

А.Н. Шелаев

**ВОЗМОЖНОСТИ РАДИКАЛЬНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ОБЩЕСТВЕННОГО
МНЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ ПРИ МАЛЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ
ПЕРИОДИЧЕСКОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ
(The Tipping Points in public opinion)**

В данной статье, являющейся продолжением работ автора [1.2], проводится моделирование процессов распространения во времени информации (рекламной, пропагандистской) внутри однородных социальных групп на основе численного решения дифференциальных уравнений логистического типа при различных параметрах периодической модуляции суммарной информации смешанного типа - *за* и *против* первоначально имеющегося в сообществе мнения. В результате этих расчётов обнаружены нетривиальные изменения во времени чисел сторонников и противников исходного мнения, в том числе, эффекты их радикальных изменений во времени при малых изменениях величины, частоты и особенно фазы информационных воздействий в начальный момент времени.

Пусть N - число членов однородной социальной группы, в которой распространяется некоторая информация, m - число контактов, завязываемых сторонниками в единицу времени T ($[m]=T^{-1}$), q/N - безразмерная величина ($0 < q/N < 1$), отражающая то, что не каждый контакт в группе привлекает нового сторонника-распространителя полученной информации, $k = m \cdot q/N$, $n(t)$ - число сторонников в момент времени t , n_0 - число сторонников при $t = 0$.

Тогда полагая, что скорость изменения числа сторонников пропорциональна произведению $k \cdot n(t) \cdot (N - n(t))$, получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dn(t)}{dt} = k \cdot n(t) \cdot [N - n(t)] \quad (1)$$

Математическая модель распространения информации, описываемая уравнением (1) может быть развита при использовании нижеследующего

дифференциального уравнения (2) :

$$\frac{dn(t)}{dt} = [\alpha + \kappa \cdot n(t)] \cdot [N - n(t)] \quad (2)$$

При этом если параметр k учитывает распространение информации за счёт контактов внутри группы, то параметр α должен учитывать распространение информации за счёт внешних источников, воздействующих сразу на всю данную группу.

Разделяя переменные в (2) получим соотношение:

$$\frac{1}{\alpha + kN} \cdot \left[\frac{k \, dn}{\alpha + k n} + \frac{dn}{N - n} \right] = dt \quad (3)$$

Интегрируя (3) получим следующие соотношения:

$$n(t) = \frac{-\alpha + C \cdot N \cdot \exp[(\alpha + kN)t]}{k + C \cdot \exp[(\alpha + kN)t]}, \quad C = \frac{\alpha + k \cdot n(0)}{N - n(0)} = const \quad (4)$$

$$n(t) = \frac{-\alpha[N - n_0] + [\alpha + k \cdot n_0] \cdot N \cdot \exp[(\alpha + kN)t]}{k[N - n_0] + [\alpha + k \cdot n_0] \cdot \exp[(\alpha + kN)t]}, \quad n_0 = n(0) \quad (5)$$

Существенным различием уравнений (2) и (1) является то, что для уравнения (1) зависимость отношения 1-й производной $dn(t)/dt$ к $n(t)$ от $n(t)$ представляет собой прямую линию (см. прямую 1 на рис. 1). При $n(t) = 0$ это отношение равно $kN = 10$ для $k = 0.01$, $N = 1000$. При $n(t) = N$ это отношение равно нулю.

При включении внешнего источника информации ($\alpha \neq 0$) исходная прямая превращается в ломаную линию. Излом происходит при $n(t) = n_0 (= 50)$. Причём при малых α ниспадающая часть ломаной близка к исходной прямой, имеющей место при $\alpha = 0$, см. ломаную 2 на рис. 1, реализующуюся при $N = 1000$, $k = 0,01$ и $\alpha = 0,001$. Зависимость отношения $[dn(t)/dt]/n(t)$ от $n(t)$ при $\alpha = 1$ показывает ломаная 3 на рис. 1.

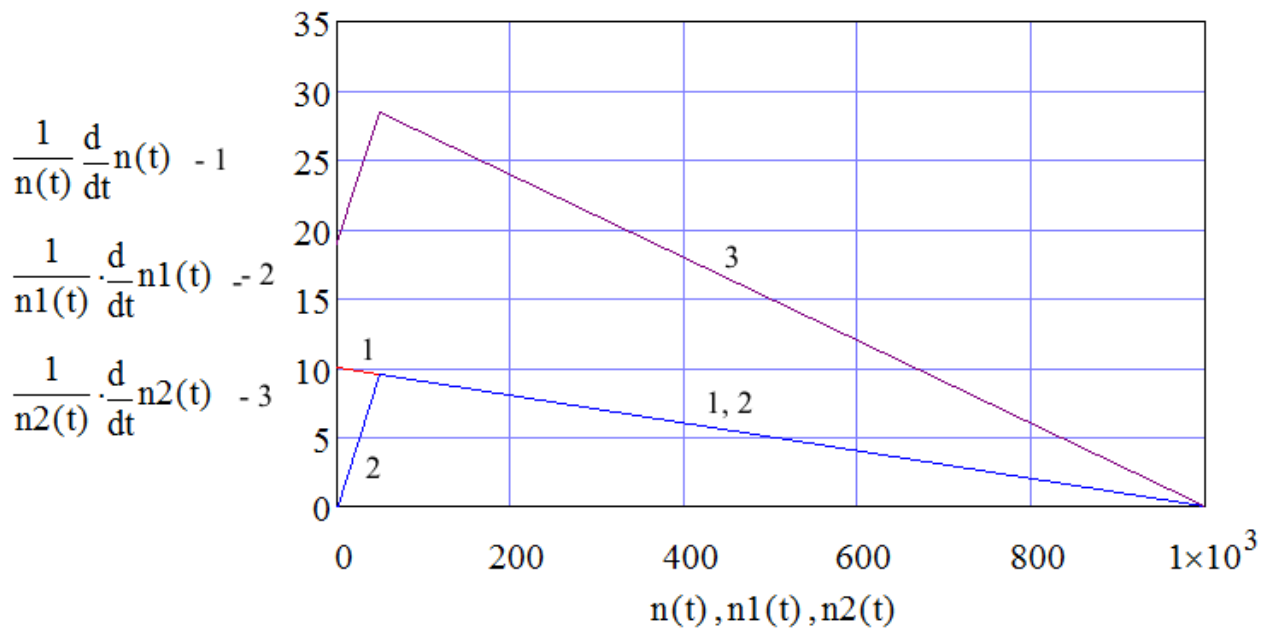


Рис. 1

На рис. 2 показаны зависимости (5) $n(t)$ при $k=0,01$ и различных значениях α : $\alpha_1=0,001$ (кривая 1), $\alpha_2=1$ (кривая 2) и $\alpha_3=10$ (кривая 3). Здесь и далее общая численность сообщества $N=1000$, начальное число сторонников распространяемой информации $n_0=50$.

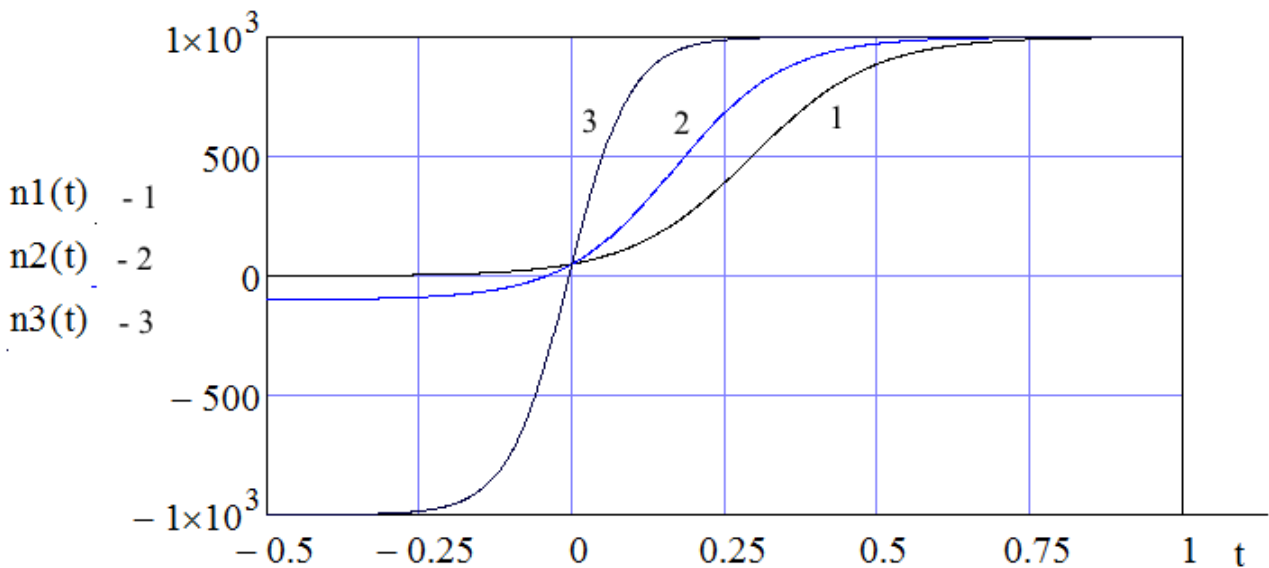


Рис. 2

Важно то, что с ростом α число сторонников распространяемой информации возрастает во времени гораздо быстрее и также стремится к устойчивому

стационарному состоянию $n(\infty) = N$.

В выбранный нами начальный момент времени $t = 0$ все 3 кривые проходят через одно значение $n(0) = n_0 = 50$. Но при предыдущих значениях времени $t < 0$ величины $n(t)$ являются отрицательными.

Этот результат можно попытаться трактовать как наличие в эти (начальные) времена не сторонников, а противников данной информации, которые затем под воздействием получаемой внешней информации изменяют мнение и становятся её сторонниками.

Подчеркнём, что если $\alpha = 0$, то $n(t) > 0$ и при временах $t < 0$, и, таким образом, как и следует ожидать, только за счёт внутреннего обмена уже имеющейся информацией изменения мнения не произойдёт.

В данной статье находились численные решения уравнения (2) при различных видах периодической модуляции коэффициента α .

Прежде всего, использовалась гармоническая синусоидальная модуляция $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, переходящая при $\varphi = \pi / 2$ в косинусоидальную.

Затем использовалась линейная непрерывная «треугольная» модуляция с помощью обратных синусоидальных и косинусоидальных функций:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \arcsin(\sin(\omega t + \varphi)) = \alpha_0(\omega t + \varphi - m\pi) / (-1)^{-m} \quad (6),$$

$$-\pi / 2 \leq (\omega t + \varphi - m\pi) \leq \pi / 2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \arccos(\cos(\omega t + \varphi)) = \alpha_0 \cdot \pm(\omega t + \varphi - 2m\pi) \quad (7),$$

$$0 \leq \pm(\omega t + \varphi - 2m\pi) \leq \pi, \quad \text{"}\pm\text{" при } \omega t + \varphi >, < 0, \quad m >, < 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

И, наконец, использовалась линейная разрывная «пилообразная» модуляция с помощью обратных тангенсоидальных и котангенсоидальных функций:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \arctg(\tg(\omega t + \varphi)) = \alpha_0(\omega t + \varphi - m\pi) \quad (8),$$

$$-\pi / 2 < \omega t + \varphi - m\pi < \pi / 2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \text{arcctg}(\tg(\omega t + \varphi)) = \alpha_0(\omega t + \varphi - m\pi) \quad (9),$$

$$0 < \omega t + \varphi - m\pi < \pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В результате использования различных видов модуляции и соотношений между константами было получено много интересных и нетривиальных зависимостей числа сторонников и противников распространяемой информации.

При больших амплитудах модуляции коэффициента α ($\alpha_0 \gg k$) процесс установления стационарного состояния приобретает длительный колебательный характер, как это показывают рис. 3-6.

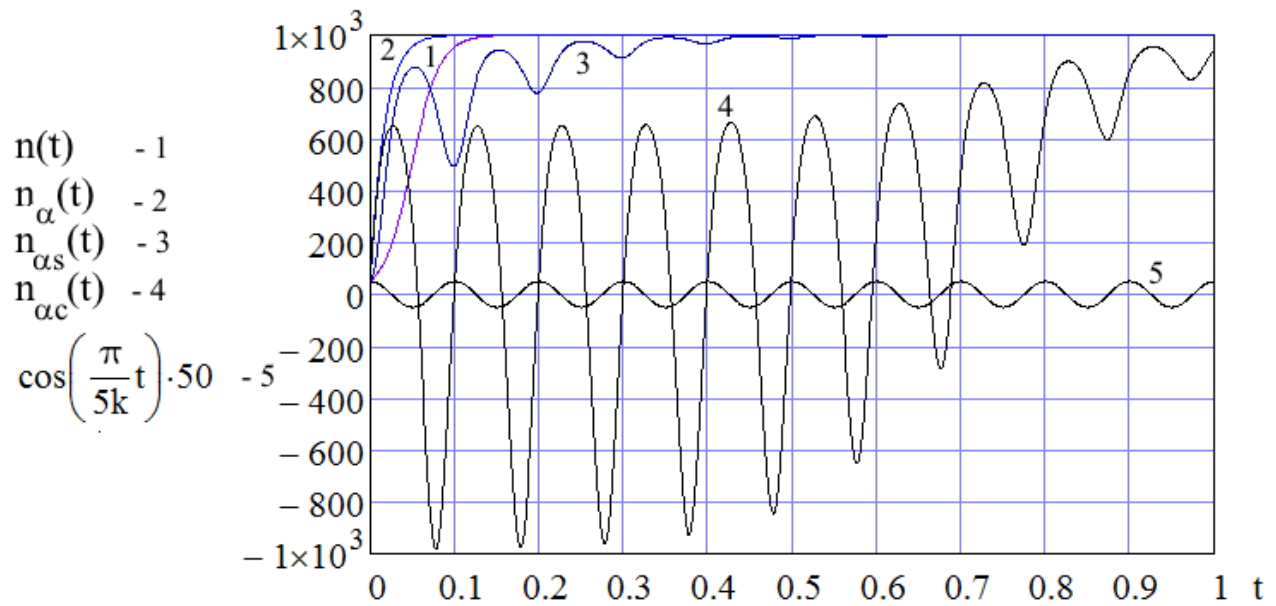


Рис. 3

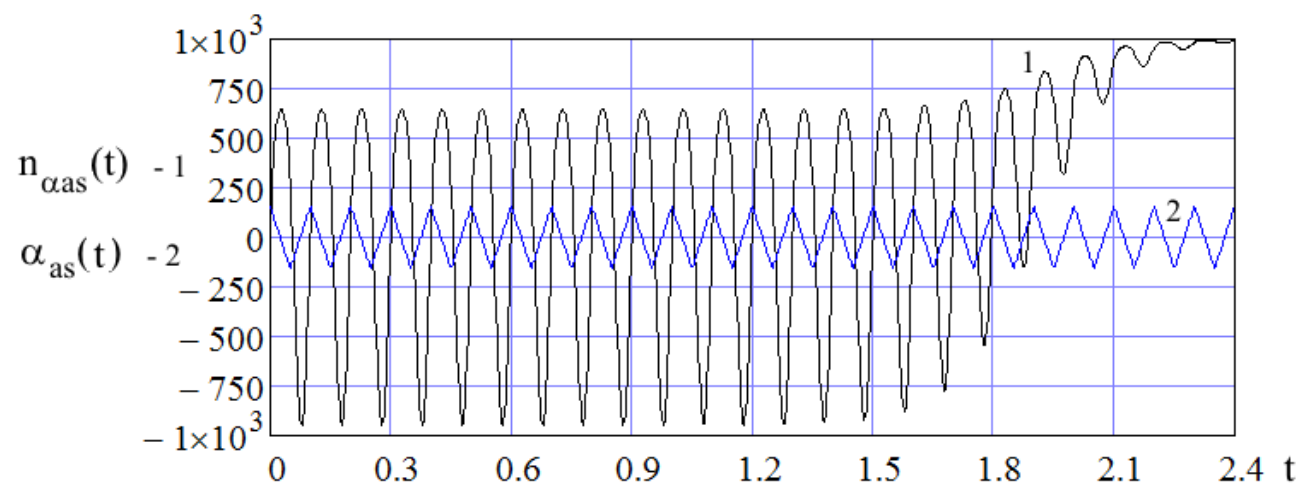


Рис. 4

На рис. 3 для $k = 0,01$, $N = 1000$, $n(t=0) = 50$ показаны зависимости: $n(t)$

для различных значений α : $\alpha_0 = 0$ (кривая 1), $\alpha(t) = \text{const} = 55$ (кривая 2),
 $\alpha(t) = 55 \cdot \sin(\pi \cdot t / 5k)$ (кривая 3), $\alpha(t) = 55 \cdot \cos(\pi \cdot t / 5k)$ (кривая 4).

На рис 4 показана зависимость $n(t)$ (кривая 1) при модуляции α по закону арксинуса: $\alpha(t) = 43,655414 \cdot \arcsin(\sin(\pi \cdot t / 5k + \pi / 2))$ (кривая 2) при $k = 0,01$.

На рис. 5, 6 – зависимости $n(t)$ (кривые 1) при модуляции α по законам разрывных функций арктангенса: $\alpha(t) = 44,115403 \cdot \arctan g(\tan(\pi t / 5k + 0.976505))$ (рис. 5) и $\alpha(t) = 69,848662 \cdot \arctan g(-\tan(\pi t / 5k - 1,017))$ (рис.6) - кривые 2.

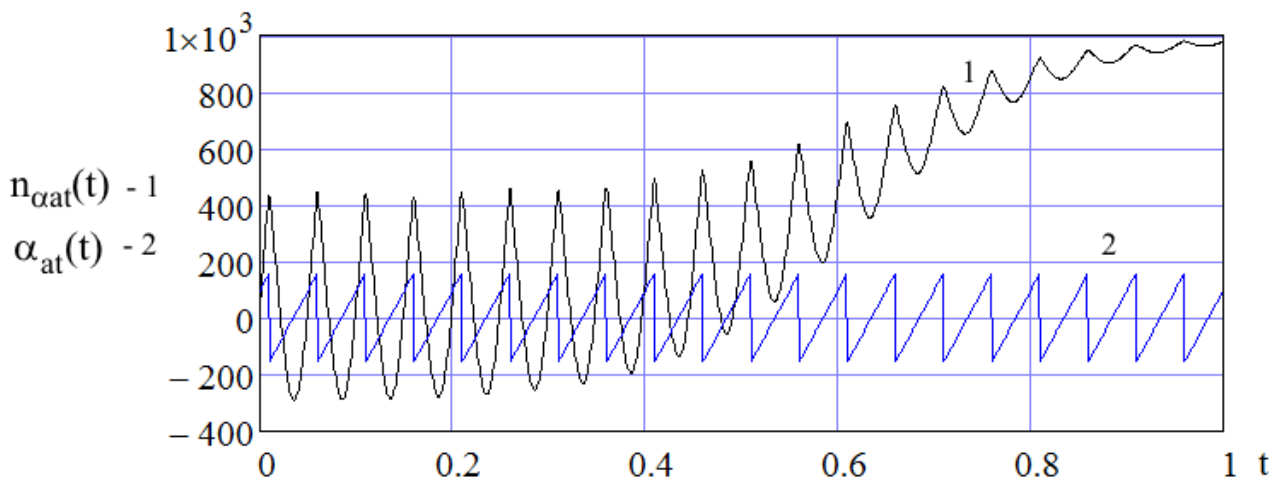


Рис. 5

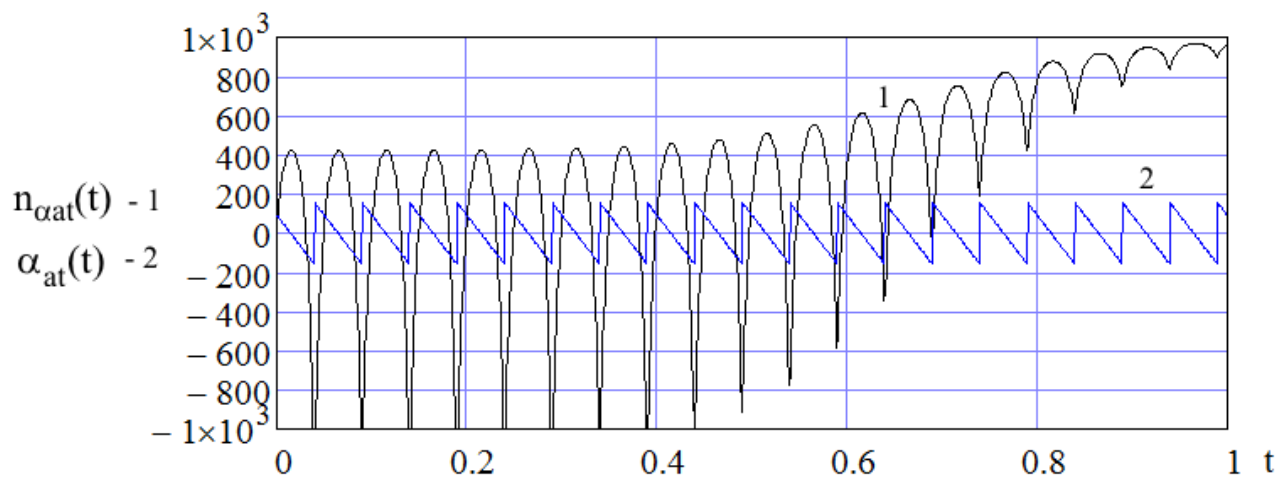


Рис. 6

Укажем, что числовые значения параметров к рис. 3-6 приведены с большой точностью не случайно. Дело в том, что часто изменения параметров даже в 6-м знаке после запятой приводят к существенным изменениям зависимостей $n(t)$.

Так, длительность переходных процессов при малых изменениях параметров, может изменяться более чем в 2 раза (в этой связи интересна книга [3]).

Важно и то, что, как следует из рис. 3-6, форма колебаний $n(t)$ в переходных процессах к стационарному состоянию $n(t \rightarrow \infty) = N$ несимметрична и может быть двух типов: с «заострением» вверху (рис. 5) или внизу (рис.3, 4, 6).

Это означает, что быстрое нарастание числа сторонников некоторого мнения может неожиданно также быстро начать уменьшаться в течение одного периода колебаний (в этой связи вспомним резкие колебания курса криптовалют).

Из проведённых расчётов также следует, что число периодов колебаний выхода на стационарный режим может быть большим (несколько десятков). В результате наблюдатели общественного мнения (и, в частности, игроки на валютных рынках) могут ошибочно уверовать, что такие колебания будут продолжаться вечно.

При низких частотах модуляции в зависимостях $n(t)$ переходные процессы не возникали и выход на стационарное состояние мог осуществляться за время меньшее чем, период модуляции, как это показано на рис. 7.

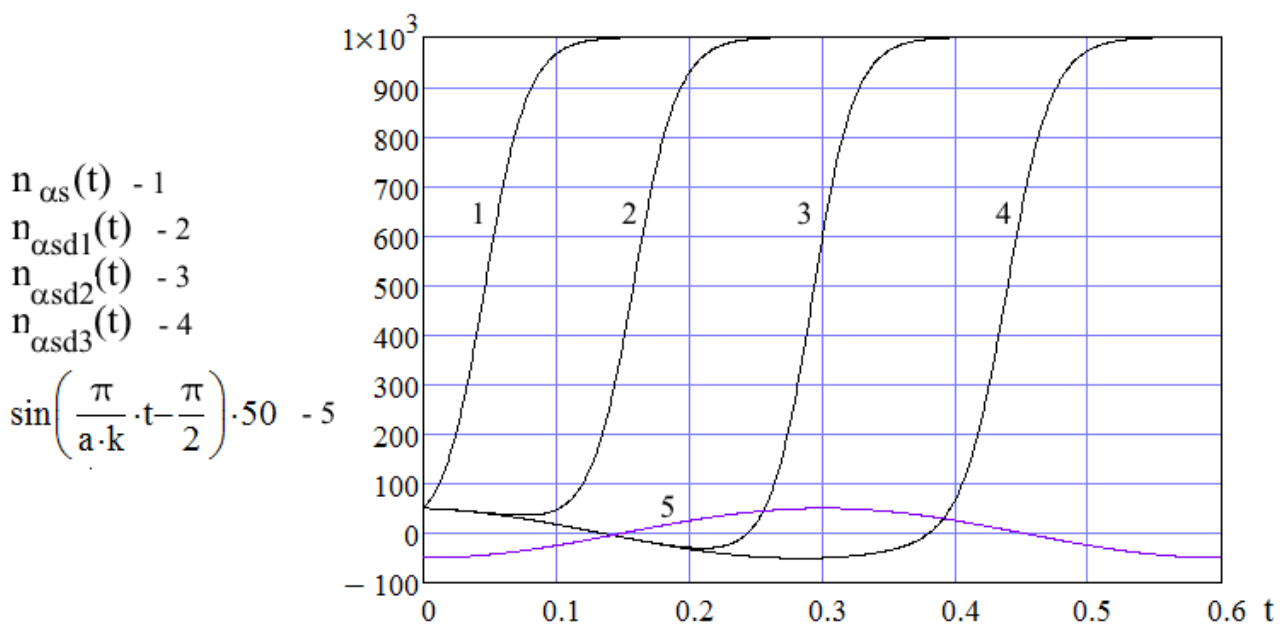


Рис. 7.

Зависимости $n(t)$ на рис. 7 соответствуют разной фазе синусоидальной

модуляции $\alpha(t)$ в начальный момент времени: $\varphi = 0$ (кривая 1), $\varphi \approx 1,560\,794$ (кривая 2), $\varphi \approx 1,570\,940$ (кривая 3), $\varphi = \pi / 2 \approx 1,570\,796$ (кривая 4). Остальные параметры модуляции: $\alpha_0 = 3,100\,01$, $k = 0,06$, $a = 5,004\,353$ (индекс d означает delay - задержка фазы φ в модулирующей функции).

На рис. 8 показаны зависимости $n(t)$ также при разных начальных фазах синусоидальной модуляции, но с более коротким периодом $T_m = 2a \cdot k \approx 0,2163$. Фаза $\varphi = 0$ (кривая 1), $\varphi \approx 1,40$ (кривая 2), $\varphi \approx 1,55$ (кривая 3), $\varphi = \pi / 2$ (кривая 3) $a \approx 5,004\,353$, $k \approx 0,021\,555$.

Из рис. 7, 8 также следует, что при определённых параметрах модуляции возможны интервалы времени, при которых величина $n(t) \approx const$ (кривая 2 на рис. 7 и кривая 4 на рис. 8).

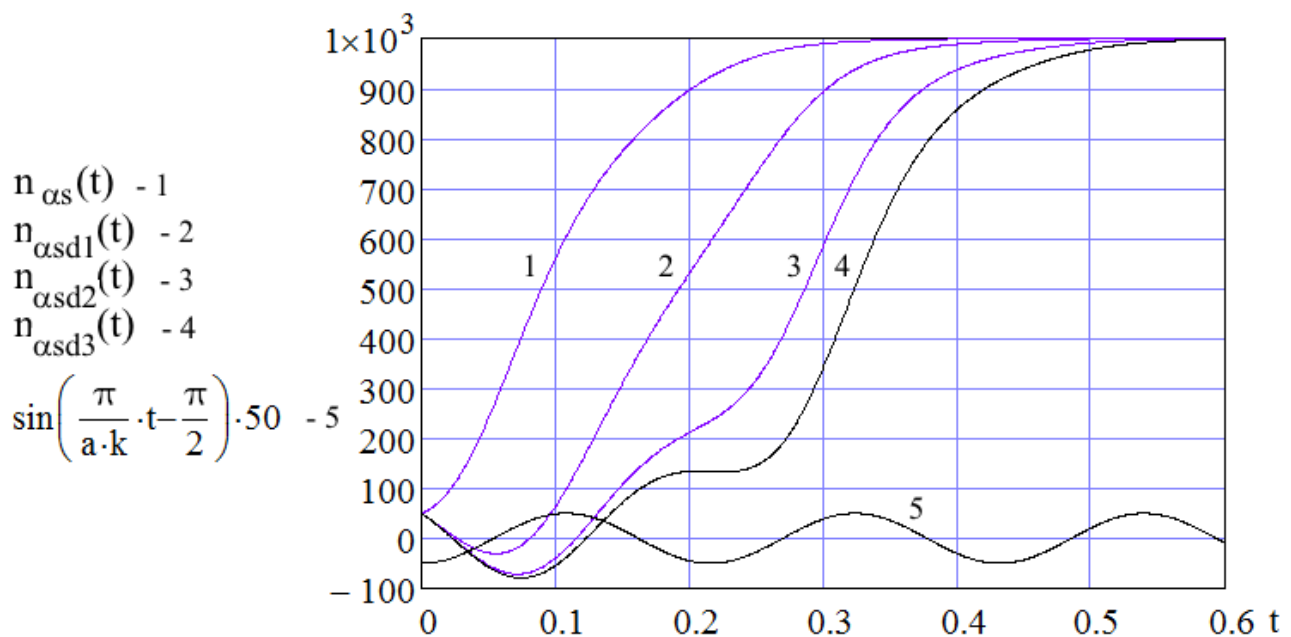


Рис. 8

Важно, что при указанных параметрах фаза $\varphi = \pi / 2$ является аттрактором для зависимостей $n(t)$ на рис. 8, так как при малых отклонениях φ от $\pi / 2$ кривые $n(t)$ почти сливаются. В то же время для рис. 7 фаза $\varphi = \pi / 2$ является репеллером, поскольку при малых отклонениях φ от $\pi / 2$ кривые $n(t)$ резко отдаляются.

На рис. 9, 10 показаны зависимости $n(t)$ при различных значениях фазы φ

модуляции параметра α с помощью обратной тригонометрической функции арксинус $\alpha(t) \approx 2,342871 \cdot \arcsin(\sin(\pi t / ak + \varphi))$ при мало различающихся значениях k : $k = 0,021610$ (рис. 9) и $k = 0,021610068907$ (рис. 10). Параметр $a = 5,004353$.

На рис. 9 для зависимостей $n(t)$ фаза $\varphi = 0$ (кривая 1), $\varphi = -\pi/2 + 0,01$ (кривая 2), $\varphi = -\pi/2 + 0,001$ (кривая 3), $\varphi = -\pi/2$ (кривая 4).

На рис. 10 для зависимостей $n(t)$ фаза $\varphi = 0$ (кривая 1), $\varphi = -\pi/2 + 0,001$ (кривая 2), $\varphi = -\pi/2 + 0,00000001$ (кривая 3), $\varphi = -\pi/2$ (кривая 4).

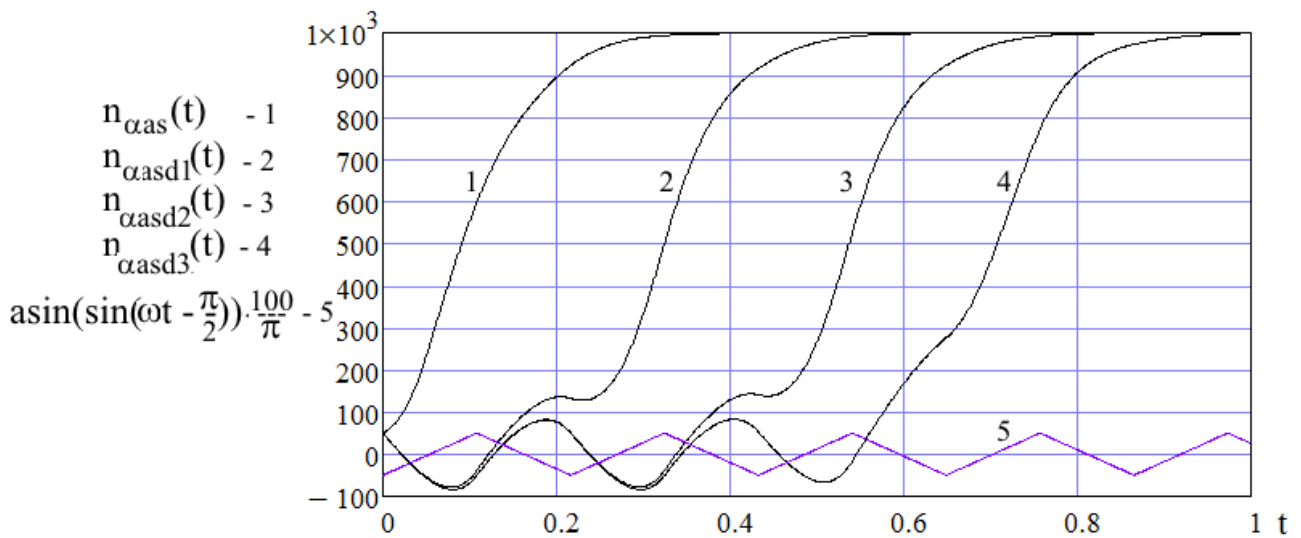


Рис. 9

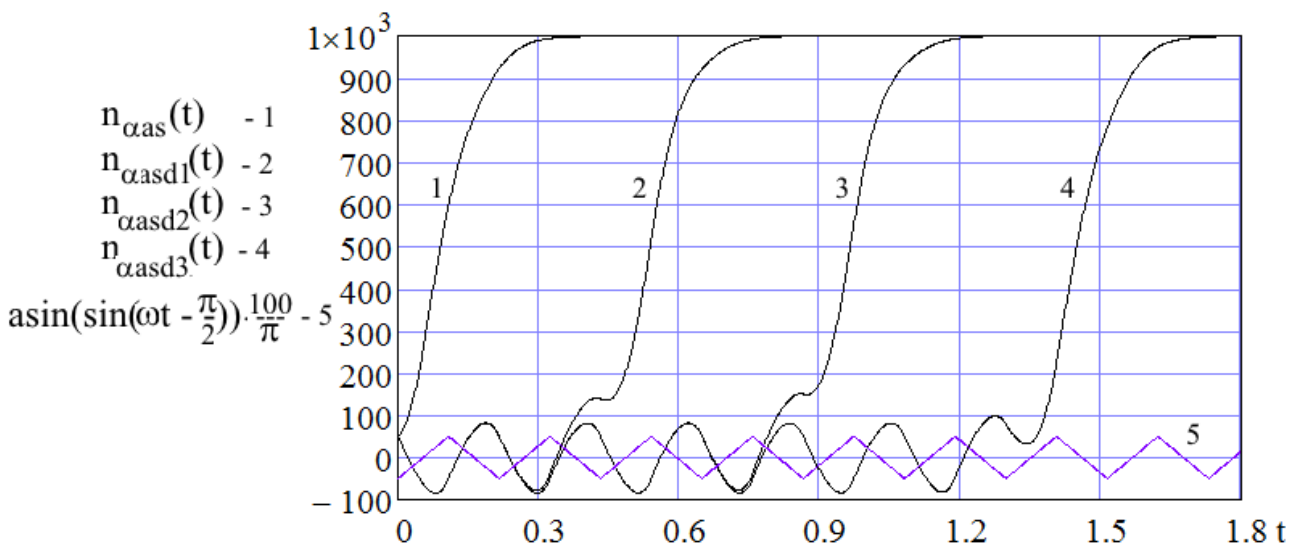


Рис. 10

Из рис. 9, 10 следует, что очень малое изменение параметра k (т.е. частоты модуляции коэффициента α , задающего величину внешнего информационного воздействия) увеличивает длительность переходного процесса почти в 2 раза.

При этом фаза $\varphi = \pi/2$ является репеллером, так как при очень малых изменениях фазы кривые $n(t)$ резко расходятся. В этой связи для численного решения уравнения (2) использовалась универсальная функция AdamsBDF, позволяющая автоматически избирать алгоритм для жёстких и нежёстких обыкновенных дифференциальных уравнений [4]. Но при этом вид решения сильно зависел и от времени интегрирования T . Максимальная длительность переходного процесса была достигнута при $T = 2,999\,999\,990\,001$, при котором $n(t_{\max} = 1,953\,651\,735) = 999,000\,000\,08$, т. е. становится больше 999. При $T = 3$ $n(t_{\max} = 1,779\,749\,826) = 999,000\,000\,02$.

На рис. 11-13 показаны фазовые портреты зависимостей $n(t)$, показанных на рис. 8-10, за времена $T = 5 \cdot 2ak \approx 1,081087$, равные 5 периодам модуляции для рис. 11, 12, и время $T = 3$ для рис. 13.

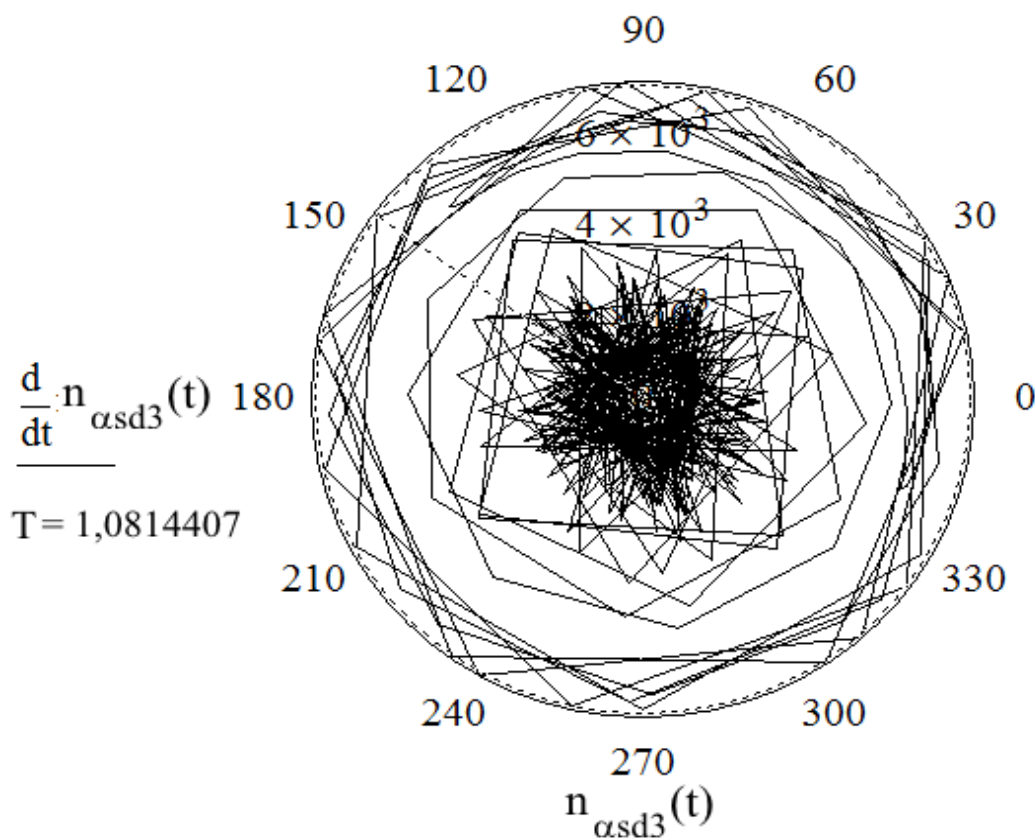


Рис. 11

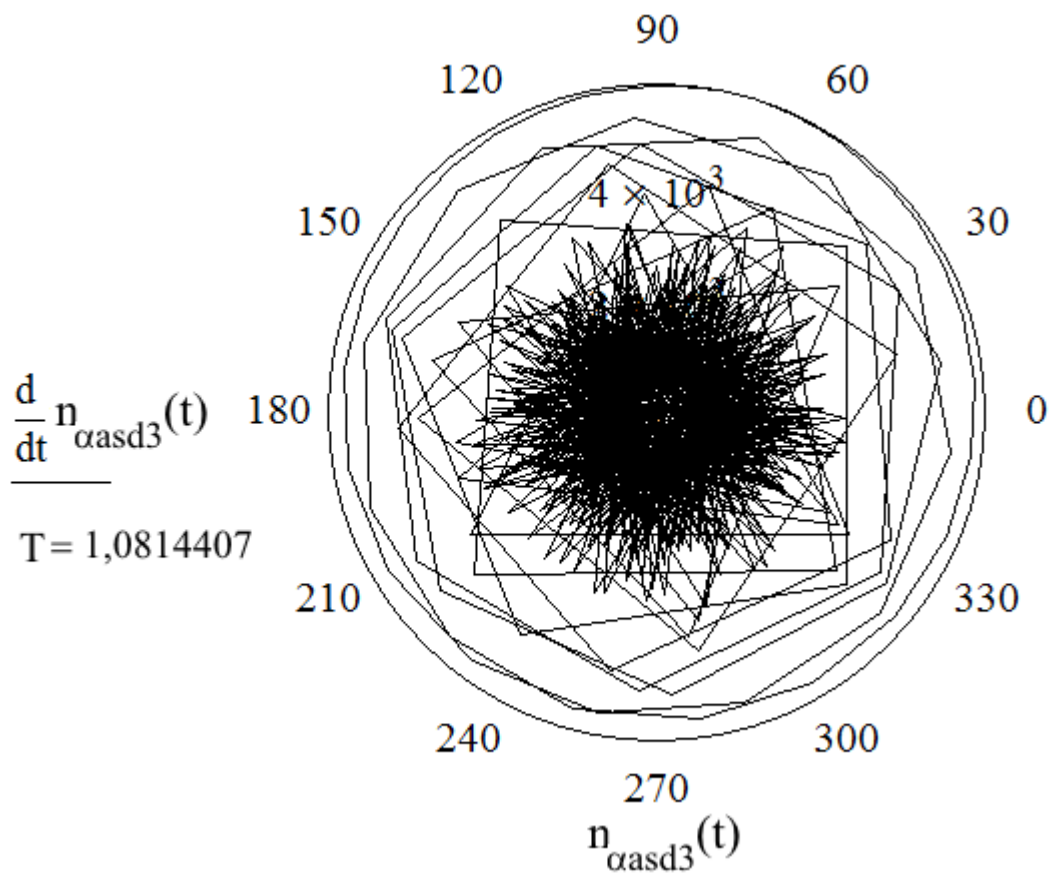


Рис. 12

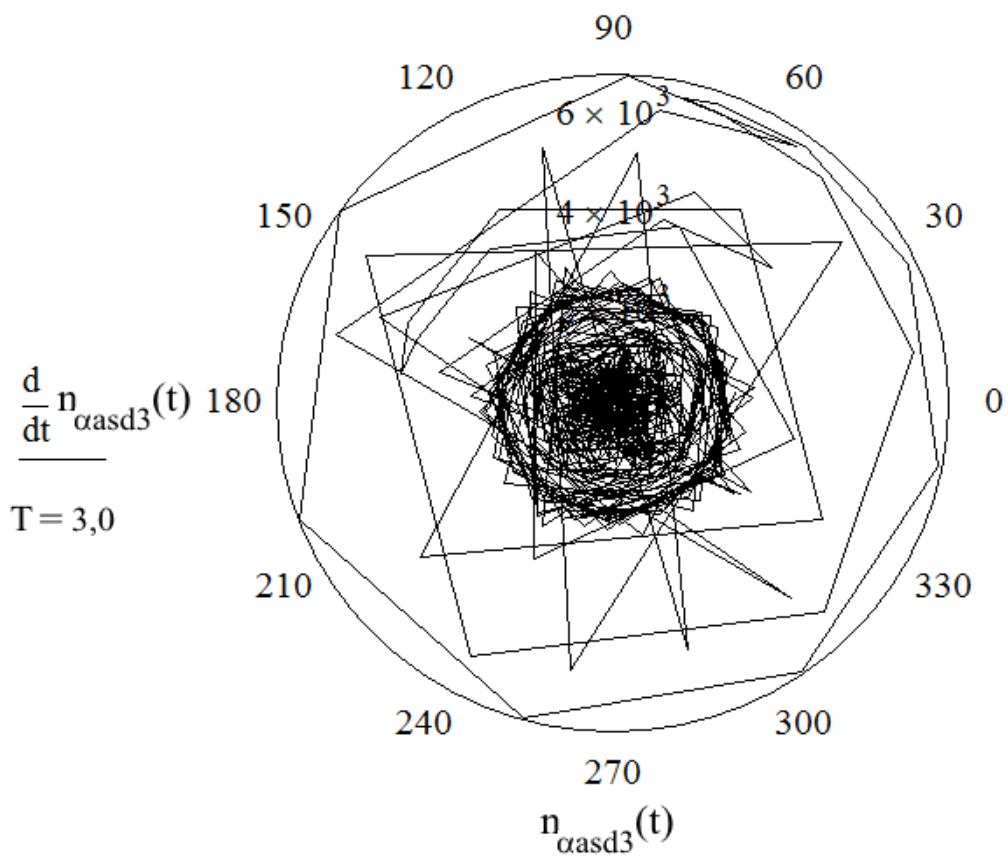


Рис. 13

Таким образом, проведённые расчёты позволили выявить ряд неожиданных и нетривиальных зависимостей при моделировании распространения информации во времени с помощью логистических дифференциальных уравнений с нестационарными параметрами. Найденные эффекты могут быть использованы в конкретных практических (рекламных и пропагандистских) задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.Н.Шелаев*. К проблеме создания адекватных математических моделей для социологических исследований. Академия тринитаризма, М., Эл.77-6567, публ. 24312, 29.02.2018. – С. 1-9.
2. *А.Н.Шелаев*. Моделирование процессов распространения информации во времени на основе решения дифференциальных логистических уравнений с нестационарными параметрами. Академия тринитаризма, М., Эл.77-6567, публ.24342, 14.03.2018. – С.1-9.
3. *Malcolm Gladwell*. The Tipping Point: How Little Things Can Make a Big difference. - Little, Brown and Company, 2000. - 288 с.
Малкольм Гладуэлл. Переломный момент. Как незначительные изменения приводят к глобальным переменам. М.: Альпина Паблишер, 2012. - 256 с.
4. *А.А. Самарский, А.П. Михайлов*. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Приёмы. М., Физматлит. 2005.- 320 с.