3 + \sqrt{13})/2, & x_2 = (3 - \sqrt{13})/2, \\ q = 4, & x^2 - 4x - 1 = 0, & x_1 = (2 + \sqrt{5}), & x_2 = (2 - \sqrt{5}). \end{array}$$

При  $q = 0$  корни уравнений (6) соответственно равны  $x_1 = x_2 = 1$ . При  $q = 1$  корни уравнения равны «золотому» сечению  $\Phi^{-1}$  и  $\Phi$ . При других значениях  $q$ , корни уравнений равны соответствующим  $q$ -пропорциям.

Обычно с уравнения (4) во многих случаях начинается и кончается алгебра «золотого» сечения, но это простейший случай и возможны и другие уравнения. Так, если в (1) обозначить  $b/a = x$ , получим новое квадратное уравнение

$$x^2 + x - 1 = 0. \quad (7)$$

со значениями корней

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618034\dots = 1/\Phi, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,618034\dots = -\Phi.$$

С учетом множителя  $q$  уравнение (7) принимает вид:

$$x^2 + qx - 1 = 0. \quad (8)$$

Уравнению (8) также соответствует широкий класс гармонических последовательностей чисел. При  $q = 0, 1, 2, 3, \dots$  корни уравнения (8) соответственно равны:

$$\begin{array}{llll} q = 0, & x^2 + 0x - 1 = 0, & x_1 = 1, & x_2 = 1, \\ q = 1, & x^2 + 1x - 1 = 0, & x_1 = (-1 + \sqrt{5})/2, & x_2 = (-1 - \sqrt{5})/2, \\ q = 2, & x^2 + 2x - 1 = 0, & x_1 = (-1 + \sqrt{2}), & x_2 = (-1 - \sqrt{2}), \\ q = 3, & x^2 + 3x - 1 = 0, & x_1 = (-3 + \sqrt{13})/2, & x_2 = (-3 - \sqrt{13})/2, \\ q = 4, & x^2 + 4x - 1 = 0, & x_1 = (-2 + \sqrt{5}), & x_2 = (-2 - \sqrt{5}). \end{array}$$

Из всего множества гармонических пропорций, только одна получила название «золотой» ( $q = 1$ ). Золото, как драгоценный металл, всегда олицетворяло самое лучшее. Поэтому некоторые исследователи гармонических пропорций пропорции назвали обобщенным понятием – «металлические» пропорции (золотые, серебряные, медные и т. д.). В то же время понятие «золотое» субъективно. Поэтому и в понятии «металлические» пропорции у разных авторов появились различные толкования. Кстати, немецкий астроном и математик И. Кеплер (1571 – 1630) назвал пропорцию  $\Phi = 1,618$  драгоценным камнем (без уточнения каким). Ранее итальянский математик Лука Пачоли (1445 – 1517) назвал  $\Phi = 1,618$  – Божественная пропорция.

Математика точная наука и никаких субъективных понятий не должно быть. Каждому понятию должно соответствовать строгое математическое определение. С этой точки зрения, пропорции, следующие из уравнений (6) и (7), следует классифицировать не субъективно («металлические» пропорции и др.), например, по значению его основного параметра, по коэффициенту  $q$ .

### Электрическая модель «золотого» сечения

Простейшим электрическим моделям рекуррентных последовательностей чисел соответствуют однородные электрические цепи с цепочечным соединением электрических Т- и Г-образных схем с сопротивлениями в продольных  $R_1 = R_3 = R_5$  и поперечных  $R_2 = R_4 = R_6$  ветвях и сопротивлением нагрузки  $R_n$  (рисунок 2). Электрические модели наиболее полно отражают свойства гармонических

последовательностей чисел в науке и технике и занимают особое место в математической теории гармонии [8, 9, 10].

Критерием «золотой» (гармоничной, согласованной) цепи является условие энергооптимальной передачи энергии сигнала (информации) при котором сопротивление источника тока  $R_r$  равно сопротивлению нагрузки  $R_n$

$$R_r = R_n. \quad (9)$$

При этом от источника тока  $E$  к потребителю (нагрузке)  $R_n$  поступает максимум энергии. Критерий был установлен со времени создания первых электрических цепей и началом формирования в XIX веке теории электрической связи [11]. Согласованность и сегодня остается основным критерием энергооптимальности электрических цепей [12, 13, 14].

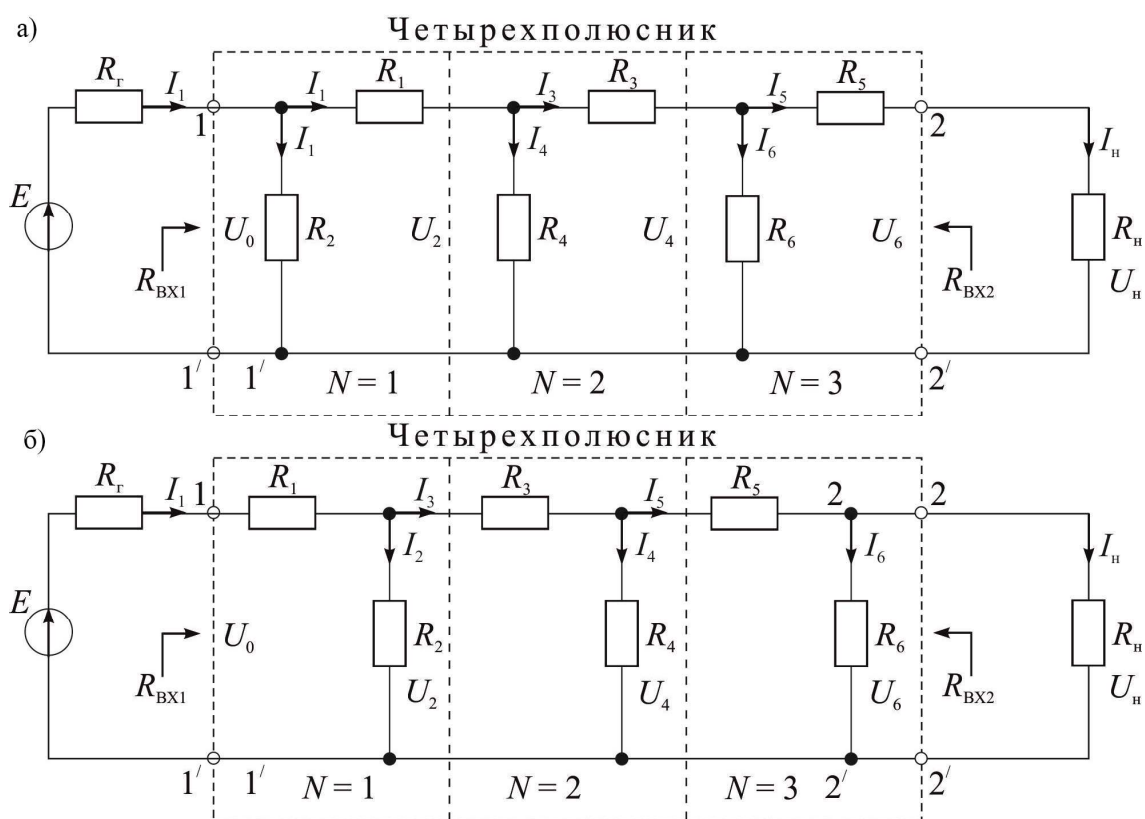


Рисунок 2 – Электрические модели рекуррентных последовательностей чисел:  
а – Т-образная; б – Г-образная

Впервые связь «золотого» сечения и лестничных электрических фильтров была приведена в работе профессора В. Н. Листова (1936) [15, 16]. В те же годы бв учебнике профессора М. А. Бонч-Бруевича «Элементы радиотехники» в результате анализа были получены токи в ветвях лестничной электрической цепи пропорциональные числам Фибоначчи (1938) [17].

Значительно позже (1959), в трудах института радиоинженеров (IRE) была опубликована статья А. Морган-Воис (A. M. Morgan-Voyce) «Ladder Networks

*Analysis Using Fibonacci Numbers*» [18], об анализе однородных электрических цепей с использованием чисел Фибоначчи. В журнале американской Ассоциации Фибоначчи «*The Fibonacci Quarterly*» была опубликована также статьи индийского ученого М. Швами (M. N. S. Swamy) «*Properties of the Polynomials Defined by Morgan-Voyce*» и др. [19]. За этими публикациями в журнале «*The Fibonacci Quarterly*» и других журналах последовало ряд статей посвященных электрическим цепям и их связям с числами Фибоначчи и Люка, арифметическому треугольнику чисел Паскаля, многочленам Чебышева и др.

Первая статья автора монографии «Применение рекуррентных соотношений к анализу электрических цепей» была опубликована в трудах Белорусского государственного университета транспорта в 1971 [1]. За первой последовало несколько статей с анализом рекуррентных последовательностей чисел, их свойствам и связям с однородными электрическими цепями (1971–1974), где были введены понятия лестничных последовательностей чисел, лестничных цепей и др.) [ 2, 3, 4, 5]. При этом было показано, что числа Фибоначчи и Люка являются частными случаями лестничных чисел. Впервые также была установлена связь значений чисел мультирекуррентных последовательностей и гиперболических функций.

Часть материала автора по новому методу расчета однородных электрических цепей на основе последовательностей чисел Фибоначчи, Люка, мультирекуррентных чисел были обобщены в учебном пособии «Анализ линейных электрических цепей методом лестничных чисел» (2010) [20].

Несмотря на большое количество работ и весьма тесные близкие «родственные» связи гармоничных числовых последовательностей и электрических цепей, приходится констатировать, что как, в СССР, а затем и в странах СНГ, исследований в этом направлении практически не проводилось. Приятным исключением из этого явилось учебное пособие С. А. Ясинского «Золотая пропорция в электросвязи» (1999) [21] и его монография «Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи» (2004) [22]. В трудах Международной академии связи и специализированных журналах по информатике и связи были также опубликованы ряд статей автора статьи по золотому сечению, рекуррентным и мультирекуррентным последовательностям чисел.

Электрическая модель наиболее полно отражает свойства «золотого» сечения и гармонических последовательностей чисел и можно только сожалеть, что в этом направлении математической теории гармонии практически нет исследований. Здесь, по образному определению американского математика профессора Мориса Клайна (1908–1992), мы наблюдаем утрату определенности [23]. Может я ошибаюсь?

### **Согласованные электрические модели**

Согласованный (гармоничный) режим работы электрической модели, характеризуется передачей от источника тока  $E$  к нагрузке (приемнику) максимально возможной мощности. Такому режиму работы цепи соответствует условие (9). Согласованный режим является энергооптимальным и его с

полным основанием можно назвать «золотым». Здесь только еще раз отметим, что эмпирическим путем условие (9) было установлено в первой половине XIX века (1847) [11], когда шло интенсивное строительство первых линий электрической связи и началось становление новой науки – электротехники.

Сложность выполнения условия (9) состояла в том, что в общем случае между источником  $E$  и приемником  $R_H$  находится промежуточный объект – четырехполюсник, который не позволяет простым путем выполнить это условие. Следовательно, здесь возникла задача согласования (гармонии) параметров проходного четырехполюсника, источника и нагрузки или иначе, при каком значении сопротивления нагрузки  $R_H$ , входное сопротивление четырехполюсника  $R_{вх1}$  будет равно сопротивлению нагрузки, т. е.  $R_{вх1} = R_H$ . На первый взгляд это парадоксальная задача, так как входное сопротивление четырехполюсника зависит от количества промежуточных четырехполюсников  $N$ , значений сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , значения сопротивления нагрузки  $R_H$ , но она имеет решение. Покажем это на простом примере Т-образного четырехполюсника (рисунок 3).

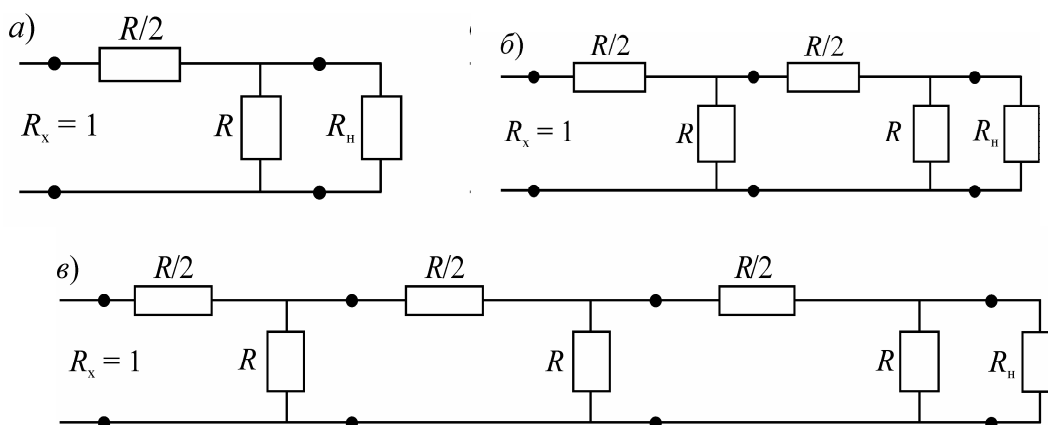


Рисунок 3 – К понятию характеристического сопротивления цепи

Для случая, когда  $R_1 = 1/2$ ,  $R_2 = 1$  и сопротивления нагрузки  $R_H = 1$  (рисунок 3, а), входное сопротивление четырехполюсника  $R_{вх} = 1$ . Добавив к четырехполюснику рисунка 3, а еще один такой же четырехполюсник, получим цепь, состоящую из двух четырехполюсников (рисунок 3, б). Входное сопротивление цепи при этом не изменилось  $R_{вх} = 1$ . Добавив к цепи рисунка 3, б еще один такой же четырехполюсник (рисунок 3, в). Входное сопротивление цепи не изменится и также будет  $R_{вх} = 1$  и т. д. Следовательно, согласованным («золотым») сопротивлением для четырехполюсника с  $R_1 = 1/2$  и  $R_2 = 1$  будет сопротивление нагрузки  $R_H = 1$ .

На основании этого примера можно сделать следующее определение: характеристическим (согласованным, «золотым») сопротивлением четырехполюсника  $R_x$  называется такое сопротивление, при нагрузке на которое входное сопротивление четырехполюсника  $R_{вх1}$  равно сопротивлению нагрузки  $R_H$ . При нагрузке четырехполюсник на согласованное сопротивление, получившего название характеристического, входное сопротивление примет значение

сопротивления нагрузки, независимо от протяженности линии, т. е. количества четырехполюсников. Это удивительное свойство характеристического (согласованного) сопротивления вполне заслуживает названия «золотого», так как обеспечивает энергооптимальную и устойчивую работу источника энергии нагруженного на характеристическое сопротивление.

Таким образом, вырисовывается роль проходного четырехполюсника, как согласующего звена (посредника) между источником и нагрузкой (приемником) для выполнения согласованных (гармоничных, оптимальных, «золотых») условий работы электрической модели последовательностей чисел. Проходной четырехполюсник как посредник обеспечивает также оптимальное взаимодействие источника и нагрузки, особенно в живой природе. В связи с этим назрела необходимость расширения математической теории гармонии в направлении теории передачи биосигналов по биоэлектрическим каналам и сетям связи.

### Уравнения согласованной электрической модели

Согласованное или характеристическое сопротивление для Т- и Г-образных электрических моделей, представленных на рисунке 2, можно определить из соответствующих им эквивалентных схем (рисунок 4).

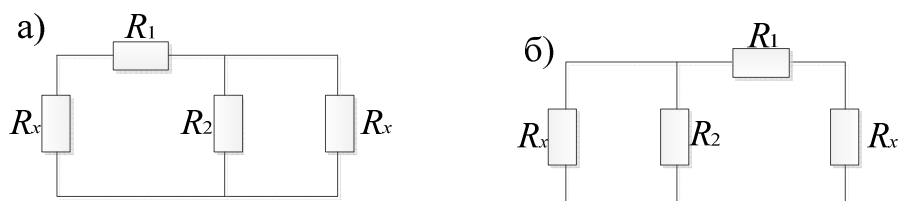


Рисунок 4 – Эквивалентные электрические цепи: а – Т-образная; б – Г-образная

В случае, Т-образной цепи характеристическое сопротивление можно определить из условия  $R_x = R_n$ . Характеристическое сопротивление такой цепи (рисунок 4, а), равно

$$R_x = R_1 + \frac{R_x R_2}{R_x + R_2}.$$

Откуда следует квадратное уравнение

$$R_x^2 - R_x R_1 - R_1 R_2 = 0, \quad (10)$$

корни которого, равны

$$R_{x1,2} = \frac{R_1}{2} \pm \sqrt{\frac{R_1^2}{4} + R_1 R_2}. \quad (11)$$

Для рассмотренного ранее примера (см. рисунок 3), когда  $R_1 = 1/2$  и  $R_2 = 1$  уравнение (10) принимает вид



$$R_x^2 + \frac{1}{2}R_x - \frac{1}{2} = 0, \quad (12)$$

вещественный корень, которого равен

$$R_{x1} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Таким образом, оптимальное сопротивление нагрузки электрической цепи, состоящей из нескольких четырехполюсников, равно вещественному корню уравнения (10). Значение этого корня (сопротивления  $R_{x1} = 1$ ), соответствует максимуму передачи электрической энергии к потребителю  $R_H$ .

Для электрической модели числовой последовательности Фибоначчи, у которой  $R_1 = 1$  и  $R_2 = 1$  (см. рисунок 3) уравнение (10) принимает вид

$$R_x^2 - R_x - 1 = 0$$

и согласованная нагрузка цепи буде равна вещественному корню

$$R_x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618 = \Phi.$$

Для цепи, состоящей из Г-образных четырехполюсников (см. рисунок 2, б), эквивалентная схема представлена на рисунке 4, б. Ее входное сопротивление

$$R_{вх} = R_2 (R_1 + R_x) / (R_1 + R_2 + R_{вх}).$$

Откуда следует квадратное уравнение

$$R_x^2 + R_1 R_x - R_1 R_2 = 0, \quad (13)$$

корни которого, равны

$$R_{x1,2} = -\frac{R_1}{2} \pm \sqrt{\frac{R_1^2}{4} + R_1 R_2}.$$

В случае электрической модели последовательностей чисел Фибоначчи  $R_1 = 1$  и  $R_2 = 1$ , тогда

$$R_{x1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618 = \Phi^{-1}, \quad R_{x2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,618 = -\Phi.$$

Общему случаю согласованного («золотого») режима (10) соответствуют квадратные уравнения

$$x^2 \pm ax - b = 0, \quad \text{где } a = R_1, \quad b = R_1 R_2,$$

которым в зависимости от значений  $a = R_1$  и  $b = R_1 R_2$ , соответствуют множество частных случаев.

### Характеристические сопротивления электрических моделей

Характеристические (согласованные) сопротивления электрических моделей в виде Т- и Г-образных лестничных электрических цепей (см. рисунок 2) могут быть отображены простыми непрерывными или цепными дробями. Начало применения простых цепных дробей в теории электрических цепей было положено в первой половине XX века немецким математиком Вильгельмом Кауэром (1900–1945). Он издал фундаментальный труд по теории цепочечных электрических фильтров в основе которых лежали цепные дроби [24]. В дальнейшем работы В. Кауэра получили развитие в трудах В. Н. Листова, Н. Н. Гарновского, А. Ф. Белецкого, Я. А. Собенина [13, 14, 25].

Цепные дроби соответствующие электрическим цепям, представленным на рисунке 2,  $a$  и  $2, b$  в общем виде можно представить дробями:

$$R_x = q + \frac{1}{q + \frac{1}{q + \frac{1}{q + \frac{1}{q + \dots}}}} = \frac{q + \sqrt{q+4}}{2},$$

$$R_x = \frac{1}{q + \frac{1}{q + \frac{1}{q + \frac{1}{q + \dots}}}} = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4}}{2}.$$

В свернутом виде приведенные цепные дроби можно представить уравнениями:

$$q + \frac{1}{R_x} = R_x \quad \text{или} \quad R_x^2 - qR_x - 1 = 0,$$

$$\frac{1}{q + R_x} = R_x \quad \text{или} \quad R_x^2 + qR_x - 1 = 0,$$

которые совпадают с уравнениями (6) и (8).

Для случая  $q = 1$  цепные дроби принимают вид:

$$R_x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots,$$

$$R_x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618\dots$$

т. е. в пределе значения корней равны «золотому» сечению  $\Phi$  и  $\Phi^{-1}$ .  
Цепные дроби для случаев  $q = 2$  имеют вид:

$$R_x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = 2,414\dots = 1 + \sqrt{2},$$

$$R_x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = -1 + \sqrt{2} = 0,414\dots,$$

т. е. в пределе значения равны корням уравнения  $x^2 + 2x - 1 = 0$ .  
Цепные дроби для случаев  $q = 3$  имеют вид:

$$R_x = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3,302\dots,$$

$$R_x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} = 0,302\dots,$$

т. е. в пределе значения дробей равны корням уравнения  $x^2 + 3x - 1 = 0$ . Для случаев  $q = 4$ , получаем  $R_x = 4,236\dots$ , для  $q = 5 - R_x = 5,192\dots$  и так далее.

В обобщенном виде цепные дроби электрических моделей с учетом значений их сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  (см. рисунок 2) имеют вид:

$$R_x = R_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{R_5 + \dots}}}}, \quad R_x = \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{R_5 + \dots}}}},$$

где  $R_1 = R_3 = R_5 -$  сопротивления продольных ветвей;  $Y_2 = Y_4 = Y_6$  проводимости поперечных ветвей цепи ( $Y_2 = 1/R_2, Y_4 = 1/R_4, Y_6 = 1/R_6$ ). Для случаев:

$$q = 1, \quad R_1 = R_3 = R_5 = 1, \quad R_2 = R_4 = R_6 = 1, \quad Y_2 = Y_4 = Y_6 = 1,$$

$$q = 2, \quad R_1 = R_3 = R_5 = 2, \quad R_2 = R_4 = R_6 = 1/2, \quad Y_2 = Y_4 = Y_6 = 1/R_2 = 1/R_4 = 1/R_6 = 2,$$

$$q = 3, \quad R_1 = R_3 = R_5 = 3, \quad R_2 = R_4 = R_6 = 1/3, \quad Y_2 = Y_4 = Y_6 = 1/R_2 = 1/R_4 = 1/R_6 = 3.$$

Обратим внимание, что в случае  $q = 1$  сопротивления продольных и поперечных ветвей равны друг другу ( $R_1 = R_3 = R_5$ ) = ( $R_2 = R_4 = R_6$ ) = 1 и электрическая цепь соответствует электрической модели рекуррентной последовательности чисел Фибоначчи. В случаях  $q = 2$  и  $q = 3$  сопротивления продольных и поперечных ветвей не равны ( $R_1 = R_3 = R_5$ )  $\neq$  ( $R_2 = R_4 = R_6$ ) и последовательность чисел становится мультирекуррентной. Начала исследований мультирекуррентных числах приведены в работах [1, 2, 3, 20], более подробные их свойства в следующих работах.

### Заключение

Приведенные результаты исследования «золотого» сечения на основе электрических моделей являются еще одним шагом на пути математической теории гармонии. На очереди следующий шаг – компьютерное моделирование с расширением исследований на биотехнологии, нанотехнологии и др.

Здесь еще раз отметим, что корни характеристических уравнений (6) иногда называют «металлическими», т. е. соответственно: золотыми, серебряными, медными и т. д. В действительности все корни, как уравнения (6), так и уравнения (8) являются «золотыми», но разной пробы или, в крайнем случае, «позолоченные», но не серебряные, медные и др., так как все они соответствуют оптимальным («золотым») условиям передачи энергии сигналов (информации) от источника к приемнику через конкретный четырехполюсник с конкретными значениями элементов – продольных  $R_1$  и поперечных  $R_2$  сопротивлений.

## Литература

1. Семенюта, Н. Ф. Применение рекуррентных соотношений к анализу электрических цепей / Н. Ф. Семенюта // Электрические машина, цепи и системы: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, 1971. – Вып. 107. – С. 54–57.
2. Семенюта, Н. Ф. Свойства рекуррентных последовательностей, используемых для анализа электрических цепей / Н. Ф. Семенюта // Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, 1971. – Вып. 95. – С. 28–32.
3. Семенюта, Н. Ф. О связи параметров цепочечных схем с рекуррентными числовыми последовательностями / Н. Ф. Семенюта // Теоретическая электротехника. – Львов: Вища школа, 1974. – Вып. 17. – С. 23–25.
4. Семенюта, Н. Ф. Моделирование линий с распределенными параметрами рекуррентными числами / Н. Ф. Семенюта // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: материалы V межгос. науч. конф. – Минск: БГУ, 1996. – С. 123–124.
5. Семенюта, Н. Ф. Электрическая модель «Золотого сечения» / Н. Ф. Семенюта // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та мистецтві: зб. наук. пр. ВДАУ. – Винница: ВДАУ, 2003. – Вып.15. – С. 330–335.
6. Семенюта, Н. Ф. Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Н. Ф. Семенюта // Гармоничное развитие систем – третий путь человечества. – Одесса: ООО Институт креативных технологий, 2011. – С. 87–93.
7. Семенюта, Н. Ф. О связи рекуррентных числовых последовательных и гиперболических функций / Н. Ф. Семенюта // Применение АВМ и ЭЦВМ к решению некоторых задач механики деформируемых тел: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, – Вып. 114. 1973. – С. 39–43.
8. Семенюта, Н. Ф. О «золотых» режимах работы электрических моделей числовых последовательностей типа Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.19727, 05.11.2014.
9. Семенюта Н. Ф. К тайнам золотого сечения. Евразийский союз ученых (ЕСУ) // Н. Ф. Семенюта // – № 4 (13). 2015. – С. 119–122.
10. Семенюта, Н. Ф. Новое о золотом сечении / Н. Ф. Семенюта // XVII Международ. науч.-практич. конф.: Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке: «Prospero», – № 5 (17). 2015. – С.127–131.
11. Паррот, М. Ф. Гальванические батареи и законы электрического тока / М. Ф. Паррот. – СПб.: Институт инженеров путей сообщения, 1864. – 64 с.
12. Баев, Н. А. Лекции по теории цепей с сосредоточенными элементами / Н. А. Баев, А. П. Удалов. – М.: Связьиздат, 1955. – 276 с.
13. Белецкий А. Ф. Теоретические основы электропроводной связи / А. Ф. Белецкий. – М.: Связьиздат. 1959. – 392 с.
14. Гарновский, Н. Н. Теоретические основы электропроводной связи / Н. Н. Гарновский. – М.: Связьиздат, 1956. – 692 с.
15. Листов, В. Н. Элементарная теория синтеза фильтров / В. Н. Листов. – М.: Трансжелдориздат, 1963. – 170 с.
16. Листов, В. Н. Обобщенная теория синтеза специальных электрических фильтров / В. Н. Листов. – Л.: ЛИИЖТ, 1936. – 116 с.
17. Бонч-Бруевич, М. А. Элементы радиотехники / М. А. Бонч-Бруевич. – М.: Связьтехиздат, 1938. – 264 с.

18. Morgan-Voyce, A. M. Ladder Networks Analysis Using Fibonacci Numbers / A. M. Morgan-Voyce // IRE Trans. Circuit Theory. CT-6.3, 1959. – P. 321–322.
19. Swamy, M. N. S. Properties of the Polynomials Defined by Morgan-Voyce / M. N. S. Swamy // Fib. Quart. 4, 1966. – P. 73–81.
20. Семенюта, Н. Ф. Анализ линейных электрических цепей методом лестничных чисел / Н. Ф. Семенюта. – Гомель: БелГУТ, 2010. – 108 с.
21. Ясинский, С. А. «Золотая пропорция» в электросвязи / С. А. Ясинский. – СПб.: ВУС, 1999. – 164 с.
22. Ясинский, С. А. Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи / С. А. Ясинский. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 239 с.
23. Клайн, М. Математика. Утрата определенности / М. Клайн. – М.: Мир, 1984.
24. Cauer W. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen / W. Cauer. – Leipzig: Becker und Erler. 1941. – 586 s.
25. Собенин, Я. А. Расчет полиномиальных фильтров / Я. А. Собенин. – М.: Связьиздат, 1963. – 213 с.