Ткаченко И.С., Ткаченко М.И.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ: ФУНКЦИИ ФИБОНАЧЧИ, ФУНКЦИИ ЛЮКА И ДИНАМИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Происходящие в природе и обществе процессы являются динамическими и часто возникает практическая необходимость выделить те из них, которые являются гармоническими, то есть отвечающие свойству золотого сечения. На свойствах золотого сечения построена также и система функций Фибоначчи и функций Люка как функции гиперболического типа[1].

Практическую значимость функций Фибоначчи и функций Люка

$$sft = \frac{\Phi^{2t} - \Phi^{-2t}}{\sqrt{5}}, \quad cft = \frac{\Phi^{2t+1} + \Phi^{-2t-1}}{\sqrt{5}}, \quad slt = \Phi^{2t+1} - \Phi^{-2t-1}, \quad clt = \Phi^{2t} + \Phi^{-2t} \qquad (1)$$

для научных исследований подтверждают и результаты решения известного в математической физики как волновое уравнение в частных производных гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (2)$$

которое моделируют колебательные процессы струны и стержня, звуковые, электромагнитные, газов, а также многие другие распространения в однородных средах. Решение этого уравнения определяется методом Фурье как произведение двух функций одной переменной, то есть

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(at), \qquad (3)$$

которые удовлетворяют конкретным краевым и начальным условиям.

Предположим, что такими функциями могут быть $X(x) = sfx$ и $T(at) = sfat$ с корректирующим коэффициентом a и тогда (3) примет вид

$$u(x,t) = sfx \cdot sfat \ . \qquad (4)$$

Учитывая то, что функции Фибоначчи и функции Люка являются непрерывно дифференцируемыми, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = sfat \cdot \frac{2ln\Phi}{\sqrt{5}} \cdot clx; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = sfat \cdot (2ln\Phi)^2 \cdot sfx; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{2ln\Phi}{\sqrt{5}} \cdot clat \cdot sfx; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,(2ln\Phi)^2 sfat \cdot sfx \qquad (8)$$

подставим значения для вторых частных производных (6) и (8) в уравнение (2) получим

$$a^2\,(2ln\Phi)^2 sfat \cdot sfx - a^2 \cdot sfat \cdot (2ln\Phi)^2 \cdot sfx \equiv 0, \qquad (9)$$

что и доказывает предположение о возможности решения волнового уравнения (2) с помощью функций Фибоначчи и функций Люка.

Вместе с этим отметим, что решением уравнения (2) являются также и следующие функции

$$u(x,t) = sfx \cdot\ sfat = (cl(at+x) - cl(at-x))/5\ , \qquad (10)$$

$$u(x,t) = cfx/a \cdot sft = (cl((x/a)+t+1) + cl((x/a)-t))/5\,, \qquad (11)$$

$$u(x,t) = clx \cdot cl(t/a) = cl(x+t/a) + cl(x-t/a)\ . \qquad (12)$$

Получение же конкретного решения определяется начальными и краевыми условиями. Предположим, что функция (4) моделирует колебательный процесс и в начальный момент времени $t = 0$ зафиксирована частота 261,63Гц, которая соответствует ноте “до”[2], а это позволяет задать краевые условия при $x = 6$, так как $sf6 = 233$, то есть с учетом того что $ln\,\Phi = 0.4812$ и $\sqrt{5} = 2.2361$ имеем

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} I_{x=6} = \frac{2a_1 ln\,\Phi}{\sqrt{5}} sf6 = \frac{2a_1 0{,}4812}{2{,}2361} \cdot 233 = 261,63. \qquad (13)$$

Из условия (13) определяем значение параметра $a_1 \approx 2,110638$. А далее, если задать, что $100 \cdot \Phi^2 = 100gold(2) = 261,80339885...$ также соответствует частоте ноты “до”, тогда краевое условие (13) позволит найти еще одно значения параметра a_2 значения частоты ноты “до”.

Для второго варианта имеем соотношение

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} I_{x=6} = \frac{2a_2 ln\,\Phi}{\sqrt{5}} sf6 = \frac{2a_2 0{,}4812}{2{,}22361} \cdot 233 = 261,80339885, \qquad (14)$$

из которого находим значение параметра $a_2 \approx 2,112037$.

Сравнивая оба результата $a_1 = 2,110638$ и $a_2 = 2,112037$ видим, что абсолютная величина ошибки $\Delta_a = 0,001399$ и относительная ее погрешность $|\delta| = 0,066\,\%$, которая кстати также имеет систематическую ошибку, позволяют нам утверждать о соответствии ноты “до” значению ста квадратам числа Фидия, или $100 \cdot \Phi^2 = 100gold(2) = 261,80339885...$

Полученный результат дает возможность пересмотреть значения частот нот

для первой октавы и дать оценку их погрешности (таб.1).

Таблица 1.

Соответствие значений частот нот 1-ой октавы по двум вариантам: принятая (действующая) и расчетная (предлагаемая).

№ п/п	нота	1-ой октава (принятая)	$100 \cdot \Phi^2 \cdot gold(1/8)$	1-ой октава (предлагаемая)	$\lvert\delta_{3-5}\rvert$ %
1	2	3	4	5	6
1	до	261,63	261,80	261,80	0,065
2	до-диез	277,19	278,03	277,38	0,302
3	ре	293,67	295,27	293,89	0,542
4	ре-диез	311,13	313,58	311,38	0,781
5	ми	329,63	333,02	329,92	1,018
6	фа	349,23	353,67	349,55	1,255
7	фа-диез	370,00	375,59	370,36	1,488
8	соль	392,00	398,88	392,41	1,725
9	соль-диез	415,31	423,61	415,76	1,959
10	ля	440,00	449,87	440,51	2,200
11	ля-диез	466,17	477,76	466,73	2,426
12	си	493,89	507,38	494,51	2,657

Заполнение таблицы1 сделано с учетом следующих условий:

- первая нота первой октавы начинается с ноты”до” с частотой 261,63Гц и все ее частоты в дальнейшем, как было признано в Древней Греции, увеличиваются в $\sqrt[12]{2}$ раза, то есть в 1,059463 раза, таким образом следующее значение “до-диез” составит 277,19Гц [2] и так далее смотри

табл.1 столбец 3;

- четвертый столбец таблицы также начинается с ноты “до”, но следующее значение для ноты “до-диез” определяется умножением 261,80Гц на значение в $gold(1/8) = \Phi^{1/8} = \sqrt[8]{\Phi} = 1,061997$ раза, то есть это будет значение $100 \cdot \Phi^2 \cdot gold(1/8) = 278,0345$ Гц, и так далее;
- при выполнении вычислительных операций по четвертому столбцу замечена систематическая ошибка, которую скорректировано в пятом столбце таблицы;
- в шестом столбце приведены относительные погрешности между значениями частот нот третьего и пятого столбцов.

Таким образом, решение волнового уравнения гиперболического типа с применением функций Фибоначчи и функций Люка позволило выделить музыкальный гармоничный динамичный ряд нот для первой октавы, составленный на основе значения числа Фидия. Возможно знаменитые композиторы Л.ван Бетховен, Ф.Шопен и др. при сочинении своих музыкальных произведений, написанных в ритмах золотого сечения, они видимо интуитивно использовали составленный нами гармоничный динамичный ряд. Полученные результаты надеемся также будут полезными при исследованиях различных волновых процессов: в расшифровке сообщений из космоса или от других цивилизаций, природных явлений, состояния организма человека и иных живых существ, при оценке эффективности волнового принципа Элиота при торгах на финансовых биржах, компьютерного моделирования музыкальных произведений, сезонных колебаний в экономике и т.п.

1.Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия фибоначчи//ДАН Украины,1993г., №3, − С.9-14.

2.Маковецкий П.В. Смотри в корень! Сборник любопытных задач и вопросв. − 6-е изд. − М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1991,с.2