Ткаченко И. С.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГАРМОНИИ
(расширено и уточнено).

Происходящее в природе и обществе процессы имеют своими оценками качественные и количественные характеристики. Одну из них очень часто используют как качественную характеристику - это гармония(гармоничность), исследованию которой посвящено достаточное количество публикаций, основанных на статических свойствах пропорции золотого сечения. Однако, принятие эффективных количественных решений требует учитывать динамику, присущую всему изменяющемуся как в социально-экономическом обществе так и в природе. При этом динамизм процесса развития единого целого определяется скоростью изменения его состояния на заданном отрезке времени [0,T] с сохранением всех его структурных пропорций, что позволяет предположить о наявности такой системной характеристики как динамическая гармония и дадим ее наше авторское определение.

Определение. **Динамическая гармония** - *это отражение и сохранение свойств: числа Фидия и золотого сечения, экспоненциальной золотой функции, функций Фибоначчи и функций Люка, всеми составляющими элементами конкретных объектов, систем или процессов в каждый момент времени* t *своего развития на всем промежутке* [0,T] *ее функционирования.*

Это определение также некоторым образом согласуется с анализом интегральных кривых для отношений золотой непрерывной пропорции, изложенному С.Л.Василеко в статье[1].

Рассморим некоторые наиболее характерные математические модели соответствующие заданному определению *динамической гармонии*.

Простейшая математическая модель, имитирующая процесс развития, объекта, системы или процесса представляется как определение скорости роста ($\frac{dx}{dt}$) их объема пропорционально величине его текущего значения x:

$$\frac{dx}{dt} = px, \qquad (1)$$

где p - постоянная или коэффициент скорости роста.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$x(t) = x_0 e^{pt} \qquad (2)$$

x_0 - постоянная интегрирования, или

$$x(t) = x_0 exp(pt), \qquad (2')$$

которое соответствует экспоненциальному росту.

Учитывая что p задается произвольно, представим его значение как

$$p = kln\Phi, \qquad (3)$$

где k - в свою очередь также определяется условиями функционирования моделируемого объекта, а $\Phi -$ это число Фидия: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339...$, а значение его логарифма: $ln\Phi = 0,481211825...$, что позволяет выделить отдельное решение соответствующее гармоничному экспоненциальному росту

$$x(t) = x_0 e^{(kln\Phi)t} = x_0 (e^{(ln\Phi)})^{kt} = x_0 \Phi^{kt} = x_0 gold(kt). \qquad (4)$$

Это решение при $x_0 = 1$ и $k = 1$ соответствует *экспоненциальной золотой функции*

$$x(t) = \Phi^t = gold(t),\ t \in (-\infty,\ +\infty), \qquad (5)$$

а в начальный момент времени t =0 ее значение равно числу Фидия, т.е. $x(0) = \Phi = 1,6180339...$, что является одним(со знаком минус) из корней решения квадратного уравнения, полученного из соотношения определяющего золотое сечение, и которое в википедии определяется таким образом:

Золотое сечение — деление отрезка на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине[2].

Кроме этого, альтернативным определением есть также отношение целого к большей части, как большей части к меньшей.

Если целое это 1, а большая часть это x , и $1 - x$ - меньшая часть, тогда справедливо статическое соотношение

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}. \qquad (6)$$

Знак равенства (=) в математике, в логике и других точных науках — символ, который пишется между двумя идентичными по своему значению выражениями[2], но не любое равенство является тождеством и в данном случае

равенство (6) является тождеством только при $x = \phi = 0,6180339...$, а поэтому оно (6) не является тождеством в целом.

Предположим, что каждая часть равенства (6) представляет собой эквивалентные(идентичные) скорости их изменения, и тогда, аналогично как и для случая (1), это соответственно будут:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad (7)$$

а так же

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{1-x}. \qquad (8)$$

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (7) и (8), получим соотношения, которые моделируют пути движения (развития) каждой из них

$$u = \int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + ln\alpha = ln\,|\alpha x|, \qquad (9)$$

$$v = \int \frac{xdx}{1-x} = -\int \frac{(x-1+1)dx}{x-1}, \qquad (10)$$

или

$$v = -\int dx - \int \frac{d(x-1)}{x-1} = -x - ln\,|x-1| - ln\beta = -x - ln\,|\beta(x-1)|, \qquad (11)$$

где α и β - это произвольные постоянные интегрирования.

В силу того, что скорости роста одинаковы, то и пройденные пути каждой из частей будут также равные, т.е. при $u = v$, имеем логарифмическое соотношение

$$ln\,|\alpha x| = -x - ln\,|\beta(x-1)|, \qquad (12)$$

или, потенцируя (12), получим соотношение:

$$\alpha\beta x(x-1) = e^{-x}, \qquad (13)$$

а, полагая, что $\alpha = \beta = 1$, имеем уравнение

$$x^2 - x - e^{-x} = 0, \qquad (14)$$

приближенным решением которого является значение (**обращаю внимание читателя на значение корня этого уравнения**)

$$x = \sqrt{5} - 1 = 2 \cdot \phi = 2 \cdot 0,618033989 = 1,236067978 \qquad (15)$$

с точностью $\Delta = 0,00127...$, или точнее это точка пересечения функции

$$y = x^2 - x - e^{-x} \qquad (16)$$

с осью абсцис и при $x = 0$ с осью ординат $y = -1$, которая и представляет собой собственно *динамическую гармоническую модель* процесса функционирования целостного объекта - системы.

Задав значения постоянных интегрирования в виде $\alpha = e^{-\varphi}$ и $\beta = 1/(2 - \sqrt{5})$, и подставив их в (13), получим уравнение вида:

$$\frac{e^{-\varphi}}{(2-\sqrt{5})} x(x-1) = e^{-x} , \qquad (14^*)$$

решением которого есть значение золотой пропорции $x = \varphi$, а функцией *динамической гармонии* будет

$$y = \frac{e^{-\varphi}}{(2-\sqrt{5})} x(x-1) - e^{-x} \qquad (16^*)$$

Следовательно, можно считать, что, задавая конкретные значения произвольных постоянных интегрирования, есть возможность получать функции подобные (16) и (16*), которые моделируют реальную **динамическую гармонию поведения целостного объекта.**

Справедливость соотношения(16) проверим следующим образом: к соотношению(14) применим в обратном порядке следующие математические операции:

-разделим на две части $x^2 - x = e^{-x}$ или $x(x-1) = e^{-x}$ и

-прологарифмируем его $ln|x| + ln|(x-1)| = -x$, а теперь еще и

-продифференцируем $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -1$, или $\frac{1}{x} = -1 - \frac{1}{x-1} = \frac{-x+1-1}{x-1} = \frac{x}{1-x}$ и

окончательно возвращаемся к равенству(6): $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$.

Динамизм процессов, происходящих в социально-экономических системах и природе, моделируется также и дифференциальным уравнением второго порядка. В качестве примера рассмотрим моделирующее развитие объекта, системы или процесса однородное с постоянными коэффициентами дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + py' - qy = 0, \qquad (17)$$

для которого характеристическим уравнением является квадратное уравнение

$$k^2 + pk - q = 0 \qquad (18)$$

при $p = q = 1$ с корнями: $k_1 = -\Phi = -1,6180339...$, $k_2 = \Phi^{-1} = \varphi = 0,6180339...$, но *только второй корень* k_2 *является удовлетворяющим определению золотой*

пропорции (6), а первый k_1 − только удовлетворяет решению уравнения $k^2 + k - 1 = 0$, но для соотношения определяющего золотую пропорцию(6) он будет сторонним корнем.

А вот уравнение (18) является основанием для задания обобщенного соотношения золотой пропорции (6) и в этом случае эта пропорция имеет вид

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{q-px} \quad . \qquad (19)$$

Пусть $a = q/p$ общесистемный показатель отношения спада к росту, тогда эта пропорция может быть предсталена так:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \ , \qquad (20)$$

или его правая часть будет такой

$$\frac{x}{a-x} = -1 - \frac{a}{x-a} \ . \qquad (21)$$

Интегрируя отдельно левую часть (20), получим

$$\int \frac{adx}{x} = a\int \frac{dx}{x} = alnx + ln\alpha = ln\alpha x^a, \qquad (22)$$

а проинтегрировав его правую часть в виде (21) имеем

$$\int \frac{xdx}{a-x} = \int(-1 - \frac{a}{x-a})dx = -\int dx - a\int \frac{d(x-a)}{x-a} = -x - ln\beta(x-a)^a \ . \qquad (23)$$

Приравняем правые части (22) и (23)

$$ln\alpha x^a = -x - ln\beta(x-a)^a \ , \qquad (24)$$

или

$$ln\alpha x^a + ln\beta(x-a)^a = -x, \qquad (24')$$

а потенцируя его, получаем уравнение

$$\alpha\beta x^a(x-a)^a = e^{-x}, \qquad (24'')$$

определяющее обобщенную функцию ***динамической гармонии*:**

$$y = \alpha\beta x^a(x-a)^a - e^{-x}, \qquad (25)$$

которая при постоянных интегрирования $\alpha = \beta = 1$ имеет отдельное представление

$$y = x^a(x-a)^a - e^{-x} \qquad (26)$$

и кроме этого, при $p = q = 1$ имеем частный случай соответствующий ранее рассмотренному варианту(14).

Следует обратить еще раз внимание на дифференциальное уравнение (17)

$$y'' + py' - qy = 0,$$

которое при $p = ln\Phi$, $q = 2 \cdot ln^2\Phi$, то есть при общесистемном показателе отношения спада к росту

$a = q/p = 2 \cdot ln^2\Phi/ln\Phi = 2 \cdot ln\Phi = 2 \cdot 0,481215417 = 0,962430833$,

или отношения роста к спаду будет обратная ему величина $a^{-1} = 1,039035706$ имеет решением *экспоненциальную золотую функцию*

$$y(t) = \Phi^t = gold(t). \qquad (27)$$

Дифференцируем (27) дважды

$$y'(t) = (\Phi^t)' = (ln\,\Phi)\Phi^t ,$$

$$y''(t) = (\Phi^t)'' = (ln^2\Phi)\Phi^t$$

и подставив их результат в (17)

$$(ln^2\Phi)\Phi^t + ln\Phi\,(ln\,\Phi)\Phi^t - 2ln^2\Phi\,\Phi^t = 0, \qquad (28)$$

получим тождество при $\forall t \in [0, T]$, где левая и правая части соотношения одинаковы: $0 \equiv 0$

Этот пример показывает что не только *число Фидия* и *золотое сечение,* но и *экспоненциальная* з*олотая функция* также моделируют ***динамическую гармонию***.

Оказывается что и *гиперболические функции Фибоначчи и функции Люка* также ее моделируют, выделяя из общих решений именно те, которые соответствуют динамической гармонии, о чем свидетельствует доказательство следующей теоремы[3].

Теорема. Если потенциальная энергия частицы в силовом поле постоянная и равна

$$U = (1 + (2ln\Phi)^2)E , \qquad (29)$$

то решением стационарного уравнения Шрёдингера[4]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad (30)$$

для одномерного движения является волновая функция вида гиперболической функции косинуса Фибоначчи :

$$\psi(x) = (1/2ln\,\Phi)^2 cf\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x , \qquad (31)$$

которая непрерывная, дважды дифференцируемая и отличная от нуля на всей числовой оси.

Кроме этого примера, гиперболические функции Фибоначчи и функции Люка применяются и для решения дифференциального уравниния в частных

производных гиперболического типа, которые моделируют колебательные процессы струны и стержня, звуковые, электромагнитные, газов, а также многие другие

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (32)$$

имющее вид

$$u(x,t) = sfx \cdot sfat = (cl(at+x) - cl(at-x))/5 \ , \qquad (33)$$

$$u(x,t) = cfx/a \cdot sft = (cl((x/a)+t+1) + cl((x/a)-t))/5 \ , \qquad (34)$$

$$u(x,t) = clx \cdot cl(t/a) = cl(x+t/a) + cl(x-t/a) \ . \qquad (35)$$

Решение волнового уравнения(32) определяется методом Фурье как произведение двух функций одной переменной, то есть

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(at), \qquad (36)$$

которые удовлетворяют конкретным краевым и начальным условиям.

Предположим, что такими функциями могут быть $X(x) = sfx$ и $T(at) = sfat$ с корректирующим коэффициентом a и тогда (36) примет вид

$$u(x,t) = sfx \cdot sfat \ . \qquad (37)$$

Учитывая то, что функции Фибоначчи и функции Люка являются непрерывно дифференцируемыми, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = sfat \cdot \frac{2ln\Phi}{\sqrt{5}} \cdot clx; \qquad (38)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = sfat \cdot (2ln\Phi)^2 \cdot sfx; \qquad (39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{2ln\Phi}{\sqrt{5}} \cdot clat \cdot sfx; \qquad (40)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (2ln\Phi)^2 sfat \cdot sfx \qquad (41)$$

подставим значения для вторых частных производных (39) и (41) в уравнение (32) получим

$$a^2 (2ln\Phi)^2 sfat \cdot sfx - a^2 \cdot sfat \cdot (2ln\Phi)^2 \cdot sfx \equiv 0, \qquad (42)$$

что и доказывает предположение о возможности решения волнового уравнения (32) с помощью функций Фибоначчи и функций Люка[5].

Рассмотрим еще один из вариантов построения модели *динамической гармонии*. Пусть состояние объекта в конкретный момент времени t на промежутке [0,T] характеризуется функцией развития $x(t)$ с показателем p, функция $y(t)$ в это же время сдерживает его развитие с показателем q, то есть имеет место линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = qy\,, \qquad (43)$$

но при этом скорость сдерживания роста определяется в свою очередь как дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = x - py\,. \qquad (44)$$

Линейные лифференциальные уравнения (43) и (44) составляют систему, которая сводится к однородному дифференцальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x'' + px' - qx = 0. \qquad (45)$$

у которого характеристическим уравнением является квадратное уравнение

$$k^2 + pk - q = 0 \qquad (46)$$

с корнями $k_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, $k_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ и при этом $k_1 \cdot k_2 = -q$.

Следовательно, решением дифференциального уравнения (45) является функция

$$x(t) = \alpha e^{tk_1} + \beta e^{tk_2}\,, \qquad (47)$$

где α и β произвольные постоянные интегрирования. Пусть их значения $\alpha = \beta = 1$, тогда решение однородного дифференциального уравнения(45) примет вид:

$$x(t) = e^{tk_1} + e^{tk_2}\,, \qquad (48)$$

а чтобы получить вид функции $y(t)$ найдем первую производную от $x(t)$

$$x'(t) = k_1 e^{tk_1} + k_2 e^{tk_2}\,, \qquad (49)$$

и подставим в (43): $k_1 e^{tk_1} + k_2 e^{tk_2} = qy(t)$,

$$y(t) = (k_1 e^{tk_1} + k_2 e^{tk_2})/q\,. \qquad (50)$$

Приняв значения показателей роста и спада равными единице, что определяет не пренудительное развитие объекта, т.е. $p = q = 1$, получим что корни уравнения (46) соответствуют золотой пропорции

$$k_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2} = \phi = 0,6180339...$$

и числу Фидия со знаком минус

$$k_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2} = -\Phi = -1,6180339...\,,$$

то есть при этих значениях получили частное решение по моделированию ***динамической гармонии*** системного развития некоторого объекта

$$x(t) = e^{\phi t} + e^{-\Phi t}\ , \qquad (51)$$

$$y(t) = \phi\ e^{\phi t} - \Phi e^{-\Phi t}\ . \qquad (52)$$

Если предположить что единица времени развития объекта есть $t = \tau\, ln\ \Phi$, и учесть соотношение $\Phi = e^{ln\Phi}$, получим уравнения развития целостного объекта для роста (53) и сдерживания (54) что собстенно и определяет моделирование ***динамической гармонии***

$$x(t) = x(\tau\, ln\ \Phi\ ) = \Phi^{\phi\tau} + \Phi^{-\Phi\tau} = gold(\phi\tau) + gold(-\Phi\tau) \quad (53)$$

$$y(t) = y(\tau\, ln\ \Phi) = \phi\ \Phi^{\phi\tau} - \Phi\Phi^{-\Phi\tau} = \phi gold(\phi\tau) - \Phi gold(-\Phi\tau)\ . \quad (54)$$

Таким образом, проведенный анализ присутствия числа Фидия и свойств золотого сечения, экспоненциальной золотой функции, функций Фибоначчи и функций Люка в моделях некоторых систем, процессов и т.п., позволяют утверждать о том, что предложенный вариант определения ***динамической гармонии*** является объективной количественно выраженной характеристикой их функционирования в реальных условиях.

Возвратимся к определению золотого сечения приведенного в википедии и представим его в виде следующего соотношения

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \qquad (6^*)$$

К равенству (6*) применим этот же подход что и (6). Пусть левая и правая части представлены как первые производные

$$\frac{du}{dx} = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1, \qquad (55)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{1}. \qquad (56)$$

Проитегрировав их получим

$$u = \int \frac{1}{x} dx - \int 1 \cdot dx = lnx - x + \alpha \qquad (57)$$

$$v = \int x dx = x^2/2 + \beta \qquad (58)$$

и предполагая равенство расстояний $u = v$ получим

$$lnx - x + ln\alpha = x^2/2 + \beta \qquad (59)$$

$$2ln\ \alpha x = x^2 + 2x + \beta. \qquad (60)$$

Зададим значения произвольным интегральным постояным $\alpha = e^2$,

$\beta = ln(-1+\sqrt{5})$, и получим уравнение

$$lnx - x + lne^2 = x^2/2 + ln(-1+\sqrt{5}), \qquad (61)$$

корнем решения которого есть значение удвоенной величины золотой пропорции

$$x = 2\phi = (-1+\sqrt{5}), \qquad (62)$$

а функцией ***динамической гармонии*** примем

$$y = x^2 + 2x - 2lnx + 2ln(-1+\sqrt{5}) - 4, \qquad (63)$$

а, задав $\alpha = e^{\Phi/2}$ и $\beta = 2ln\phi$, получим уравнение

$$2lnx + \Phi = x^2 + 2x + 2ln\phi \qquad (64)$$

с корнем соответствующим золотому сечению: $x = \phi$, а функцией **динамической гармонии** будет

$$y = x^2 + 2x - 2lnx + 2ln\phi - \Phi. \qquad (65)$$

Соотношения (6) и (6*), являясь взаимообратными в своем представлении, способствуют и взаимообратным процедурам при моделировании динамической гармонии соответствующей золотому сечению.

Выводы.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при математическом моделировании отдельных реальных процесов социально-экономического или природного характера возможно выделять те из них, которые соответствуют ***динамической гармонии*** определяемой числом Фидия, характеризуются свойствами золотой пропорции, экспоненциальной золотой функции, функций Фибоначчи и функций Люка.

Список использованной литература.

1.С.Л. Василенко, Интегральные кривые непрерывной золотой пропорции // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.23772, 28.09.2017

2.https://ru.wikipedia.org/ **Золотое сечение** и Знак равенства .

3. И.С. Ткаченко, Гиперболические функции Фибоначчи и решение одномерного стационарного уравнения Шрёдингера // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.23185, 24.03.2017

4.Астахов А.В., Широков Ю.М. Курс физики:Учебное пособие.-В 3-х томах.Т.111. Квантовая физика/Под ред. Широкова Ю.М. — М.: Наука.Главная

редакция физико-математической литературы.1983.С.35-39.

5. ТкаченкоІ.С,ТкаченкоМ.І.Моделювання гармонійного коливального процесу на основі функцій Фібоначчі та Люка // Інформаційні технологіі та комп′ютерна інженерія. -2008.-№3(13). С.26-31.

P.S. Благодарю “отзывчивых” читателей таких, как госпожа Л.В.Батова и господин А.Н.Шелаев открыто высказавших свое не понимание сути идеи по моделированию динамической гармонии, а также тех, кто косвенно на неё намекающих.

Это позволило нам окончательно убедится в правельности выполненного ранее исследования и усовершенствовать его, а также уточнить само определение динамической гармонии.