Матрицы с числами Фибоначчи и Люка
Часть 1. Матрицы размером 2×2

Ковалев А.Н.

В поисках приложений в физике, где проявлялось бы золотое сечение, естественно на первых порах рассмотреть наиболее простые системы дифференциальных уравнений – системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Тогда поиск сведется к нахождению, соответствующих этим системам, матриц, чьи характеристические уравнения приводили бы к собственным числам и векторам, связанным с числами Фидия. Частично такое рассмотрение проведено в /1/. Более общие случаи рассмотрены в /2/, в приложении «Обобщение одной простой задачи по механике». Приведенный в этих работах анализ, кроме всего прочего, толкает и к более подробному рассмотрению матриц, содержащих числа Фибоначчи и Люка.

Самой простой матрицей, связанной с числами Фибоначчи, является Q = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Даже небольшое обобщение известной формулы (V.E. Hoggat, 1963):

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = Q^n, \quad (1)$$

где F_n – числа Фибоначчи, до:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & \pm F_n \\ \pm F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}^n = Q_{\pm}{}^n, \quad (2)$$

приводит к системе дифференциальных уравнений, имеющей приложения в физике /1/. В частности матрица $Q_-{}^2$ соответствует задаче о колебаниях двух одинаковых по массе шариков на двух пружинах равной жесткости. В /1/ отмечалось, что формула (1) является частным случаем более общей (при k = 1):

$$\begin{pmatrix} F_{kn+1} & F_{kn} \\ F_{kn} & F_{kn-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}^k = Q^{nk}. \quad (3)$$

В свою очередь, это обобщение является частным случаем еще более общей формулы, которая получается из:

$$\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

в результате перемножения k одинаковых матриц. Формула (4) является матричной формой записи известного выражения:

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \quad (4\text{ а})$$

Как видно, суммируются индексы у элементов побочной диагонали матрицы. Формула (4) легко переносится на произведение любого числа аналогичных матриц, откуда при равных m и n и получается формула (3).

Рассмотрим матрицы 2×2 с числами Люка - L_m. Как известно /3/:

$$\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 & L_0 \\ L_0 & L_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

В /3/ Джонсон вводит обозначение: $\begin{pmatrix} L_1 & L_0 \\ L_n & L_{-1} \end{pmatrix} = X$. Легко получить обратную матрицу:

$X^{-1} = 1/5 \cdot X$. Откуда: $X^2 = 5E$, (6)

где E – единичная матрица. Далее, умножив (5) справа на X, получим:

$$5\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1 & L_0 \\ L_0 & L_{-1} \end{pmatrix} - \qquad (7)$$

которая является матричной формой записи известного выражения:

$$5F_m = L_m + 2L_{m-1} = L_{m+1} + L_{m-1} \qquad (7\ а)$$

При возведении (5) в квадрат получим:

$$\begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix}^2 = 5\begin{pmatrix} F_{2m+1} & F_{2m} \\ F_{2m} & F_{2m-1} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Отметим, что (5) является частным случаем более общей формулы:

$$\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

которая является матричной формой записи известного выражения:

$$L_{m+n} = F_m L_{n+1} + F_{m-1} L_n \qquad (9\ а)$$

При этом (5) становится частным случаем (9), поскольку Q^m и X коммутируют /3/:

$$Q^m X = X Q^m .$$

Отметим, что умножение матриц $\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}$ также коммутативно. Действительно:

$$\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = Q^n X Q^m = Q^n Q^m X = Q^m Q^n X = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$$

Из (5) и (7) и (9) получим для третьей степени:

$$\begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix}^3 = 5\begin{pmatrix} L_{3m+1} & L_{3m} \\ L_{3m} & L_{3m-1} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Продолжив процедуру, получим для общего случая:

$$\begin{pmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{pmatrix}^{2k} = 5^k\begin{pmatrix} F_{2km+1} & F_{2km} \\ F_{2km} & F_{2km-1} \end{pmatrix} \qquad (11\ \text{а})$$

$$\begin{pmatrix} L_{m+1}; & L_m \\ L_m; & L_{m-1} \end{pmatrix}^{2k+1} = 5^k\begin{pmatrix} L_{(2k+1)m+1}; & L_{(2k+1)m} \\ L_{(2k+1)m}; & L_{(2k+1)m-1} \end{pmatrix} \qquad (11\ \text{б})$$

В /3/ приводится еще одна формула, связывающая матрицы Q и X (при $m + n = c + d$):

$$5Q^mQ^n = Q^cXQ^dX, \qquad (12)$$

которую можно записать в виде:

$$5\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{c+1} & L_c \\ L_c & L_{c-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{d+1} & L_d \\ L_d & L_{d-1} \end{pmatrix} \qquad (12\ \text{а})$$

Она легко доказывается с использованием коммутативности умножения и (6).

В /3/ рассмотрен общий вид матриц К размером 2×2, имеющих для собственных чисел уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0. \qquad (13)$$

Корнями этого многочлена, как хорошо известно, являются $\lambda_- = (-\varphi)$ и $\lambda_+ = \Phi$.

Если $K = \begin{pmatrix} a; & b \\ c; & d \end{pmatrix}$, то на члены матрицы наложены два условия $a + d = 1$ и $ad - bc = -1$. Тогда:

$$K = \begin{pmatrix} a; & b \\ \frac{1-a+a^2}{b}; & 1-a \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица Q и Q_- являются частным случаем матрицы К при $(a; b)$ равных (1; 1) и (1; -1), соответственно.

Матрица К удовлетворяет уравнению, аналогичному ее характеристическому:

$$K^2 = K + E,$$

где E – единичная матрица. Откуда получаем после последовательного умножения на К и суммирования:

$$K^n = F_n K + F_{n-1} E. \tag{14}$$

Для K имеем интересный частный случай:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_3; & F_1 \\ -F_{-1}; & -F_{-1} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+2}; & F_n \\ -F_{-n}; & -F_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку tr K^m = $(\lambda_-)^m + (\lambda_+)^m = L_m$ и det K^m = (det K)^m = $(-1)^m$, то *характеристическое уравнение* матрицы K^m будет:

$$\lambda^2 - L_m\lambda + (-1)^m = 0$$

и *собственные числа* этой матрицы - $\lambda_1 = \Phi^m$ и $\lambda_2 = (-\varphi)^m$.

У матрицы X: $\lambda = \pm\sqrt{5}$. У матрицы $\begin{pmatrix} L_2 & L_1 \\ L_1 & L_0 \end{pmatrix}$: $\lambda_1 = (1+\varphi^2)$ и $\lambda_2 = (1+\Phi^2)$.

Многие формулы для чисел Фибоначчи и Люка допускают матричный вид, который позволяет приходить к общим выражениям более простым путем, чем если это делать непосредственно с формулами. С использованием матричной формы записи основных уравнений легче доказываются и другие известные формулы. Так из:

$$Q^a Q^b = Q^c Q^d \tag{15}$$

при $a + b = c + d$ легко получить известную формулу:

$$F_a F_b - F_c F_d = (-1)^r (F_{a-r} F_{b-r} - U_{c-r} U_{d-r}). \tag{16 a}$$

где r∈Z. Действительно запишем равенство элемента 22 обеих матриц в (15):

$$F_a F_b + F_{a-1} F_{b-1} = F_c F_d + F_{c-1} F_{d-1}$$

$$F_a F_b - F_c F_d = -(F_{a-1} F_{b-1} - F_{c-1} F_{d-1}).$$

Повторив «итерационную процедуру» r раз, получим (16 a).

Аналогично, при a + b = c + d из (9) можно получить формулу:

$$F_a L_b - F_c L_d = (-1)^r (F_{a-r} L_{b-r} - F_{c-r} L_{d-r}) \tag{16 b}$$

Раскрыв скобки в $Q^{mn} = (F_m Q + F_{m-1} E)^n$, и прировняв 12 элементы обеих матриц, сразу доказываем одну из самых сложных формул:

$$F_{mn} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k F_m^{n-k} F_{m-1}^k F_k.$$

Рассмотрим матрицы $\begin{pmatrix} w_{n+1} & w_n \\ w_n & w_{n-1} \end{pmatrix}$ с элементами, определенными рекуррентным соотношением:

$$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \tag{17}$$

с любыми начальными w_0 *и* w_1. Для них:

$$Q^n \begin{pmatrix} w_1 & w_0 \\ w_0 & w_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{n+1} & w_n \\ w_n & w_{n-1} \end{pmatrix} \text{ -} \tag{18}$$

матричная форма записи известного соотношения:

$$w_{n+1} = F_{n+1} w_1 + F_n w_0.$$

Из нее получается обобщение формулы Кассини (равенство определителей):

$$w_n^2 - w_{n+1} \cdot w_{n-1} = (-1)^{n+1} (w_1^2 - w_1 \cdot w_0 - w_0^2).$$

Поскольку умножение в (18) коммутативно, то верно общее утверждение*: умножение любых двух матриц вида* $\begin{pmatrix} w_{n+1} & w_n \\ w_n & w_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{n+1} & g_n \\ g_n & g_{n-1} \end{pmatrix}$*, элементы которых удовлетворяют рекуррентному соотношению (17), коммутативно.* Откуда получаем аналогично проведенному выше /3, с. 17/:

$$w_a g_b - w_c g_d = (-1)^r (w_{a-r} g_{b-r} - w_{c-r} g_{d-r}) \tag{19}$$

Матрицы размером больше 2

Хотя рассмотрение матриц размером 3×3 и получение определенных результатов началось в начале 70-ых годов /4/, но существует определенная трудность в прямом переносе полученных формул на такие матрицы, которая отчасти обозначена в /5/. Поэтому сложилось мнение, что числам Фибоначчи органично соответствуют только матрицы 2×2. Это мнение согласуется и с видом рекуррентного соотношения для них и с формулой для числа Фидия, совпадающей с характеристическим уравнением для квадратных матриц Q. Обобщение на матрицы размером больше 2 обычно делается одновременно и с обобщением самих чисел Фибоначчи: или введением р-чисел Фибоначчи, предложенных Стаховым и Витенько в 1970 году /6/, или рассмотрением чисел трибоначчи для матриц 3×3 и т.д. Это обобщение корректно и плодотворно, поскольку соответствующие характеристические уравнения для матриц, являющихся обобщением матрицы Q, являются и уравнениями для пределов отношения соседних чисел этих рядов (т.е. обобщением уравнения для числа Ф):

$$\lambda^{p+1} - \lambda^p - 1 = 0 \text{ –}$$

для р-чисел Фибоначчи и:

$$\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k = 0 \text{ –}$$

для чисел n-боначчи.

Соответствующие результаты для матриц трибоначчи приведены в /3, 7/, а для p-чисел Фибоначчи – в /8/, а потом, вместе с перечислением областей приложения, собраны автором в /9/.

Так в случае p = 2 и n = 3, предложены матрицы:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Но в этой статье рассматриваются матрицы, связанные именно с классическими числами Фибоначчи, поэтому во второй части матрицы размером 3×3 будут оставлены в стороне, и тема продолжится с рассмотрения матриц размером 4×4 и больше.

P.S. Статья является компиляцией из книги автора «В поисках пятого порядка».

Обобщение этого материала на общий случай матриц сколь угодно больших размеров будет представлено в Ч.2, которая здесь не выкладывается, т.к. готовится к печати в нормальном журнале. Но уже сейчас она есть в электронном варианте книги /2/. В бумажном варианте книги будет, скорее всего, не ранее конца ноября.

В книге «В П.П.П.» (пока только в электронной версии) произведена замена обозначений чисел Фибоначчи и Люка на F_n и L_n.

Приложение. Исправление ошибки в обобщении задачи о двух грузиках

В /1/ была допущена ошибка при анализе возможных значений отношений масс двух шариков и жесткостей двух пружин в задаче, изображенной на Рис. 1, дающие в решении отношение собственных частот колебаний, пропорциональные числам Фидия. Здесь приведен исправленный вариант, с небольшим вступлением, необходимым для тех, кто не знаком с работой /1/, и мог бы не утруждать себя ее чтением.

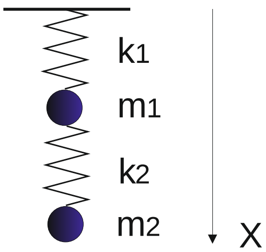

Рис. 1

Рассмотрим одну простую задачу. На двух пружинах различной жесткости висят, соединенные последовательно, два шарика различной массы. Вертикальные колебания шариков описываются уравнениями закона Ньютона:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_2\left(x_1 - x_2\right) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2\left(x_2 - x_1\right) \end{aligned}, \qquad (П1)$$

где индекс 1 относится к верхнему шарику, x_i – отклонение шариков от положения равновесия, а $\ddot{x}_i$ – ускорение шариков. При равных значениях масс и жесткостей пружин получаются собственные частоты колебаний, пропорциональные числу Ф.

Существуют ли другие значения масс и жесткостей пружины, при которых получается отношение частот колебаний равное квадрату числа Фидия? При каких значениях отношений масс и жесткостей будут получаться отношения собственных частот колебаний, равные другим степеням числа Фидия? В самом общем случае обобщения исходной задачи, сохраняющего ее физическую структуру, можно записать:

$m_2 = x \cdot m_1$; $k_2 = y \cdot k_1$,

и тогда получается определитель:

$$A = \begin{vmatrix} 1+y & -y \\ -\frac{y}{x} & \frac{y}{x} \end{vmatrix} \cdot \omega_0^2, \qquad (\text{П2})$$

где $\cdot\omega_0{}^2 = k_1/m_1$. Характеристическое уравнение для матрицы A совпадет с

$$\omega^4 - \omega_0^2 \cdot L_i \omega^2 + (-1)^i \cdot \omega_0^4 = 0 \qquad (\text{П3})$$

при выполнении системы уравнений:

$$\begin{cases} (1+y) \cdot x + y = L_i \cdot x \\ \quad (-1)^i x = y \end{cases}. \qquad (\text{П4})$$

Во-первых, сразу получаем отсутствие решения для нечетных i, поскольку x, $y > 0$. И во-вторых, первое уравнение (П4) при использовании второго ($x = y; i = 2j$) дает: $2 + x = L_{2j}$. Т.е. *уравнению* (П3) *при конкретном* j *соответствует только одно возможное отношение масс и жесткостей:* $x = y = L_{2j} - 2$. Этому случаю соответствует матрица:

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} L_{2j} - 1; & -(L_{2j} - 2) \\ -1; & 1 \end{vmatrix} \cdot \omega_0^2, \qquad (\text{П5})$$

Но на практике значение имеет (проявляется) *только отношение частот колебаний*. Поэтому в общем случае интересен вариант, когда $\omega_1{}^2 = \mathrm{c} \cdot \omega_0^2 \cdot \Phi^m$ и $\omega_2{}^2 = \mathrm{c} \cdot \omega_0^2 \cdot (-\varphi)^m$, где с - константа. В этом случае имеем характеристическое уравнение:

$$\omega^4 - \mathrm{c} \cdot \omega_0^2 \cdot L_m \omega^2 + (-1)^m \cdot \mathrm{c}^2 \cdot \omega_0^4 = 0 \qquad (\text{П6})$$

Если характеристическим уравнением для А будет (П6), то вместо (П4) получим:

$$\begin{cases} (1+y) \cdot x + y = \mathrm{c} \cdot L_m \cdot x \\ \quad \mathrm{c}^2 (-1)^m x = y \end{cases}. \qquad (\text{П7})$$

Откуда: $y = \mathrm{c} \cdot L_{2j} - 1 - \mathrm{c}^2 = -(\mathrm{c} - \varphi^{2j})(\mathrm{c} - \Phi^{2j})$.

Матрица А будет равна:

$$A = \begin{vmatrix} \mathrm{c}L_{2j} - \mathrm{c}^2; & 1 + \mathrm{c}^2 - \mathrm{c}L_{2j} \\ -\mathrm{c}^2; & \mathrm{c}^2 \end{vmatrix} \cdot \omega_0^2 \qquad (\text{П8})$$

Матрица В, очевидно, является частным случаем А при $\mathrm{c} = 1$.

Важное следствие: *Отношение собственных частот могут быть пропорциональны только четной степени числа Фидия.*

Поскольку y > 0, то c $\in \left(\varphi^{2j};\ \Phi^{2j}\right)$. При $c = c_1 = L_{2j}/2$ значение y достигает максимума $y_{max} = y_1 = \frac{5 \cdot F_{2j}{}^2}{4}$, при этом $x = x_1 = \frac{5 \cdot F_{2j}{}^2}{L_{2j}{}^2}$. В свою очередь x достигает максимума при $c = c_2 = 1/c_1$ При этом $x_{max} = x_2 = y_1$, а $y = y_2 = x_1$.

Среди возможных значений c можно выделить особые случаи, когда $c = F_n$. Тогда при $j = 1$ мы получаем кроме исходной задачи, которой соответствует $n = 2$, еще один: $n = 3$ и $y = 1$; $x = 1/4$. При $j = 2$ получаем $n = 2, 3, 4, 5$ и $(x;\ y) = (5; 5), (9/4; 9), (11/9; 11)$ и $(9/25; 9)$.

Можно в (П7) избавиться от c, и получить связь между отношением масс шариков и жесткостей пружин, при которых отношение частот колебаний равно четной степени числа Фидия:

$$x + y \cdot x + y = L_{2j} \cdot \sqrt{xy}. \qquad \text{(П9)}$$

На рисунке 1 изображен график этой зависимости, симметричный относительно прямой y=x, для случая j = 1.

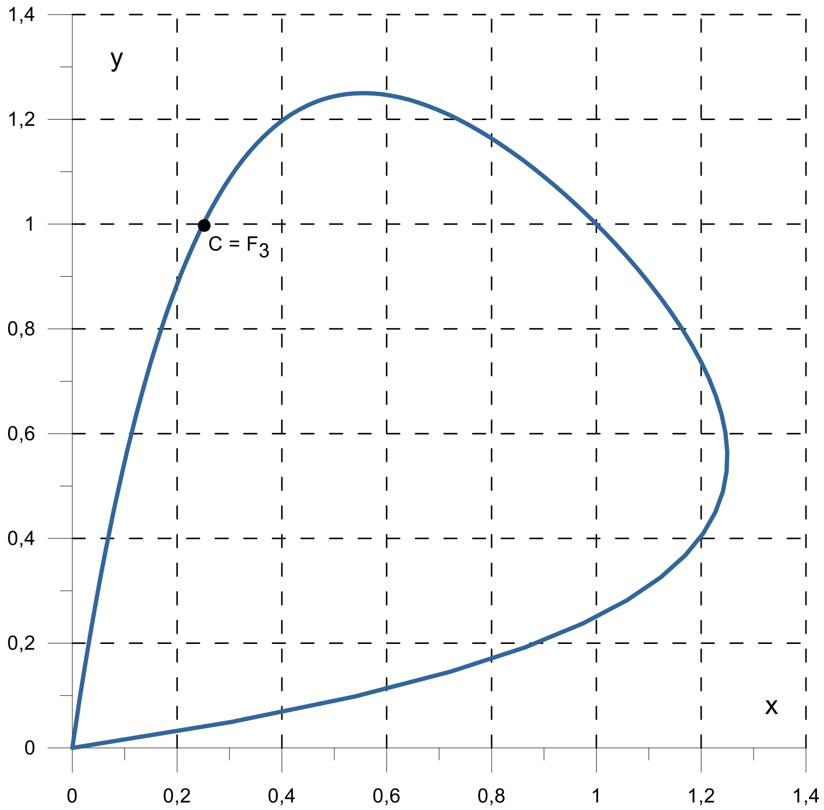

Рис. 1 Отношения масс шариков и жесткостей пружин, при которых отношение собственных частот равно F².

Литература

1. А.Н. Ковалев, Обобщение одной задачи по механике // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.22862, 25.12.2016 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/3174-kv.pdf
2. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. 2017 http://kovalevandrey.ihostfull.com/Books/Book_1.html
3. Robert C. Johnson, Fibonacci numbers and matrices, 2009, http://www.maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/PED/fib.pdf
4. J. E. Walton and A. F. Horadam Some Properties of Certain Generalized Fibonacci Matrices, Fibonacci Quarterly Volume 9, Number 3, May, 1971.
5. H. W. Gould A History of the Fibonacci $ {Q} $-Matrix and a Higher-Dimensional Problem, Fibonacci Quarterly, Volume 19, Number 3, August, 1981 http://www.fq.math.ca/Scanned/9-3/walton.pdf
6. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого- цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
7. Marjorie Bicknell and V. E. Hoggatt, Jr. Generalized Fibonacci Polynomials, Fibonacci Quarterly, Volume 11, Number 5, December, 1973.
8. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci Q-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
9. А.П. Стахов Нужны ли современной науке p-числа Фибоначчи и p-коды Фибоначчи? // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15355, 20.06.2009. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/1123-sth.pdf