Белянин В.С.

ТРИ ЗАДАЧИ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРАПЕЦИЕЙ: ОТ ДРЕВНОСТИ ДО НАШИХ ДНЕЙ

– Располагая этой информацией, вы можете прийти к какому-нибудь правильному заключению.
Сэр Артур Конан Дойль, Знак четырёх

Три задачи с прямоугольной трапецией, представленные ниже, можно с определённой долей условности объединить. Одна просматривается в глубине тысячелетий, другая пришла из прошлого века и третья сформулирована в этом месяце.

Изложу их в обратном порядке.

1. В недавней статье [1] С.Л. Василенко показал, что в прямоугольной трапеции при перпендикулярности диагоналей и равенстве одной из диагоналей одному из оснований отношение оснований трапеции соответствует золотому сечению.

Результат интересный и его можно поместить в золотоносную копилку.

Следует отметить, что прямоугольных трапеций, да и не только прямоугольных, с «золотым» отношением оснований необозримое множество. Однако, условие перпендикулярности диагоналей, заявленное в представленной задаче, позволяет легко осуществить геометрическое построение такой трапеции с помощью циркуля и линейки.

2. Вторая задача с прямоугольной трапецией получила звонкое название «*Колодец Лотоса*» [1, 2]. Её смысл может быть сформулирован следующим образом.

В прямоугольной трапеции длины диагоналей равны 2 и 3-м единицам. Точка пересечения диагоналей расположена на расстоянии 1-й единицы от вертикальной боковой стороны. Найти высоту трапеции.

Алгебраическое решение этой задачи приводит к уравнению четвёртой степени.

Построить геометрически такую трапецию с помощью циркуля и линейки не представляется возможным.

В этом заключена изюминка этой задачи – решение есть, геометрического построения с помощью циркуля и линейки нет.

Эта трапеция – геометрический фантом с точки зрения древнегреческой математической традиции.

3. Третья задача с прямоугольной трапецией, которую считаю логичным присоединить к упомянутым выше задачам, будоражила умы математиков более 22-х столетий. Это знаменитая задача древности об удвоении куба – *требуется построить ребро куба, который по объёму был бы в два раза больше данного куба*.

Пусть ребро исходного куба равно a, а ребро искомого куба – x. Тогда задача об удвоении куба сводится к геометрическому решению кубического уравнения:

$$x^3 = 2a^3 \quad \text{или} \quad x = a\,\sqrt[3]{2}.$$

Так как древнегреческие математики при геометрических построениях циркуль и линейку предпочитали всем другим инструментам, то все старания построить $\sqrt[3]{2}$ успехом не увенчались.

Как происхождение этой задачи, так трудности, связанные с её решением, дали повод к возникновению красивых легенд.

Одним из первых древнегреческих математиков, сделавшим решающий шаг в решении этой задачи, был знаменитый геометр Гиппократ Хиосский (V в. до н.э.), который свёл задачу об удвоении куба к следующей**:** по двум заданным отрезкам a и $2a$ построить два других отрезка x и y, таких, что

$$a : x = x : y = y : 2a. \qquad (1)$$

В самом деле, из этой непрерывной пропорции вытекает $x^3 = 2a^3$.

После такого решительного продвижения вперёд появилось множество оригинальных решений, с использованием, в основном, конических сечений.

Остановлюсь только на одном решении, приписываемом Платону, в котором конические сечения не используются. Об этом решении сообщил древнегреческий математик Евтокий Аскалонский (ок. 480 – ок. 540 года) в своём комментарии к сочинению Архимеда «О шаре и цилиндре» [3, с. 459-460]. Сущность идеи состоит в том, что если заданные отрезки *a* и 2*a* и средние пропорциональные отрезки *x* и *y* расположить на взаимно перпендикулярных прямых в том же порядке, как они следуют в непрерывной пропорции, то геометрический образ проблемы станет очевиден.

Только благодаря Евтокию мы знаем о принадлежности такого подхода Платону, другие древние источники об этом не упоминают.

Чтобы понять сущность решения Платона рассмотрим свойства прямоугольной трапеции с перпендикулярными диагоналями (Рис. 1).

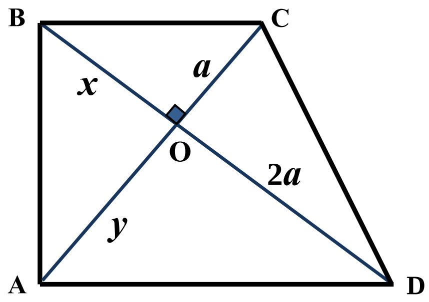

Рис. 1.

Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и BAD высоты OB и OA равны соответственно *x* и *y*, а в треугольниках BCD и ADC высоты OC и OD равны соответственно *a* и 2*a*.

Из того, что первые два треугольника прямоугольные, а диагональ трапеции AC перпендикулярна диагонали BD, следует:

$$a : x = x : y \quad \text{и} \quad x : y = y : 2a.$$

Эти пропорции позволяют записать соотношения (1) и, следовательно, уравнение $x^3 = 2a^3$.

Остаётся построить отрезок *x* при заданных отрезках *a* и 2*a*. Сделать это геометрическим путем невозможно. И Платон, по свидетельству Евтокия, предложил найти отрезок *x* с помощью инструмента, имеющего две П-образные формы с вырезанными пазами, способными скользить одна внутри другой (Рис. 2).

С помощью такого устройства ребро удвоенного куба ищется следующим образом.

Берутся две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. Вправо от точки пересечения откладывается отрезок OC = *a*, где *a* – сторона куба, подлежащего удвоению. На перпендикулярной прямой вниз откладывается отрезок OD = 2*a*.

Затем берутся две П-образные формы и располагают их как показано на рис. 2. То есть б**о**льшая форма располагается так, чтобы одна её сторона проходила через точку D, а вершина угла лежала на продолжении отрезка OC (точка A).

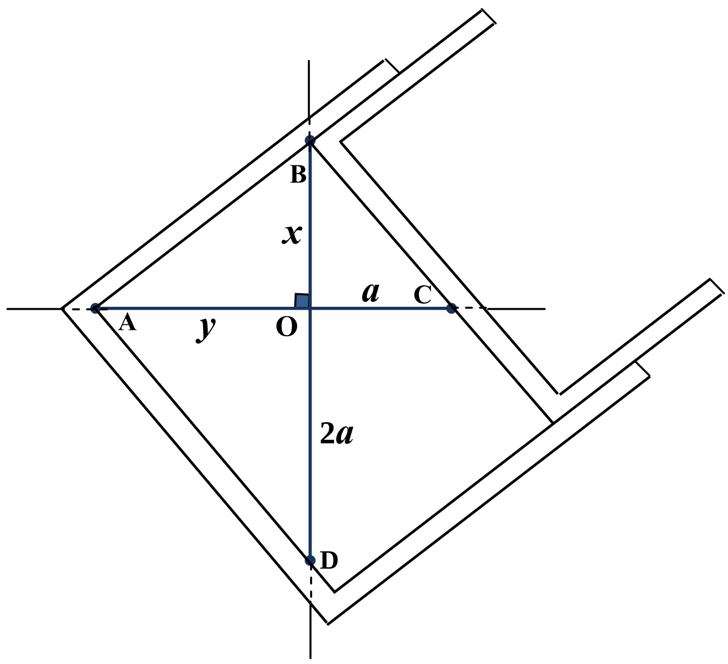

Рис. 2.

Вторая форма передвигается до касания точки C, при этом поворотами первой формы добиваются того, чтобы вершина угла этой формы лежала на продолжении отрезка OD (точка B).

«*Как только удастся этого добиться, задача будет решена*» – пишет Евтокий.

Отрезок x может быть найден и с помощью двух плоских прямоугольных плотницких или слесарных угольников. Сторона одного угольника будет в этом случае двигаться по стороне другого угольника.

Принадлежит ли Платону это весьма оригинальное и простое в употреблении решение задачи удвоения куба доподлинно неизвестно [4, с. 224-227].

Для любителей золотого сечения отдельно замечу, что в трапеции ABCD (Рис. 1) боковая сторона CD = $a\sqrt{5}$, а это открывает прямой путь к заветной мечте всех любителей «*золота*».

4. Вышеприведенные задачи объединяет прямоугольная трапеция с перпендикулярно пересекающимися диагоналями.

Первая и третья задачи, так или иначе, решены.

Участники коллаборации АТ геометрического решения задачи «*Колодец Лотоса*» с помощью циркуля и линейки не представили.

Прецедент решения геометрической задачи с помощью инструмента создан более двух тысячелетий тому назад. Поэтому навожу этих участников на мысль – найти механическое решение задачи с колодцем в духе Платона, то есть с использованием какого-либо инструмента, приспособления, движущегося механизма. А почему нет?

Задача «*Колодец Лотоса*» была бы пусть так, без алгебры и чистой геометрии, но решена и получилась бы формальная перекличка с великим древнегреческим философом, а имя автора подобного решения осталось бы навсегда в анналах истории математики.

Возможен и другой подход. Среди любителей золотого сечения есть авторы, которые эксплуатируют отрезки золотого сечения – вращают их, заставляют двигаться и превращают статические задачи в динамические. Оригинальность подобного динамического решения была бы так же неоспорима.

Литература

1. Василенко С.Л. От «золотого» колодца Лотоса к фибоначчиевому ряду треугольников Кеплера // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.23801, 06.10.2017. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163436.htm.

2. Белянин В.С. Колодец Лотоса**:** утверждение, что это задача древнеегипетских жрецов – иллюзия // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.23556, 18.07.2017. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163358.htm.

3. Архимед. Сочинения. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 640 с.

4. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. Изд-е 2-е. – М.: КомКнига, 2006. – 460 с.