Числовые модели в матричной генетике

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Отмечена важность матричного анализа профессора С. Петухова в генетическом кодировании. Одновременно высказаны сомнения по поводу его "золотой" геноматрицы с искусственным внедрением константы золотого сечения Ф. Приведены наборы числовых матриц, позволяющих обосновать количество аминокислот 20 в генетическом коде, как максимально возможное число сочетаний с повторениями из четырех азотистых оснований по их триплетам.

Оглавление

Вы сделали, в общем, правильные наблюдения.
Вы ошиблись только в знаке: нужно было
поставить плюс, а Вы поставили минус...
Шерлок Холмс.

Вместо вступления

В определенном контексте настоящая статья является продолжением публикации [1] о квази- и псевдозолотых моделях.

Прежде всего, с её смыслом о неплохом обыкновении, время от времени перечитывать, осознавать и переосмысливать некоторые работы и целые направления развития науки.

Вещь полезная и поучительная. Тем более, любое новое рождается на уже известной базе либо с её учетом.

Преемственность – одно из необходимых условий.

Как листочек на дереве немыслим без корня, ствола и веточки.

Причем не успел листок распуститься, как за ним уже видна новая почка. И так далее...

Важными моментами в золотоносной тематике остаются принятые положения-определения [1]:

- *квазиЗС* – модель, в основе которой лежит вполне конкретное число, близкое к константе золотого сечения (ЗС);
- *псевдоЗС* – модель, в основу которой искусственно и бездоказательно внедряется золотая пропорция.

Одновременно представляемый ниже материал имеет самостоятельное значение, в том числе в развитие подходов к разработке и осмыслению матричных методов в генетике.

Введение в тему

Возможный механизм кодирования ДНК путем матричного синтеза впервые прозвучал в работе [2] с указанием на то, что определенная последовательность оснований является кодом, который несет генетическую информацию.

Ключ к последующим расшифровкам генетического кода был найден благодаря проницательным концепциям Ф. Крика [3, с. 38], который предложил теоретическую модель двойной спирали ДНК.

Чуть позже американский физик Г. Гамов впервые поставил задачу генетического кода. Он предположил, что структура белков, состоящих из 20 основных аминокислот, зашифрована в последовательности из четырех возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК [4], и высказал мысль об их кодировании триплетами (кодонами) последовательных нуклеотидов (лат. *triplus* тройной).

И уже в 1965 г. был установлен смысл всех 64 триплетов. Оказалось, что некоторые кодоны просто-напросто избыточны. То есть целый ряд аминокислот кодируется двумя, четырьмя или даже шестью триплетами.

Не так давно на АТ "достали с полки" замечательную монографию проф. С. Петухова (2008) [5]. Книга, безусловно, интересная, новаторская, достойная широкой популяризации и любезно представленная автором в открытом доступе, включая личный сайт.

Её вторичная актуализация как бы задает новый импульс в осмыслении злободневной проблематики по генетическому кодированию информации. Включая эффективное представление генетических мультиплетов в форме единого семейства кронекеровых генетических матриц. Тем более, по некоторым восторженным оценкам: «Наверное, в мире нет более глубокого специалиста в области генетического кодирования» (Топос, 25.09.2013).

Некоторые украинские авторы [6] даже прослеживают в работе Петухова [5] элементы «теории искусственных нейронных сетей».

Тематика книги достаточно обширная и во многом помогает «мировоззренчески осмыслить вопросы об устройстве мироздания» [7].

Мы ограничимся анализом исследований Петухова в несколько дискуссионном ключе под углом зрения: роли-значимости золотого сечения (ЗС) в его "матричной генетике".

С последующим развитием задачи в части числового моделирования.

Но сначала несколько слов о произведении Кронекера, комбинаторных соединениях и числовой кодировке ДНК.

Кронекерово произведение и комбинаторные соединения

Кронекерово (простое) произведение матриц, как частный случай тензорного умножения, представляет бинарную операцию над числовыми или символьными матрицами произвольного размера.

Компактная и формализованная математическая запись позволяет выполнить поэлементное умножение исходных матриц, образуя в результате блочную матрицу.

Приведем простой пример произведения Кронекера для двух одинаковых квадратных матриц:

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}\otimes\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & b\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ c\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & d\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa & ab & ba & bb \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ cc & cd & dc & dd \end{pmatrix}$$

Размещение с повторениями из n элементов по k – *упорядоченная* (n, k)-выборка с возможными повторениями элементов.

Количество всех таких размещений равно [8, с. 568; 9, с. 80] $A_n^k = n^k$.

Генетический код включает тройки (триплеты, кодоны) нуклеотидов ДНК. Они комбинируются в разной последовательности, каждая из которых кодирует определенную аминокислоту, встраиваемую в полипептидную цепь.

Всего существует $4^3 = 64$ комбинаций из четырех нуклеотидов в группы по три.

Сочетание с повторениями из n элементов по k – *неупорядоченная* (n, k)-выборка с возможными повторениями элементов.

Общее количество таких сочетаний равно биномиальному коэффициенту и выражается формулой $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1}$.

Числовая кодировка ДНК

Еще в 1961 году Ф. Крик с соавторами "пророчески" предположили основные свойства генетического кода [10]:

- триплет (кодон) азотистых оснований кодирует одну аминокислоту;
- триплеты генетического кода не перекрываются;
- последовательности триплетов считываются с определенной начальной точки, знаки препинания внутри кодирующей последовательности отсутствуют, их роль играют сами триплеты;
- генетический код вырожден (избыточен), то есть одна аминокислота может быть закодирована разными триплетами.

Вдоль своих нитей молекулы наследственности ДНК, РНК содержат кодовую последовательность четырех азотистых оснований (алфавита генетического кода): аденин **A**, цитозин **C**, гуанин **G**, тимин **T** (или родственный ему урацил **U** в РНК), которые принципиально различимы и потому обозначаются разными буквами.

В своем расположении на противоположных нитях ДНК они образуют комплементарные пары: **A**–**T** (в РНК **A**–**U**) соединены двумя межмолекулярными водородными связями; **C**–**G** – тремя [11, с. 716].

В природе известно много аминокислот, однако, из них лишь 20 видов (канонических) входят в состав белков живых организмов. Но даже 20 хватает, чтобы образовать невообразимое множество вариантов цепочек, – на порядки большее числа молекул воды в мировом океане. Каждый белок представляет собой одну или несколько цепочек аминокислот, соединенных в определенной последовательности, которая определяет строение и биологические свойства белка.

Генетический код кодирует последовательности 20 аминокислот в белках с помощью 64 триплетов – любых трехбуквенных комбинаций алфавита.

Он является вырожденным или избыточным. То есть одна аминокислота может кодироваться несколькими разными триплетами.

Механизм копирования ДНК путем матричного синтеза впервые представлен в работе [2] с указанием на то, что определенная последовательность оснований составляет код, несущий генетическую информацию.

Азотистые основания по отдельным признакам сходны, в некотором смысле являясь эквивалентными (рис. 1).

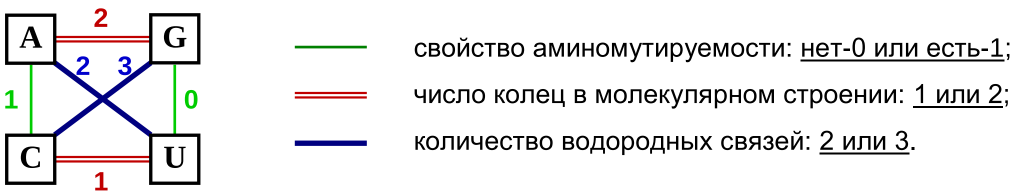


Рис. 1. Признаки бинарной эквивалентности азотистых оснований в ДНК

Так, в своем молекулярном строении пары $(\mathbf{C},\mathbf{U})$ и $(\mathbf{A},\mathbf{G})$ имеют соответственно одно и два кольца, пары $(\mathbf{A},\mathbf{U})$ и $(\mathbf{C},\mathbf{G})$ – две и три межмолекулярные водородные связи.

К приоритетным работам по матричной генетике можно отнести статью [12], где четырехбуквенный алфавит генетического кода впервые представлен в форме "корневой" (2×2)-матрицы, которая возводится во вторую кронекерову степень для анализа отношений симметрии в ансамбле элементов генетического кода.

Следуя такой направленности, ассоциативные пары с вышеуказанными свойствами мы предлагаем смоделировать (отразить) одной числовой матрицей вида

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad (b,\ a) = \frac{\sqrt{t}\pm1}{2}.$$

При её возведении в квадрат для $t = 1,\, 3$ и 5 соответственно получаются матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Они следуют из тождества, верного для любых (!) действительных чисел $t \ge 0$:

$$\left[\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{t}+1 & \sqrt{t}-1 \\ \sqrt{t}-1 & \sqrt{t}+1 \end{pmatrix}\right]^2 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} t+1 & t-1 \\ t-1 & t+1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, отношения между азотистыми основаниями и характерными их признаками допустимо воспроизвести формализовано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{U} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{U} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A} \\ \mathbf{U} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

В первом варианте получается единичная матрица, которая не всегда удобна при выполнении матричных операций, поэтому ноль можно заменить другим числом, например 7, сохранив общую идею построения.

Конкретная числовая кодировка в данном случае не столь принципиальна.

Числовые матрицы С. Петухова

Напомним, что помимо привычных в математике матриц табличной формы, современная генетика применяет собственный термин [13, с. 310]: *матрица* – одноцепочечная ДНК, комплементарная синтезируемой цепи РНК или ДНК; определяет последовательность нуклеотидов в синтезируемой цепи.

Соответственно *матричная цепь* (лат. *matrix* матка, источник) – цепь ДНК или другого полинуклеотида, использующаяся в качестве матрицы для синтеза комплементарной цепи.

Существуют три типа матричных процессов в клетках: репликация, транскрипция и трансляция.

Проф. Петухов выделяет две и три водородные связи, соединяющие комплементарные пары азотистых оснований в молекулах наследственности (**C** = **G** = 3, **A** = **U** = 2).

Далее он вводит квадратную симметрическую матрицу P_1 = (3, 2; 2, 3) и через произведение Кронекера образует «квинтовые мультипликативные геноматрицы» P_n, основанные на формальном произведении чисел 2 и 3:

$$P_1\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_2\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_3\begin{pmatrix} 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ 18 & 27 & 12 & 18 & 12 & 18 & 8 & 12 \\ 18 & 12 & 27 & 18 & 12 & 8 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 18 & 27 & 8 & 12 & 12 & 18 \\ 18 & 12 & 12 & 8 & 27 & 18 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 8 & 12 & 18 & 27 & 12 & 18 \\ 12 & 8 & 18 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 8 & 12 & 12 & 18 & 12 & 18 & 18 & 27 \end{pmatrix}$$

Собственные числа (значения) исходной матрицы-ядра являются корнями квадратного уравнения $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ и равны 1 и 5.

Каждая матрица P_n содержит только n + 1 разных чисел вида $2^i \cdot 3^j$.

Квинтовое название матриц он объясняет тем, что отношение 3/2 в теории музыкальной гармонии именуется квинтой.

В виду независимости произведения от перемены мест сомножителей, триплеты в октетной матрице P_3 становятся практически неразличимыми. Так, любой порядок следования оснований **C**, **G**, **A** воспроизводится одним и тем же числом 18 = 3×3×2.

На основе золотой константы $\Phi = \phi^{-1} \approx 1.618$, исходя из формального равенства $\begin{pmatrix} \Phi & \phi \\ \phi & \Phi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, автор выстраивает аналогичный набор "золотых" геноматриц

$$\begin{pmatrix} \Phi & \phi \\ \phi & \Phi \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \Phi^2 & 1 & 1 & \phi^2 \\ 1 & \Phi^2 & \phi^2 & 1 \\ 1 & \phi^2 & \Phi^2 & 1 \\ \phi^2 & 1 & 1 & \Phi^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \Phi^3 & \Phi & \Phi & \phi & \Phi & \phi & \phi & \phi^3 \\ \Phi & \Phi^3 & \phi & \Phi & \phi & \Phi & \phi^3 & \phi \\ \Phi & \phi & \Phi^3 & \Phi & \phi & \phi^3 & \Phi & \phi \\ \phi & \Phi & \Phi & \Phi^3 & \phi^3 & \phi & \phi & \Phi \\ \Phi & \phi & \phi & \phi^3 & \Phi^3 & \Phi & \Phi & \phi \\ \phi & \Phi & \phi^3 & \phi & \Phi & \Phi^3 & \phi & \Phi \\ \phi & \phi^3 & \Phi & \phi & \Phi & \phi & \Phi^3 & \Phi \\ \phi^3 & \phi & \phi & \Phi & \phi & \Phi & \Phi & \Phi^3 \end{pmatrix}$$

При этом отмечает, как «с удивлением обнаружил, что эти бисимметрические геноматрицы $P(n)$ связаны с золотым сечением» [14].

Собственно и всё. Далее указанные матрицы нигде более не фигурируют и в генетике ровным счетом ничего не характеризуют. Видимо, поэтому "золотоносная" составляющая работы [5] так и не нашла никакого отклика в биологических исследованиях и науках.

Возможно, сказался изначально неточно выбранный вектор [5, с. 73]: «В биологии генетическая система отвечает за самовоспроизведение организмов. В математике ... символом самовоспроизведения было так называемое золотое сечение».

Каких-либо представлений о том, что золотое сечение в математике прочно ассоциируется с понятием самовоспроизведения, мы не находим. В отличие действительных образов-объектов в виде фракталов, разнообразных геометрических (непрерывных) пропорций, прогрессий и т.п. Если уже и проводить параллели с биологическими системами, то более подходящим кандидатом на эту роль является геометрическая прогрессия со знаменателем 2, ибо репликация ДНК и самовоспроизведение клеток в многоклеточных организмах происходит путём их деления.

Возможно, отсюда появляется вполне понятная критика подхода Петухова:

− «не принимаются во внимание смысловые значения, приписываемые гексаграммам» [15];

− «любая числовая система должна иметь конкретный физический смысл, т.е. математический аппарат должен применяться как цифровая модель физического процесса, а не наоборот, когда на свойства некой математической конструкции пытаются натянуть описание физического процесса, даже не имея понятия о том, что такой процесс собой представляет, в сущности. Примером такой безуспешности является абстрактное математическое описание набора гексаграмм Фу-Си, созданная Петуховым С.В. Очевидно, автор схемы... стал, по всей видимости, заложником формальной логики свойств бинарного числового ряда,... подогнал схему гексаграмм порядка Фу-Си под красивую симметричную схему соответствий триплетам» [16] и др.

Простые "дилетантские" вопросы А. Никитина [17] на триплетное кодирование ДНК также остаются без ответа.

Лукавство или заблуждение...

На основе связи константы золотого сечения с целыми числами (2, 3) в матричной форме автор предлагает «новое – матрично-генетическое – определение золотого сечения: золотое сечение и его обратная величина (φ и φ^{-1}) представляют собой единственные матричные элементы бисимметрической матрицы Ф, являющейся корнем квадратным из такой бисимметрической числовой матрицы Рмульт второго порядка, элементами которой являются генетические числа водородных связей ($\mathbf{C}=\mathbf{G}=3$, $\mathbf{A}=\mathbf{U}=2$) и которая имеет положительный детерминант. Это определение не использует элементов классических определений золотого сечения: отрезков прямой, квадратного уравнения, предельного отношения в специальных числовых рядах» [5, с. 76; 18]. Здесь φ – константа золотого сечения – в наших обозначениях Ф.

Называть данное утверждение определением, конечно, можно. Хотя и с большой натяжкой. Как введение нового понятия или объекта в математическое рассуждение путем комбинации или уточнения элементарных либо ранее определенных понятий. Де-факто у нас нет ни нового понятия, ни нового объекта. Зато есть новая интерпретация. Это верно.

Вторая часть цитаты, по нашему мнению, отражает лишь поверхностную сторону содержания, но по внутренней сути неверна в принципе.

а) Действительно, мы хотим найти пару чисел x, y, удовлетворяющих матричному уравнению $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ или в виде системы двух уравнений $x^2 + y^2 = 3$, $xy = 1$.

После подстановки $z = x^2$ решение сводится к квадратному уравнению $z^2 - 3z + 1 = 0$ с положительным корнем $z = \left(3 + \sqrt{5}\right)/2 = \Phi^2$. Как видим, "золотоносного" квадратного уравнения избежать не удается.

б) Алгебраическое уравнение является характеристическим для эквивалентного представления в виде разностного (возвратного) уравнения $z_n = 3z_{n-1} - z_{n-2}$ с предельным аттрактором ($n \to \infty$) соответствующих числовых рядов (при заданных начальных условиях) $\lim\limits_{n \to \infty} z_n / z_{n-1} = \Phi^2$. Как наибольший по модулю корень уравнения.

в) Наконец, задачу можно решить чисто геометрически, и тогда приходим к пропорциональному делению отрезка.

Поэтому вышеупомянутое утверждение – не столько определение ЗС, сколько его дополнительная интерпретация в матричной записи.

Точно так, как например, числа Фибоначчи воспроизводятся путем возведения в степень матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$. Но вводить числа Фибоначчи подобным образом, лишено здравого смысла. Одно дело описывать разнообразные свойства, и совсем другое – давать простые и понятные определения (алгоритмы).

О константе золотого сечения в генетике

Мы долго размышляли о возможной роли золотой константы в геноматрицах Петухова. С разных сторон. И пришли для себя к неоптимистическому выводу.

Никакой мало значимой и тем более особой смысловой нагрузки число Φ не несет.

С его помощью в геноматрице нельзя ничего ни показать, ни истолковать. Ни, тем более, предсказать. Включение золотого сечения в матрицы Петухова уводит нас в сторону от сути задачи, порождая некие иллюзии реальности.

Перед нами обычная числовая манипуляция, которая основана на формальных совпадениях, следующих из очевидных равенств:

$$\Phi^2 + \phi^2 = 3, \quad \Phi \cdot \phi \; + \; \phi \cdot \Phi = 2\,.$$

Числа 2 и 3 можно воспроизвести в матричной форме десятками других способов.

Например, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}^{1/2} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} - 10$. Не будем же мы из-за этого утверждать, что обычная и чертова дюжина или "тетраксис" пифагорейцев 10 = 1 + 2 + 3 + 4 прочно обосновались в генетике.

Количество водородных связей 2 и 3 можно вообще обозначать (кодировать) разными числовыми формами или буквенными символами. Без какого-либо ущерба главной цели.

Либо в основу положить другой признак бинарной эквивалентности азотистых оснований в ДНК, а именно число колец в молекулярном строении (1 или 2), остановившись на матрице $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{U} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. И так далее...

И почему собственно возведение во вторую, а не иную степень? – Тот же куб или квадратный корень.

Так, из очевидных числовых тождеств, верных для любых вещественных значений $r \geq 0$ и целых $k \geq 1$,

$$(a,b)=\frac{1}{2}\left[\sqrt[k]{2r+1}+1,\ \sqrt[k]{2r+1}-1\right]\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r+1 & r\\ r & r+1\end{pmatrix}^{1/k};$$

$$(a,b)=\frac{1}{2}\left[(2r+1)^k+1,\ (2r+1)^k-1\right]\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r+1 & r\\ r & r+1\end{pmatrix}^{k};$$

следует частный случай (r = 2)

$$\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt[k]{5}+1 & \sqrt[k]{5}-1\\ \sqrt[k]{5}-1 & \sqrt[k]{5}+1\end{pmatrix}\right]^k = \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5^k+1 & 5^k-1\\ 5^k-1 & 5^k+1\end{pmatrix}\right]^{1/k} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

То есть матрица (3, 2; 2, 3) воспроизводится тысячами способов, и константа золотого сечения возникает здесь волею случая при $k = r = 2$.

Отсюда следует однозначный вывод: золотое сечение не является каким-то значимым и тем более обусловлено-необходимым числовым элементом генетической конструкции.

В подобных случаях нередко используют всем понятный фразеологизм *far-fetched* – "притянутый за уши", как неубедительное и лишенное логики объяснение или утверждение-толкование.

В общем случае для квадратной матрицы второго порядка $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}\Phi^k & \phi^k\\ \phi^k & \Phi^k\end{pmatrix}$ её квадрат равен $\mathrm{M}^2=\begin{pmatrix}L_{2k} & 2\\ 2 & L_{2k}\end{pmatrix}$, где L_n – числа Люка: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18...

Формальное равенство $\begin{pmatrix}\Phi & \phi\\ \phi & \Phi\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ следует из общего свойства для золотых констант Φ, ϕ:

$$\begin{pmatrix}\Phi & \phi\\ \phi & \Phi\end{pmatrix}^{2n} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5^n+1 & 5^n-1\\ 5^n-1 & 5^n+1\end{pmatrix}.$$

Числа $a_n=(5^n+1)/2=5a_{n-1}-2$ образуют ряд [19, A034478]: 1, 3, 13, 63, 313, 1563, 7813, 39063...

Итак, автор говорит о матричном представлении генетического кода.

В чём его суть?

Есть четыре разных буквы. Записываем их в виде естественной таблицы (матрицы).

Составляем сначала дуплеты, затем триплеты этих букв.

В результате имеем обычную бинарную операцию или вычисление <тензорного> произведения Кронекера для двух матриц, которому более сотни лет.

Такие комбинаторные сочетания элементарно составляются обычным перебором.

Кронекерово произведение лишь позволяет математически компактно формализовать данную запись.

В чём же, как говорится, фишка или изюминка? – Если имеет место обычная операция для составления-записи возможных комбинаторных перестановок с повторениями, когда каждый предмет может участвовать в сочетании несколько раз.

Если уже идти по такому пути, то задача состоит не столько в том, чтобы включить красивые числа типа констант золотого сечения, сколько в подборе группы нужных чисел. Нужных чисел в том смысле, чтобы из них можно будет получить максимум полезной информации. Или хотя бы что-то пояснить.

Матрица, составленная из четырех степеней константы ЗС, ничего не показывает и не объясняет. Такая себе симпатичная форма-игрушка для ортодоксов золотоносной тематики. Именно отсюда следуют некоторые восторженные голоса по поводу "золотой" геноматрицы. Не вникая в суть-содержание. Главным образом из-за термина, обвораживающего слух.

Что-нибудь новое, особенно в расшифровку закономерностей генетического кода, сама по себе формализованная операция Кронекера не вносит. Почему и не нашла применения в биологии.

Кронекерово произведение симметричной матрицы, составленной из чисел 2 и 3, по сути, воспроизводит матрицу из наборов возможных степеней 2^i и 3^j. Не более того.

Называть всё это "матричной генетикой" или не называть, – дело сугубо личное.

Главное, чтобы не порождались необоснованные иллюзии.

Альтернативная кодировка

В книге [5, с. 68] отмечается: «При замене в символьных матрицах $P(n)$ каждого символа азотистых оснований на те или иные их количественные параметры получаются соответствующие числовые геноматрицы. В качестве конкретного примера рассмотрим матрицы водородных связей азотистых оснований кода»...

Числовая кодировка Петухова в буквенных обозначениях имеет вид:

$$\begin{array}{|cc|}\hline a & b \\ b & a \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|cc|cc|}\hline a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ \hline ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|cccc|cccc|}\hline a^3 & a^2b & a^2b & b^2a & a^2b & b^2a & b^2a & b^3 \\ a^2b & a^3 & b^2a & a^2b & b^2a & a^2b & b^3 & b^2a \\ a^2b & b^2a & a^3 & a^2b & b^2a & b^3 & a^2b & b^2a \\ b^2a & a^2b & a^2b & a^3 & b^3 & b^2a & b^2a & a^2b \\ \hline a^2b & b^2a & b^2a & b^3 & a^3 & a^2b & a^2b & b^2a \\ b^2a & a^2b & b^3 & b^2a & a^2b & a^3 & b^2a & a^2b \\ b^2a & b^3 & a^2b & b^2a & a^2b & b^2a & a^3 & a^2b \\ b^3 & b^2a & b^2a & a^2b & b^2a & a^2b & a^2b & a^3 \\ \hline\end{array}$$

Здесь пара чисел (a, b) равна (3, 2) либо (Φ, ϕ). То есть, изначально правильно предполагая разные количественные параметры, автор продемонстрировал частный пример на основе пары чисел (3, 2). Но настолько увлекся, увидев в нём некое "золотоносное" провидение, что эти числа буквально красной нитью прошли по всей монографии.

Сами по себе числа хорошие, в чём-то примечательные. Но сводить всевозможные числовые геноматрицы только к ним, значит, «выплеснуть с водой и ребенка». Когда вместе с не очень нужным теряется более важное и ценное...

Рассмотрим, к примеру, другую пару простых чисел (2, 1):

$$\left(\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 1 & 8 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Собственные числа (значения) исходной матрицы-ядра являются корнями квадратного уравнения $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ и равны 1 и 3.

Есть какие-либо преференции золотых констант перед данными числами? – Абсолютно нет!

Более того, принятие пары чисел (1, 2) наоборот более представительное и репрезентативное.

Во всяком случае, элементы произведения Кронекера равны обычным степеням 2^n, что уверенно соотносится с биологическим делением клеток пополам и с их удвоением.

Эту пару чисел можно спокойно ассоциировать (кодировать) с разными комбинациями-вариациями, различая соответствующие признаки бинарной эквивалентности азотистых оснований в ДНК, например:

$(\mathbf{C}-\mathbf{U},\ \mathbf{A}-\mathbf{G})$ = (1, 2) – число колец в молекулярном строении;

$(\mathbf{G}-\mathbf{U},\ \mathbf{A}-\mathbf{C})$ = (1, 2) – свойство аминомутируемости: нет – 1, есть – 2;

$(\mathbf{C}-\mathbf{G},\ \mathbf{A}-\mathbf{U})$ = (1, 2) – количество водородных связей: 1 – три связи, 2 – две связи.

В частности, если три водородные связи характеризовать (моделировать) условным числовым кодом 1, то это совершенно ни на что не влияет.

Матрица из начальных чисел Фибоначчи

С точки зрения затронутой темы хорошей корневой базой или ядром могут служить иные числовые матрицы, которые более интересны и, как далее увидим, репрезентативны.

Во всяком случае, они приводят к неочевидным результатам, позволяющим интерпретировать количество аминокислот.

Например, сформируем исходную квадратную матрицу $F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ из начальных чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \Phi^3 + \phi^3 & \Phi^2 - \phi^2 \\ \Phi^5 + \phi^5 & \Phi^4 - \phi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы F_1 взаимно простые числа.

Порядок их следования выбран специально, чтобы определитель (детерминант) был равен единице $|F_1| = 1$.

Значит, определитель любой целой степени (положительной или отрицательной) данной матрицы тоже всегда равен единице $\left| F_1^k \right| = 1$

По аналогии с подходом Петухова, данную матрицу можно образовать возведением в квадрат таких матриц с иррациональными элементами:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right]^2.$$

В этом контексте F_1 имеет структуру, похожую на матрицу с золотой константой, но существенным образом отличается от неё набором-составом элементов.

Образуем кронекеровы произведения:

$$F_2 = F_1 \otimes F_1 \quad \text{и} \quad F_3 = F_1 \otimes F_2.$$

Как видим, матрица F_2 размером 4×4 имеет 10 различных чисел, матрица F_3 размером 8×8 – соответственно 20 неодинаковых чисел.

$$F_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 10 & 6 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & 6 & 3 \\ 25 & 15 & 15 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 20 & 12 & 10 & 6 & 10 & 6 & 5 & 3 \\ 20 & 10 & 12 & 6 & 10 & 5 & 6 & 3 \\ 50 & 30 & 30 & 18 & 25 & 15 & 15 & 9 \\ 20 & 10 & 10 & 5 & 12 & 6 & 6 & 3 \\ 50 & 30 & 25 & 15 & 30 & 18 & 15 & 9 \\ 50 & 25 & 30 & 15 & 30 & 15 & 18 & 9 \\ 125 & 75 & 75 & 45 & 75 & 45 & 45 & 27 \end{pmatrix}$$

Продолжая данную операцию по формуле $F_k = F_1 \otimes F_{k-1}$, получим набор матриц, в которых количество разных чисел составляет 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120...

Перед нами последовательность тетраэдрических или пирамидальных чисел с общей формулой $a_{n-1} = n(n+1)(n+2)/6$.

Каждое число матрицы F_3 однозначно определяется входящими в него тремя сомножителями.

Порядок следования этих сомножителей в итоговом произведении, конечно, не виден.

№	Сомножители	Произведение	Повторяемость
1	1 · 1 · 1	1	1
2	1 · 1 · 2	2	3
3	1 · 1 · 3	3	3
4	1 · 1 · 5	5	3
5	1 · 2 · 2	4	3
6	1 · 2 · 3	6	6
7	1 · 2 · 5	10	6
8	1 · 3 · 3	9	3
9	1 · 3 · 5	15	6
10	1 · 5 · 5	25	3
11	2 · 2 · 2	8	1
12	2 · 2 · 3	12	3
13	2 · 2 · 5	20	3
14	2 · 3 · 3	18	3
15	2 · 3 · 5	30	6
16	2 · 5 · 5	50	3
17	3 · 3 · 3	27	1
18	3 · 3 · 5	45	3
19	3 · 5 · 5	75	3
20	5 · 5 · 5	125	1
	Всего:	490	64

Повторяемость произведений одинаковых чисел (1·1·1, 2·2·2, 3·3·3, 5·5·5) составляет 1, разных чисел (1·2·3, 1·2·5, 1·3·5, 2·3·5) – 6, остальных – 3.

Итак, имеем типичную задачу на число сочетаний с повторениями, то есть наборов, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз. Число сочетаний с повторениями из n по k равно биномиальному коэффициенту C_{n+k-1}^{k}.

В нашем случае количество разных числовых элементов образованной матрицы F_3 размером 8×8 – есть число сочетаний с повторениями из 4 по 3 и равно $C_6^3 = 20$.

Каждое из чисел матрицы однозначно определяет состав перемножаемых чисел, соответствующих разным кодонам.

Естественно, порядок их следования не идентифицируется. Исходя из того, что произведение чисел не зависит от порядка следования сомножителей.

Собственные числа матрицы являются корнями квадратного уравнения $\lambda^2 - \lambda - 5 = 0$ и равны $(u \quad v) = \left(5 \pm \sqrt{21}\right)/2 \approx (4{,}791 \quad 0{,}209)$. Их сумма составляет 5, произведение – 1.

Интерпретировать квадратную матрицу $\mathrm{F}_1 = (2, 1; 5, 3)$ можно по-разному.

Например, числа 2 и 3 вполне можно считать водородными связями. Числа 1 и 5 – условной кодировкой других признаков.

Четыре соседних числа Фибоначчи $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$ имеют уникальные свойства:

- определители матриц, образованных из этих чисел, равны единице

$$\left|\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_{n+3} & F_{n+2} \end{pmatrix}\right| = 1, \quad n = 2k \text{ – четное;}$$

$$\left|\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+2} & F_{n+3} \end{pmatrix}\right| = 1, \quad n = 2k + 1 \text{ – нечетное;}$$

- если $n \neq 3k$ (не кратно трем), то эти числа взаимно простые.

Нетрудно показать, что данные матрицы могут быть получены при возведении в квадрат следующих матриц, соответственно для четных и нечетных значений n:

$$n = 2k \qquad \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_{n+3} & F_{n+2} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{F_{n+3} \pm 2}} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \pm 1 & F_n \\ F_{n+3} & F_{n+2} \pm 1 \end{pmatrix}\right]^2;$$

$$n = 2k + 1 \qquad \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+2} & F_{n+3} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{2F_{n+2} \pm 2}} \cdot \begin{pmatrix} F_n \pm 1 & F_{n+1} \\ F_{n+2} & F_{n+3} \pm 1 \end{pmatrix}\right]^2.$$

Матрица из чисел Люка

Аналогичным образом можно построить исходную матрицу на основе начальных чисел Люка 2, 1, 3, 4, 7, 11... Также с определителем, равным 1.

$$\mathrm{L}_1 = \begin{pmatrix} \Phi^1 - \phi^1 & \Phi^0 + \phi^0 \\ \Phi^2 + \phi^2 & \Phi^4 + \phi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы L_1 являются корнями уравнения $\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$ и равны $4 \pm \sqrt{5}$. К слову, такие же собственные значения имеет и матрица $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Матрица L_1 получается путем возведения в квадрат таких матриц с иррациональными элементами:

$$\mathrm{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\right]^2.$$

$$L_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow L_2\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 7 & 6 & 14\\ 3 & 6 & 7 & 14\\ 9 & 21 & 21 & 49\end{pmatrix} \Rightarrow L_3\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8\\ 3 & 7 & 6 & 14 & 6 & 14 & 12 & 28\\ 3 & 6 & 7 & 14 & 6 & 12 & 14 & 28\\ 9 & 21 & 21 & 49 & 18 & 42 & 42 & 98\\ 3 & 6 & 6 & 12 & 7 & 14 & 14 & 28\\ 9 & 21 & 18 & 42 & 21 & 49 & 42 & 98\\ 9 & 18 & 21 & 42 & 21 & 42 & 49 & 98\\ 27 & 63 & 63 & 147 & 63 & 147 & 147 & 343\end{pmatrix}$$

Перечень подобных матриц можно продолжать сколь угодно долго, например:

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 7 & 6\end{pmatrix}\right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 7 & 4\end{pmatrix}\right]^2;$$

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\begin{pmatrix}4 & 4\\ 5 & 8\end{pmatrix}\right]^2;$$

$$\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 8\end{pmatrix}\right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{15}}\cdot\begin{pmatrix}5 & 5\\ 7 & 10\end{pmatrix}\right]^2;$$

$$\begin{pmatrix}5 & 4\\ 11 & 9\end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\begin{pmatrix}4 & 4\\ 11 & 8\end{pmatrix}\right]^2.$$

Определители всех матриц равны 1, что само по себе является существенным обстоятельством.

Значит, **определители любых целых степеней этих матриц, а также их кронекеровых произведений, также равны единице**!

Заметим, что многие числовые матрицы 2×2, в которых присутствует иррациональность, после возведения в квадрат содержат дробные числа.

Только некоторые из них приводят к целочисленным матрицам.

Например, нами составлена одна из таких матриц общего вида, которая вместе со своим квадратом включает ряд последовательных чисел Фибоначчи F и Люка L $(k \neq 0)$:

k	…	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	…
F_k	…	–1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	…
L_k	…	3	–1	2	1	3	4	7	11	18	29	…

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5F_k}}\cdot\begin{pmatrix}L_{k+1} & (-1)^{k+1}\\ 1 & L_{k-1}\end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix}F_{k+2} & (-1)^{k+1}\\ 1 & F_{k-2}\end{pmatrix}.$$

Правомерность формулы основывается на известных формульных закономерностях данных чисел.

Некоторые примеры матриц Фибоначчи–Люка:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \left[\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Дискуссионные моменты

1) Азотистые основания генетического кода **C**, **A**, **G**, **U** различны. Их формально-абсолютное уравнивание между собой в квадратной матрице, например, по числу водородных связей **A** = **U** и **C** = **G**, является слабо аргументированным.

2) Эквивалентная замена основана на свойствах золотых констант: образовывать целые числа $2\phi\Phi = 2,\ \phi^2 + \Phi^2 = 3$, в результате чего квадрат матрицы становится равным $\begin{pmatrix} \Phi & \phi \\ \phi & \Phi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Внутренне обусловленное взаимоотношение с водородными связями 2 и 3 здесь просматривается весьма слабо. Можно даже сказать, его практически нет. Чисто формальное совпадение. И оно далее тиражируется через кронекерово произведение по очевидным правилам самого умножения. Совершенно одинаковым образом для символов **C** = **A**, **G** = **U** и самих чисел.

Начальные числа натурального ряда имеют специфические особенности. Им посвящены многочисленные исследования, в том числе в области нумерологии.

Например, числа 2 и 3 вполне ассоциируются с дихотомией и трихотомией, диалектикой и триалектикой, плоскостью и трехмерным пространством, и др.

Пара (2, 3) – единственные простые числа, отличающиеся друг от друга на 1.

По меньшей мере, опрометчиво из этого выстраивать гипотезы о присутствии всего такого многообразия в генетическом коде. Равно как и модели золотой пропорции.

3) В паре чисел (2, 3) автор усматривает квинту 3/2. Даже не понятно, причем здесь пифагорейская "музыка сфер".

Сдается, проф. С. Петухов несколько увлекся квинтой 3/2. С таким же успехом можно усматривать рациональную модель деления целого ровно на три части, то есть «одна или две трети» [20], и проч.

4) На наш взгляд, более логично выглядит матрица $\begin{pmatrix} \Phi & -\phi \\ -\phi & \Phi \end{pmatrix}$.

Здесь число ϕ – не просто обратная величина Φ^{-1}. Со знаком "минус" оно равноправный (равновеликий) близнец константы Ф, – в смысле общностей корней простого алгебраического уравнения $x^2 = x + 1$.

5) Наконец, совершенно не ясна логика перемножения водородных связей. В чём здесь физико-генетический смысл-контекст?

И самое главное... Константа золотого сечения у Петухова ничего не объясняет, ничего не показывает. Её задача – как-то украсить-облагородить матричную генетику, видимо, с тезисом "физики шутят". Плюс таинство гармонии, якобы исходящее из глубины веков.

Ещё немного, и впору говорить о сакральной генетике.

В этом плане особенно преуспел в своё время один профессор – автор АТ. Создавая образ-впечатление, будто золотое сечение проникло в человеческий ген. Особо не заглядывая в суть: что там и как? Что за этим кроется? – Просто по формальным признакам однажды выдуманного названия "золотой" геноматрицы. Как квинтэссенция ложной направленности, когда внешне-терминологическая форма ставится выше сути-содержания.

6) Комплементарность подменяется симметрией матрицы. Хотя в строении генетического кода такая симметрия отсутствует. Иначе было бы всё просто.

Итак, имеет ли какой-либо смысл явного присутствия ЗС посредством чисел 2 и 3? – Хотелось бы, конечно, так считать. Или просто думать, предполагать.

К сожалению, увы...

Формальное наличие золотой константы Ф не несет особой смысловой нагрузки. Равно как квинтетная интерпретация чисел 3 и 2.

С таким же успехом их можно толковать как уникальное содружество двух простых рядом стоящих простых числа.

Либо деление единичного целого на две части 2/3 и 1/3 с их отношением, равным 2.

И так далее...

Кроме того, само по себе формальное уравнивание азотистых соединений по числу водородных связей (типа **C** = **G** = 3) необоснованно (!).

Тогда и в символьном обозначении их тоже следует уравнять. Иначе получается рассогласованность. По схеме: здесь захотели – развели в разные стороны, там захотели – уравняли. Очень напоминает подгонку под конечный результат.

Например, как два разных человека равного роста – одинаковы (?).

С таким же успехом можно просто присвоить первые порядковые номера [3, 2; 1, 4]. Они же первые числа Люка: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18 ... И это будет также правильно.

Более того, их сумма равна 10. Определитель матрицы тоже равен 10 – священное число пифагорейцев. Одновременно видим водородные связи (2, 3) и основные музыкальные интервалы: $1/2$ – октава, $2/3$ – квинта, $3/4$ – кварта.

Имеется также более-менее, однозначное соответствие, когда полученные числа показывают, что и на что умножалось. Хотя не различимыми остаются комбинации перемножения 1×4 и 2×2.

В этом плане идеальным вариантом представляется использование начальных чисел Фибоначчи, например в виде матрицы

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_5 & F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{C} & \mathbf{U} \end{pmatrix}.$$

Определитель любой целой степени данной матрицы всегда равен единице.

Все числа попарно взаимно простые. Значит, после тензорных преобразований, по разложению каждого элемента матрицы на сомножители всегда можно будет определить, какие именно исходные числа перемножались.

Почему число генетически кодируемых аминокислот равно 20?

Известны разные интерпретации исследователей, как ответить на данный вопрос. Автор предлагает новый вариант [5, с. 64]: «множество 20 аминокислот представлено в генетическом коде потому, что оно состоит из двух альтернативных подмножеств из 8 и 12 аминокислот... в связи с очевидным тетра-представлением данных чисел: $8 = 4\cdot2$ и $12 = 4\cdot3$».

То есть речь идет о формальном использовании чисел 2 и 3 «в качестве модульных блоков» [5, с. 65] с их отображением $2^3 + 2^2\cdot3$.

Но тогда почему, скажем не использовать другой схожий вариант $3^3 + 3^2\cdot2 = 35$? – Вразумительного ответа не находим. Хотя 35 – тетраэдрическое число и такая же сумма чисел в таблице Никомаха – древнегреческого математика.

Ответ, на наш взгляд, можно искать в различимости элементов произведения Кронекера. А именно: **количество аминокислот равно числу сочетаний с повторениями из множества азотистых оснований $n = 4$ по триплетам $k = 3$.**

Остальные являются избыточными или "запасными", поскольку на языке формального перемножения чисел от перемены мест сомножителей произведение не меняется.

На комбинаторном языке сочетаний это означает эквивалентность трех объектов в их любой последовательности. Ибо костяк (скелет, основа) сохраняется.

Главным остается наличие-присутствие составляющих.

20 – это треугольное пирамидальное число для 2×2 = 4.

Именно столько образуется разных чисел!

Квадратная матрица 8×8, в основе которой лежит матрица 2×2 из четырех взаимно простых чисел, дает ровно 20 неповторяющихся вариантов.

Константа золотого сечения, которую Петухов искусственно вклинил в геноматрицу, только смещает акценты, направляя исследовательскую мысль по ошибочному следу.

Весь смысл числового кодирования состоит именно в подборе-формировании максимального набора неповторяющихся величин.

Таковые могут образоваться только из исходной матрицы с неравными элементами, причем такими, чтобы каждое из них не являлось произведением любой пары других.

Например, матрица (1, 2; 4, 5) из $n = 4$ элементов через кронекеровы произведения генерирует только $n^2 = 16$ различающихся вариантов:

1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100, 125.

В то же время матрица из взаимно простых чисел (1, 2; 3, 5) дает нам 20 вариантов:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 27, 30, 45, 50, 75, 125,

что в целом отвечает принципу минимакса.

Таким образом, имеем такие комбинаторные соединения из четырех элементов по три:

– перестановки с повторениями $4^3 = 64$;

– сочетания с повторениями 6·5·3/1·2·3 = 20.

Природа сделала свой выбор и остановилась на 20. Именно число 20 позволяет образовать уникальную различимость в разнообразии аминокислот.

Если бы азотные основания формировались в квартетные кортежи, то их, скорее всего, было бы 35 – следующее треугольное пирамидальное число или количество размещений с повторениями из четырех элементов по четыре, 7·6·5·4 / 1·2·3·4 = 35.

Это особенно наглядно проявляется в числовом моделировании с использованием взаимно простых чисел в корневой квадратной матрице 2×2, которая может содержать единицу и одно четное число. В целом она включает не менее трех нечетных чисел.

При этом "матрица Фибоначчи" (2, 1; 5, 3) – минимально возможная конструкция из целых положительных чисел с суммой элементов 11.

Тетраэдрические числа

Тетраэдрическое число (треугольное пирамидальное число) – это фигурное число, которое представляет собой тетраэдр – пирамиду с треугольным основанием и тремя сторонами. Данные числа получаются, если шарики компоновать пирамидой, как раньше складывали пушечные ядра.

Формула для вычисления n-го пирамидального числа имеет вид

$$Te_n = C_{n+2}^3 = n(n+1)(n+2)/6 .$$

Они образуют ряд 1, 4, 10, **20**, 35, 56, 84, 120, 165, 220...

Тетраэдрическое число Te_n представляет собой сумму всех треугольных чисел – от первого до n-го.

Тетраэдрические числа можно найти в четвертой позиции слева либо справа в треугольнике Паскаля. К слову, треугольник Паскаля в Китае именуют треугольником Яна Хуэя с 11 века [21, с. 2169].

Согласно практически верной, но пока недоказанной гипотезе Поллока (1850), каждое натуральное число представляет собой сумму не более 5 тетраэдрических чисел [22, с. 23].

К слову, ортодоксы золотого сечения при желании могут её увязать с правильным пятиугольником и/или суммой водородных связей 2 + 3.

Многие свойства этих чисел описаны в целочисленной энциклопедии [19, A000292].

В частности:

Te_n – количество шаров в треугольной пирамиде, в которой каждое ребро содержит n шаров;

Te_n – определитель матрицы $\begin{pmatrix} C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 \\ C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 \\ C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 & C_{n+2}^3 \end{pmatrix}$;

Te_n – сумма всех возможных произведений $p{\cdot}q$, где $(p,\ q)$ – упорядоченные пары и $p + q = n + 1$; например, $Te_5 = 5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 35$;

Te_{n+4} – количество различных разбиений числа n на сумму 4 элементов и др.

Но самый главный и примечательный момент заключается в следующем:

бесконечная сумма чисел, обратных тетраэдрическим числам, равна 3/2 и получается с помощью "телескопического ряда"

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(n+2)} = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 6\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\right] = 6\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Данная сумма легко определяется после раскрытия скобок, когда почти все слагаемые взаимно уничтожаются.

Именно здесь "всплывают" числа 2 и 3, которые также можно интерпретировать как количество водородных связей в четырех азотистых основаниях ДНК.

При желании можно увидеть музыкальную квинту, числа Никомаха и проч.

Моделирование кронекеровой суммой

В рамках исследуемой темы кронекерово произведение, конечно, не следует рассматривать буквально. Речь, прежде всего, идет о некотором механизме, позволяющем формировать тройки (кодоны, триплеты) азотистых оснований в цепочке ДНК.

С точки зрения числовых форм математики здесь в одинаковой мере подходят простые арифметические операции, включая умножение и суммирование.

Возможно, суммы выглядят даже предпочтительнее произведений, поскольку более точно отражают процессы присоединения (присовокупления) нуклеотидов.

По аналоги с кронекеровым произведением, введем (определим) кронекерову сумму:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} \oplus \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & b + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ c + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & d + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a & a+b & b+a & b+b \\ a+c & a+d & b+c & b+d \\ c+a & c+b & d+a & d+b \\ c+c & c+d & d+c & d+d \end{pmatrix}.$$

Общее количество различимых двойных сумм (бинаров, дуплетов) равно 10: четыре угловых и ещё 12/2 = 6 неодинаковых пар.

Можно показать, что определитель такой матрицы всегда равен нулю.

Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – некая базовая (корневая) матрица.

Образуем кронекеровы суммы:

$$A_2 = A_1 \otimes A_1 \quad \text{и} \quad A_3 = A_1 \otimes A_2 .$$

Элементы исходной матрицы A_1 примем целыми положительными числами, которые выберем (подберем) так, чтобы количество неодинаковых чисел в матрице A_3 было максимальным и равнялось 20.

Таких матриц насчитывается превеликое множество, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 17 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 15 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 14 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 17 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 20 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 23 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 26 & 29 \end{pmatrix}$$

Их главная особенность: определители равны 1. Кроме того, во второй и третьей матрице все элементы взаимно простые.

Например, имеем такие кронекеровы суммы

$$A_1 \left(\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 11 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{\oplus} A_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 5 & 6 \\ 13 & 19 & 14 & 20 \\ \hline 13 & 14 & 19 & 20 \\ 22 & 28 & 28 & 34 \end{array}\right) \xrightarrow{\oplus} A_3 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 7 & 7 & 8 & 7 & 8 & 8 & 9 \\ 15 & 21 & 16 & 22 & 16 & 22 & 17 & 23 \\ 15 & 16 & 21 & 22 & 16 & 17 & 22 & 23 \\ 24 & 30 & 30 & 36 & 25 & 31 & 31 & 37 \\ \hline 15 & 16 & 16 & 17 & 21 & 22 & 22 & 23 \\ 24 & 30 & 25 & 31 & 30 & 36 & 31 & 37 \\ 24 & 25 & 30 & 31 & 30 & 31 & 36 & 37 \\ 33 & 39 & 39 & 45 & 39 & 45 & 45 & 51 \end{array}\right)$$

Для корневой матрицы A_1 кронекерово произведение и кронекерова сумма образуют матрицы A_3 с 20 различимыми элементами-числами.

Более создать нельзя. Таков алгоритм. Менее можно.

Кронекерово произведение приводит к детерминанту матрицы = 1, кронекерова сумма – к детерминанту = 0. Сами по себе факты весьма примечательные.

Так, в линейной алгебре известна теорема: однородная система линейных уравнений $CX = 0$ имеет нетривиальное (ненулевое) решение тогда и только тогда, когда определитель (детерминант) матрицы коэффициентов равен нулю $\det C = 0$.

То есть для получения однозначного и единственного решения, кроме корневой матрицы $2{\times}2$ более ничего не надо. Никаких дополнительных параметров-коэффициентов в правой части уравнения.

Именно поэтому числовое моделирование с помощью кронекеровых сумм выглядит предпочтительнее.

Особо подчеркнем, что построение числовых матриц не является самоцелью. Главное – показать саму возможность формирования кортежных триплетов с помощью простых арифметических операций: суммирования и умножения целых чисел.

Это модель. Если хотите, игровая имитация. Но весьма полезная и показательная.

Она дает возможность не столько проникнуть в глубину генетического кода (это задача генетиков), сколько проследить логически или просто попытаться угадать причинные механизмы-связи данного феномена.

Ибо до сих пор «современной науке не известны причины того, почему алфавит генетического языка именно четырехбуквенный (а не из тридцати букв, например); почему из миллиардов возможных химических соединений именно эти четыре азотистые основания

С, **А**, **G**, **U**(**T**) выбраны в качестве элементов алфавита; почему генетически кодируются именно 20 аминокислот и т.д.» [5, с. 22].

Числа 2 и 3

Числа 2 и 3 в числовой модели присутствуют, но в иной интерпретации.

Так, двойка отвечает за процесс деления клеток пополам. Тройка является образующей тела в трехмерном пространстве.

То есть природа остановилась на $2^3 = 8$.

Это позволяет делиться клеткам пополам и одновременно воссоздавать объемное тело.

Таблица Никомаха весьма хороша (см. приложение 1). Но не вносит ясности в механизм образования аминокислот.

Ключевым является пирамидальное число $(4 \cdot 5 \cdot 6)/6 = 20$.

Можно предположить, что основообразующими становятся числа $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$ и пять, как порядок живых систем, который не допускает кристаллизации живых объектов в трехмерном пространстве.

При этом число пять допустимо интерпретировать как косвенный прообраз золотоносного феномена. Через правильный пятиугольник и плитки Пенроуза с единым (!) центром поворота. Последнее соответствует объединению мужского и женского начала, вокруг чего всё и начинается. Как центр (точку) образования структур пятого порядка, свободно воспроизводящихся в трехмерном пространстве без "боязни свернуться" в костный (неживой) прототип.

В целом числа 2 и 3 не являются обусловлено-необходимыми. Во всяком случае, пока нет достоверных оснований. Это некая кодировка различимости. Не более того.

На их месте, без потери общности рассуждений, спокойно могут "уживаться" другие числа.

Вместо заключения

Конечно, было бы замечательно, если с помощью "золотых" числовых матриц Петухова [5] удалось решить хотя бы одну задачу в области генетики. Даже в порядке гипотезы-предположения.

Способ формирования триплетов, в виду его ранней известности и очевидности, не в счет. Человек научился их составлять около трех тысяч лет назад в Китае [23].

Достаточно сравнить 64 генетических триплетов и 64 гексаграмм "Книги перемен".

Кронекерово умножение всего лишь удобно и красиво формализует эту операцию на языке математики. В буквенно-символьной форме, либо в конкретных числах.

Это отмечает и сам Петухов: [5, 285] «бинарное представление построенной автором геноматрицы триплетов известно уже тысячи лет» и представляет гексаграммы в форме шестиразрядных бинарных чисел.

Вместе с тем автор заставляет задуматься о важной проблематике – возможной роли золотого сечения в науке, мироздании и его вероятном применении. В том числе с надеждой на приближение к отысканию истоков и механизмов формирования живого вещества.

Искусственное внедрение золотого сечения в геноматрицы, на наш взгляд, ошибочное действо. Можно даже сказать, без обиняков, в какой-то мере с ненужной направленностью. Подменяя естество образными понятиями. Включая "взывание-обращение" к далеким предкам на основе чисел (2, 3): таблица Никомаха, пифагорейский музыкальный строй и проч. Придавая тем самым некое сакраментальное таинство образованию ДНК.

Сама по себе вещь, конечно, любопытная, но в научном плане весьма неоднозначная.

Отмечая важность матричного анализа генетического кодирования проф. С. Петухова, для себя мы делаем более-менее аргументированный вывод: его "золотая" геноматрица – малозначимый объект. Можно сказать, со слабовыраженным проявлением.

Например, матрица $\begin{pmatrix} \Phi & \phi \\ \phi & \Phi \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$ воспроизводит одновременно две дюжины: обычную и чертову. Не искать же в этом золотоносный сакральный смысл? – В лучшем случае красивая картинка или забавная игрушка. Не более того...

"Золотая" геноматрица уводит в сторону. Она с большим трудом попадает под мифологему (мифологический архетип) К. Юнга – всем понятному восприятию понятия на уровне смутно-расплывчатого и бессознательного восприятия (перцепция лат. perciptio – ощущаю). Не говоря уже от апперцепции (Г. Лейбниц), построенной на осмысленном и осознанном восприятии предметной области.

Действительно, сравнительно несложная схема-"технология" построения генетического кода, возможно, имеет алгебраическую основу. Но это не математическая истина, а только слабо обоснованная гипотеза...

Вместе с тем, если отвлечься от искусственно внедряемого золотого сечения, благо числового материала предостаточно, то высказанные догадки-предположения приобретают более аргументированную подоснову.

Выполненные нами исследования позволяют на это надеяться. Как было показано, четыре взаимно простые числа в квадратной матрице 2×2 через кронекерово произведение и введенную кронекерову сумму приводят к октетной матрице 8×8, содержащей максимально возможное количество различных чисел-элементов из 64, равное 20. Что прочно ассоциируется с 20 видами аминокислот в белковых цепочках генетического кода.

По нашему мнению, именно такой или эквивалентно-подобный алгоритм различимости стал одним из основных моментов-факторов в формировании и генной эволюции живого вещества (по Вернадскому) на планете Земля.

Литература:

1. Василенко С.Л. Квазизолотая пропорция в структурированных системах // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16054, 30.08.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.
2. Watson J.D., Crick F.H. Genetical implications of the structure of deoxyribonucleic acid // Nature. – May 1953, **171**, 964-967.
3. Хендерсон М. Генетика: 50 идей, о которых нужно знать. – М.: Фантом Пресс, 2016. – 208 с.
4. Чернин А.Д. Гамов в Америке: 1934–1968 // Успехи физических наук. – Т. 164, вып. 8. – С. 867–878.
5. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. – М.–Ижевск: РХД, 2008. – 316 с. – URL: petoukhov.com/?page_id=92&lang=ru // АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ. 22966, 15.01.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0001/005b/00011769.htm.
6. Грувер Е.Ю., Штепин В.В. Формула общего члена возвратной последовательности и некоторые аспекты её применения // Вісник студентського наукового товариства ДонНУ. – 2013. – Т. 1, № 5. – С. 284-288. – URL: http://jvestnik-sss.donnu.edu.ua/issue/view/22.
7. Ухов Ю.П. Генетика, язык и форма. Мысли и заметки после прочтения книги С.В. Петухова "Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость" // Квантовая Магия. – 2010. – Т. 7, вып. 2. – С. 2274-2278. – URL: quantmagic.narod.ru/volumes/VOL722010/p2274.html.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

9. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 208 с.

10. Crick F., Barnett L, Brenner S, Watts-Tobin R.J. General nature of the genetic code for proteins // Nature, 1961, **192,** 1227-32. – URL: profiles.nlm.nih.gov/SC/B/C/B/J/_/scbcbj.pdf.

11. Нейланд О.Я. Органическая химия: Учеб. для хим. спец. вузов. – М.: Высш. школа, 1990. – 751 с.

12. Конопельченко Б.Г., Румер Ю.Б. Классификация кодонов в генетическом коде // ДАН СССР. – 1975. – Т. 223, № 2. – С. 471-474.

13. Айала Ф., Кайгер Дж. Современная генетика: В 3-х т. Т. 2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 368 с.

14. Петухов С.В. Симметрии и тензорный анализ генетических кодов. Геометрическая парадигма биоинформатики // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 13270, 04.05.2006. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321010.htm.

15. Смирнов В.В. Соотнесение функций аминокислот, кодируемых кодонами, с порядком расположения гексаграмм по Вэнь-вану // Докл. независимых авторов. Сер. Биология. – 2016. – Вып. 35. – С. 5-16.

16. Федотов С. Простая связь генетического кода с гексаграммами Книги Перемен (И-Цзин) // Cardiometry. – 2016. – № 9. – С. 32-43. – URL: pulse-academy.org/files/I-Ching_RU.pdf.

17. Никитин А.В. Триплеты в ДНК. – URL: andrejnikitin.narod.ru/tripletDNK.htm.

18. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и Золотое сечение // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 13422, 09.06.2006. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321018.htm.

19. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – URL: oeis.org/.

20. Василенко С.Л. «Одна или две трети», как простая модель рациональной пропорции // АТ. – М.: Эл. №77-6567, публ.23089, 23.02.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163219.htm.

21. Weisstein E.W. The CRC Concise Encyclopedia of Mathematics /Краткая энциклопедия математики/, 2nd ed. – Chapman & Hall/CRC, 2002, 3252 p.

22. Dickson L.E. History of the Theory of Numbers, Vol. 2: Diophantine Analysis. – New York: Dover, 2005.

23. Еремеев В.Е. Символы и числа «Книги перемен». – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Ладомир, 2005. – 598 с.

24. Kappraff J. Beyond measure: essays in nature, myth and number. – Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2002. – 582 p.

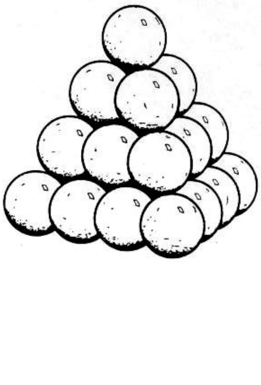
25. Стюарт И. Величайшие математические задачи: Пер. с англ. – М.: Альпина нон-фикшн, 2015. – 460 с.

26. Lenstra H. Aeternitatem Cogita, Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/2, maart 2001, p. 23-28

27. Василенко С.Л. 108 (число) в предыстории золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16377, 20.02.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161794.htm.

28. Василенко С.Л. Синтез квазисовершенных идеальных магических квадратов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15950, 17.06.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161658.htm.

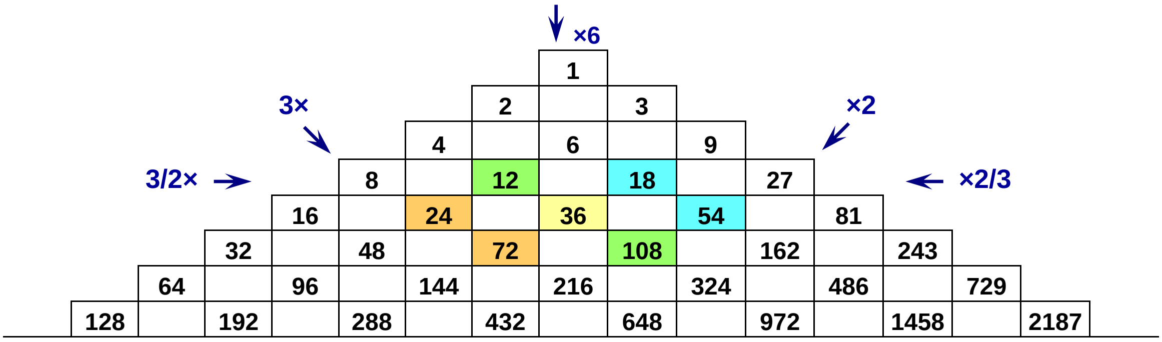
Харьков, Украина



Приложение 1. Таблица Никомаха

В работе [20] описаны тройки целочисленных сторон подобных треугольников, имеющих две пары равных сторон. При этом стороны одного в 2/3 раза больше сторон другого. Например, (8, 12, 18) и (12, 18, 27).

В общем случае числа образуют таблицу треугольной формы заполнения.



Каждая строка треугольника содержит целые числа $2^{i-j} \cdot 3^j$, $i \ge 0$, $j = \overline{1, i}$.

Американский математик Капраф [24, с. 148] называет этот числовой массив таблицей Никомаха, так как идентичная структура чисел появилась в "Арифметике" древнегреческого ученого (около 150 г. н.э.).

Данная таблица, представленная в энциклопедии [19, A036561, A175840], имеет интересные математические особенности:

- каждая строка, каждый столбец и диагональ треугольника, а также каждая линия, соединяющая любые два элемента, содержит нетривиальную геометрическую прогрессию;
- каждое число равно сумме трех ближайших верхних чисел; например, 36 = 12+6+18;
- любое число внутри треугольника связано со своим "окружением" через классические средние величины; например, 36 является среднеарифметическим чисел (18, 54), среднегеометрическим чисел (12, 108) и среднегармоническим чисел (24, 72).

По горизонтали каждая тройка последовательных чисел образует подобные треугольники, соседние из которых отличаются только одной стороной.

Музыкальной гармонией управляют простые числовые отношения. Это было установлено экспериментально. Струна с такой же степенью натяжения, но вдвое меньшей длины 1/2, дает ноту на октаву выше. В западной музыке следующая по значению гармония – кварта, где одна струна по длине составляет 3/4 другой струны, и квинта, где длина одной струны составляет 2/3 от длины другой [25].

Начав с 1 и умножая последовательно на 2 или 3, можно получить числа 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12..., – числа вида $2^a \cdot 3^b$ [19, A003586].

Благодаря связи с музыкой они получили название гармонических [26].

Композитор и теоретик музыки Ф. Де Витри (1291–1361) впервые поставил задачу: найти пары гармонических чисел, отличающихся на единицу. Он сам знал четыре пары с этим свойством (1, 2), (2, 3), (3, 4), (8, 9).Франко-еврейский ученый Леви бен Гершом в своем сочинении «О гармонических числах» доказал (1342 г.), что это весь перечень возможных решений и других не существует.

Таким образом, таблица Никомаха устанавливает связь между двумя рядами: двоичным и троичным.

К слову, гиперфакториал трёх равен $1 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 108$. Весьма примечательное число во многих отношениях [27]. В частности, в "золотоносном" правильном пятиугольнике внутренний угол составляет 108^o.

Приложение 2. Игровая модель магического квадрата

Выполним ни к чему не обязывающий машинный эксперимент на ЭВМ.

Рассмотрим одну из возможных октетных матриц триплетов

$$\begin{pmatrix}
\text{"CCC"} & \text{"CCA"} & \text{"CAC"} & \text{"CAA"} & \text{"ACC"} & \text{"ACA"} & \text{"AAC"} & \text{"AAA"} \\
\text{"CCU"} & \text{"CCG"} & \text{"CAU"} & \text{"CAG"} & \text{"ACU"} & \text{"ACG"} & \text{"AAU"} & \text{"AAG"} \\
\text{"CUC"} & \text{"CUA"} & \text{"CGC"} & \text{"CGA"} & \text{"AUC"} & \text{"AUA"} & \text{"AGC"} & \text{"AGA"} \\
\text{"CUU"} & \text{"CUG"} & \text{"CGU"} & \text{"CGG"} & \text{"AUU"} & \text{"AUG"} & \text{"AGU"} & \text{"AGG"} \\
\text{"UCC"} & \text{"UCA"} & \text{"UAC"} & \text{"UAA"} & \text{"GCC"} & \text{"GCA"} & \text{"GAC"} & \text{"GAA"} \\
\text{"UCU"} & \text{"UCG"} & \text{"UAU"} & \text{"UAG"} & \text{"GCU"} & \text{"GCG"} & \text{"GAU"} & \text{"GAG"} \\
\text{"UUC"} & \text{"UUA"} & \text{"UGC"} & \text{"UGA"} & \text{"GUC"} & \text{"GUA"} & \text{"GGC"} & \text{"GGA"} \\
\text{"UUU"} & \text{"UUG"} & \text{"UGU"} & \text{"UGG"} & \text{"GUU"} & \text{"GUG"} & \text{"GGU"} & \text{"GGG"}
\end{pmatrix}$$

Присвоим элементам порядковые номера от 1 до 64.

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\
25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\
33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\
41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \\
49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\
57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64
\end{pmatrix}$$

Преобразуем данную матрицу в квазисовершенный идеальный магический квадрат

$$\begin{pmatrix}
1 & 62 & 47 & 36 & 49 & 14 & 31 & 20 \\
26 & 19 & 8 & 61 & 42 & 35 & 56 & 13 \\
54 & 15 & 28 & 17 & 6 & 63 & 44 & 33 \\
43 & 40 & 53 & 10 & 27 & 24 & 5 & 58 \\
7 & 60 & 41 & 38 & 55 & 12 & 25 & 22 \\
32 & 21 & 2 & 59 & 48 & 37 & 50 & 11 \\
52 & 9 & 30 & 23 & 4 & 57 & 46 & 39 \\
45 & 34 & 51 & 16 & 29 & 18 & 3 & 64
\end{pmatrix}$$

Его гармония не просто поразительна, внутренняя красота наполнена нескончаемым фейерверком формально-арифметических закономерностей [28].

Разбросаем исходные триплеты в соответствии с их новыми порядковыми номерами, выбранными по данному магическому квадрату

$$\begin{pmatrix}
\text{"CCC"} & \text{"GUG"} & \text{"GAU"} & \text{"UAA"} & \text{"UUC"} & \text{"ACG"} & \text{"AGU"} & \text{"CGA"} \\
\text{"CUG"} & \text{"CGC"} & \text{"AAA"} & \text{"GUU"} & \text{"UCG"} & \text{"UAC"} & \text{"GGA"} & \text{"ACU"} \\
\text{"GUA"} & \text{"AAU"} & \text{"CGG"} & \text{"CUC"} & \text{"ACA"} & \text{"GGU"} & \text{"UAG"} & \text{"UCC"} \\
\text{"UAU"} & \text{"GAA"} & \text{"GUC"} & \text{"CCG"} & \text{"CGU"} & \text{"AGA"} & \text{"ACC"} & \text{"UUG"} \\
\text{"AAC"} & \text{"UGG"} & \text{"UCU"} & \text{"GCA"} & \text{"GGC"} & \text{"CAG"} & \text{"CUU"} & \text{"AUA"} \\
\text{"AGG"} & \text{"AUC"} & \text{"CCA"} & \text{"UGU"} & \text{"GAG"} & \text{"GCC"} & \text{"UUA"} & \text{"CAU"} \\
\text{"UGA"} & \text{"CCU"} & \text{"AUG"} & \text{"AGC"} & \text{"CAA"} & \text{"UUU"} & \text{"GCG"} & \text{"GAC"} \\
\text{"GCU"} & \text{"UCA"} & \text{"UGC"} & \text{"AAG"} & \text{"AUU"} & \text{"CUA"} & \text{"CAC"} & \text{"GGG"}
\end{pmatrix}$$

Собственно и всё…

Далее можно анализировать, что получилось в результате. Возможно, кому-то это покажется небезынтересной и полезной игровой моделью при исследовании кодонов...