О мифологии и разрешимости задачи "колодец Лотоса" (crossed ladders)

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Приведено строгое аналитическое решение задачи "колодец Лотоса" (crossed ladders). Одновременно показано, что в общем случае она не выполнима геометрически с помощью циркуля и линейки. В частности, для исходных параметров (1, 2, 3) – единичного расстояния $h = 1$ над дном колодца точки пересечения двух скрещивающихся прутов (лестниц) длиной 2 и 3 меры. Вместе с тем задача допускает приближенные геометрические построения с высокой точностью, а также множество целочисленных решений для диаметра колодца $d \geq 56$ и уровня воды $h \geq 30$.

Оглавление

Ворот заскрипел... Мы разбудили колодец, и он запел…
Антуан де Сент-Экзюпери,
Маленький принц, 1943

Вступление

По мере продвижения по затронутой теме вспомнился один миф. А может, быль.

Во время второй мировой войны враждующие стороны подбрасывали друг другу разного рода изящные математические головоломки.

Расчет был прост: редкий ученый или инженер оставит их незамеченными. Обязательно станет ломать голову, отвлекаясь тем самым от решения текущих военных проблем.

Такова психология многих творческих людей.

В наше время особо популярным в этой сфере стал американский математик-любитель Мартин Гарднер (1914–2010), написавший многочисленные статьи и книги по занимательной математике, в которых описываются различные головоломки, чудеса и тайны.

Его особый стиль отличают «доходчивость, яркость, убедительность изложения, блеск, парадоксальность мысли, новизна и глубина научных идей» (ru.wikipedia.org/?oldid=80594065).

Занимательность он трактует как увлекательно-интересное познание, чуждое праздной развлекательности, и стимул вовлечения ученых для проведения серьезных исследований.

Не обошел стороной он и задачу "колодец Лотоса", известную в англоязычной литературе как *crossed ladders problem*, о чём упомянуто в работе [1]. Возможно, поэтому между ними отсутствует взаимное соответствие в разноязычных энциклопедиях.

Миф или не миф, вот в чём вопрос

Мы полностью удовлетворены наблюдениями В. Белянина [2], что упоминаемая в литературе задача "колодец Лотоса" или "crossed ladders" имеет весьма отдаленное отношение к древнеегипетским жрецам. Если вообще имеет.

Его доводы и аргументация звучат вполне убедительно.

Действительно, в своих подробностях описания тест-задача фараона больше напоминает красивую выдуманную легенду.

Хотя «с математической точки зрения задача "колодец Лотоса" имеет полное право на самостоятельную жизнь без древнеегипетских жрецов» [2].

По мнению В. Арнольда, в математике наличествуют сотни формул и теорем, которые названы в честь ученых, не имеющих к установленным закономерностям прямого или даже косвенного отношения. Видимо, начиная с теоремы Пифагора.

Но от этого никто сильно не парится и не взывает общественность восстанавливать историческую справедливость, которая часто выглядит довольно туманной.

Так или иначе, но упомянутую задачу можно отнести к разряду изящных головоломок, подкупающих простотой своей формулировки.

Оставляя ниву времен далекого прошлого историкам и рассматривая только математическую суть задачи фараона, с позиций сегодняшнего дня уже не столь важно, была ли она реально сформулирована или просто обозначена почти три тысячелетия назад.

Когда размах фантазий исчерпан, всё становится на свои места...

Аналитика

Для априори заданного набора параметров $(h < A < B)$ (рис. 1) диаметр колодца определяется как $d = \sqrt{A^2 - a^2} = \sqrt{B^2 - b^2}$, где величины a, b – положительные корни двух уравнений четвертой степени [3]:

$$x^4 - 2hx^3 \pm (h - x)^2 \left(B^2 - A^2\right) = 0. \qquad (1)$$

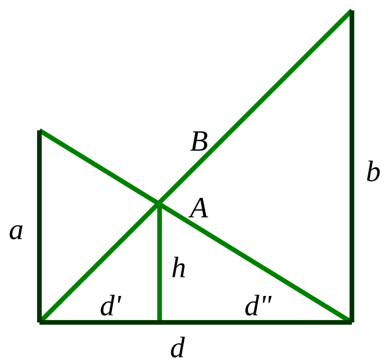

Рис. 1. Пересечение неравных отрезков длиной A и B

При $(h, A, B) = (1, 2, 3)$ аналитическая запись положительного корня для a имеет вид:

$$\left| \begin{array}{c} a = k + 1 = \dfrac{1 + \sqrt{z-4} + \sqrt{2\sqrt{z^2+4} - 2\sqrt{z-4} - z - 3}}{2} = 1{,}57612871\ldots, \\ z = \dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{25}{t} + 5\right) = 5{,}63079775\ldots, \qquad t = \sqrt[3]{395 + 60\sqrt{39}}\,, \end{array} \right| \qquad (2)$$

где $k = d'/d''$ – отношение частей диаметра.

Соответственно диаметр колодца равен $d = \sqrt{4-a^2} = 1{,}23118572\ldots$

В общем случае [4] произвольного набора исходных параметров ($h < A < B$) решение для величины d находится согласно последовательной цепочке формул:

$$c = \frac{4h}{\sqrt{B^2 - A^2}}, \quad v = \frac{c^2}{2}, \quad s = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^3 + v^2}, \quad u = \sqrt[3]{s+v} - \sqrt[3]{s-v},$$

$$x = \frac{c}{4} + \frac{\sqrt{c^2 - 4u}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2-4u}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{u^2+4} + 2u},$$

$$(b, a) = \left(x \pm \frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{2}, \qquad d = \sqrt{A^2 - a^2} = \sqrt{B^2 - b^2}.$$

Здесь x – положительный корень алгебраического уравнения $x^3(x - c) = 1$.

Ранее отмечалось, что очень хорошее приближение искомого диаметра d колодца дает формула $\tilde{d} = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ с точностью десятичной дроби до семи первых цифр.

Выделяя квадрат суммы, с учетом очевидных при $h = 1$ равенств $a + b = ab$, $a = a' + 1$, $b = b' + 1$ получаем:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2 \pm 2ab}{ab} = a + b - 2 = a' + b';$$

$$\boldsymbol{\tilde{d} = 1 + \frac{a' + b'}{10} \approx 1{,}2311852}. \tag{3}$$

Оценка диаметра колодца по квадратному уравнению

Исходя из равенства $\tilde{d} = (10 + a' + b')/10 = (8 + a + b)/10$, имеем $a + b = ab = 10\tilde{d} - 8$.

Принимая $d \approx \tilde{d}$ и складывая равенства для прямоугольных треугольников $a^2 = 4 - d^2$, $b^2 = 9 - d^2$, запишем квадрат суммы $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$:

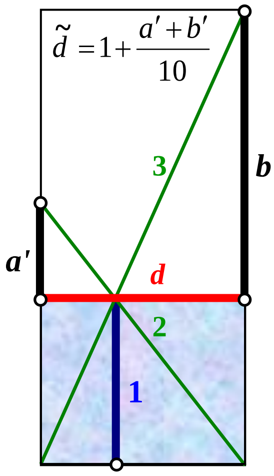

Рис. 2. Примерное геометрическое решение "задачи фараона"

$$(10\tilde{d} - 8)^2 = 13 - \tilde{d}^2 + 2\cdot(10\tilde{d} - 8)$$

или в виде квадратного уравнения

$$102\tilde{d}^2 - 180\tilde{d} + 67 = 0.$$

Отсюда находим аналитическое решение

$$\tilde{d} = \frac{1}{17}\left(15 + \sqrt{\frac{211}{6}}\right) \approx 1{,}2311852\ \ldots.$$

Маловероятно, чтобы в древности диаметр вычисляли по данной формуле.

Скорее всего, реализуя подобный путь, решение могло находиться геометрическим способом.

А именно: десятая часть суммы "мокрых" проекций $a' + b'$ тростинок плюс "мокрая" единично-мерная часть (рис. 2).

Иными словами, расчетный диаметр отличается от единичной меры на десятую часть суммы "мокрых" частей проекций $a'+b'$.

Складывать отрезки и определять десятую часть суммарного отрезка древние ученые, конечно, умели. Поскольку сохранились только считанные папирусы, миф-легенда колодца Лотоса по-прежнему имеет право претендовать на реальность. Так или иначе, но получаемая точность приближенного решения в семь значащих цифр поражает.

Мы не призываем «учиться математике у древних египтян», как утверждает автор [1]. Однако можно восхищаться решением тестовой задачи фараона с изумительной точностью в простом виде (3), если оно было у египтян предположительно именно таковым.

Геометрическое нахождение диметра здесь очень простое с применением стандартных построений с помощью циркуля и линейки без делений:

- складываются два отрезка a' и b';
- полученный составной отрезок делится пополам;
- на половинке находится пятая часть, которая добавляется к единичному отрезку.

Искомое решение готово. С практически идеальной точностью.

Просто и ясно с геометрической точки зрения.

Один характерный угол

При $(h, A, B) = (1, 2, 3)$ угол наклона маленькой тростинки A (см. рис. 2) составляет $\alpha \approx 52{,}005$ градусов – практически целое число.

Ничем особо не примечательный угол в тригонометрии. Равно как и на практике.

Хотя само число 52 иногда встречается [5]:

- полная колода игральных карт (без джокеров) содержит 52 карты: 13 наименований по 4 масти;
- диапазон большинства современных фортепиано составляет 88 полутонов и соответствующих клавиш, из которых 52 белые;
- согласно данным ISO 8601 большинство лет земного календаря имеет 52 полные недели;
- в гражданском календаре Майя 52 – "значительное число" повторения дат в календарном круге, когда ацтеки ожидали наступления конца света каждые 52 года;
- 52 – пятое десятиугольное число, третье неприкосновенное число, шестое число Белла.

Угол α близок к острому углу $\beta = \mathrm{arctg}\sqrt{\Phi} \approx 51{,}827^{\circ}$ в прямоугольном треугольнике Кеплера с его характерной пропорцией и отношением сторон $\sqrt{\Phi}$ на основе константы золотого сечения $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

Угол β треугольника Кеплера предположительно равен углу наклона граней пирамиды Хеопса, что позволяет проводить гипотетически-оценочные сравнения между этими объектами и колодцем Лотоса.

Целочисленные решения

Существует ряд решений, в которых основные геометрические отрезки выражаются целыми числами.

Эти решения содержат Пифагоровы тройки (триплеты) для прямоугольных треугольников со сторонами (a, d, A) и (b, d, B), а также целочисленные решения диофантового уравнения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h}$.

В теории чисел оно известно как оптическое уравнение [6].

Данные условия можно ужесточить дополнительным требованием на целые значения слагаемых величин $d' + d'' = d$.

Проф. А. Шелаев ошибочно утверждает [1], что при $d < 1000$ число таких наборов равно 41.

Мы определили, по крайней мере, 132 приемлемых вариантов (см. приложение).

При этом точка пересечения отрезков *A, B* делит их также на составные целые части. Но вот перпендикулярность этих отрезков ни разу не зафиксирована.

В целом задача поиска целочисленных решений на самом деле проще аналитики для диаметра *d,* поскольку не нужно решать уравнения четвертой степени.

Вместо исходных параметров (*h, A, B*) можно сразу задавать Пифагоровы тройки с известным диаметром, после чего подбирать целые значения высоты *h*.

Разные аспекты решения проблемы лестниц (crossed ladders) в целых числах можно найти, например, в работах [7–9].

Если не принимать требование целостности составных частей $d' + d'' = d$, то «минимально возможным решением» является набор целых чисел для $d = 40$:

$$(a,\ b,\ h,\ A,\ B,\ d) = (42,\ 399,\ 38,\ 58,\ 401,\ 40).$$

Аппроксимация пустоты

Профессор приводит «в качестве нового (?) примера» [1] хорошо и давно известное решение [3].

При этом непонятно зачем записывает функцию и называет её аппроксимирующей (?),

$$W(x) = g \cdot \left[\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{b(x)}{a(x)} + \frac{a(x)+b(x)}{a(x)\cdot b(x)} \right], \tag{4}$$

где $a(x) = \sqrt{A^2 - x^2}$, $b(x) = \sqrt{B^2 - x^2}$,

$g = 10 \cdot \left(1 + \frac{10}{11}\right) = 19{,}(09)$ – числовой коэффициент.

В исследуемой задаче функция $W(x)$ де-факто ничего не аппроксимирует.

Она лишь воспроизводит одну единственную точку $W(d) = d$.

Но теряет реальный смысл на иных диапазонах x и дает неверные оценки $W(d) \neq d$ для других целочисленных вариантов.

Чтобы получить все 132 решения по форме (4), нужно каждый раз (!) подбирать новое значение коэффициента g.

Спрашивается, зачем? – Ведь это ровным счетом ничего не дает!

Всё равно, что аппроксимировать пустоту.

При этом лишь отдельные значения g могут быть записаны в виде несложных десятичных дробей (конечных или периодических):

№ строки (см. прилож.)	2	7	14	20	40	77	103	118
g	19+1/11 19,(09)	38,4	190,4	139+1/11 139,(09)	118+26/33 118,(78)	2^8=256	328+2/37 328,(054)	250+10/11 250,(90)

В остальных случаях величины g больше похожи на иррациональные числа, ибо имеют очень большую длину периода десятичной дроби.

В математике существует понятие "дурной бесконечности".

По аналогии, для соотношения (4) вполне подойдет характеристика "дурной аппроксимации", ибо для каждого из целочисленных примеров (строк) необходимы свои коэффициенты g, которые не образуют сколько-нибудь отчетливую закономерность.

Кроме того, сам термин аппроксимирующей функции к (4) является неточным, поскольку де-факто отсутствует истинная функция, для которой осуществляется аппроксимация. Как замена одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным объектам, но более простыми.

Равно как и применение малопонятного термина "геометрическо-физические..." [1], который не используется в научной литературе.

Для поиска целочисленных решений не нужны никакие надуманные "аппроксимации" типа (4) разового употребления. Достаточно грамотно составить поисковый алгоритм с учетом известных знаний о Пифагоровых тройках и оптическом уравнении [10].

Не усложняйте простое. Упрощайте сложное!

Именно это подразумевал П. Дирак, когда писал: «Раньше я видел смысл лишь в точных уравнениях. Мне казалось, что если пользоваться приближенными методами, то работа становится невыносимо уродливой, в то время как мне страстно хотелось сохранить математическую красоту. Инженерное образование, которое я получил, как раз научило меня смиряться с приближенными методами, и я обнаружил, что даже в теориях, основанных на приближениях, можно увидеть достаточно много красоты... все наши уравнения надо рассматривать как приближения, отражающие существующий уровень знаний, и воспринимать их как призыв к попыткам их усовершенствования» [11, с. 108].

К слову, данную фразу профессор приводит [1] в кавычках, но в вольном изложении. С нарушением общепринятых правил цитирования. Как впрочем, и многое другое.

Часто искажая до неузнаваемости выводы и высказывания других авторов. Tale quale...

Геометрическая неразрешимость задачи "колодец Лотоса"

Хорошо известно, если алгебраическое уравнение имеет целые коэффициенты, и коэффициент при наивысшей степени неизвестного равен 1, то каждый рациональный корень уравнения должен быть целым числом, на который свободный член делится без остатка [12, с. 140].

В задаче с перекрещивающимися отрезками (лестницами) свободный член уравнений для a, b согласно (1) равен $h^2\left(B^2 - A^2\right) = 5$.

По условию задачи $(h, A, B) = (1, 2, 3)$, то есть проекции $a, b < 3$.

Невозможно подобрать целое число, меньшее трех, которое делилось бы на пять без остатка. То есть числа a, b – иррациональные, что наглядно видно из аналитического решения, представленного в работе [13].

Метод Феррари позволяет свести уравнение четвертой степени к кубическому уравнению, корни которого легко определяются по формуле Кордано.

При этом уравнение четвертой степени и полученное из него приведенное уравнение третьей степени либо оба одновременно имеют рациональные корни, либо оба их не имеют.

Кубическое уравнение (третьей степени) с рациональными коэффициентами, не имеющее рациональных корней, неразрешимо в квадратных радикалах [12, с. 139–140].

Поскольку для исходных параметров $(h, A, B) = (1, 2, 3)$ получаемые проекции a, b – числа иррациональные, то базовое уравнение (1) также неразрешимо в квадратных радикалах.

Имеет место и обратная теорема: если какой-либо корень кубического уравнения с рациональными коэффициентами может быть построен посредством циркуля и линейки, то это уравнение обладает, по крайней мере, одним рациональным корнем [14, с. 211].

Таких рациональных корней нет как для кубического, так и для исходного уравнения четвертой степени. Это подтверждается также аналитическим решением (1).

Следовательно, **задача Лотоса (1, 2, 3) геометрически не решается.**

В конце своей статьи В. Белянин пишет [2]: «чтобы геометрически решить задачу "колодец Лотоса" уравнение четвертой степени может быть и не надо сводить к уравнению третьей степени. Есть над чем подумать... Желаю уважаемым коллаборациям не расслабляться и искать геометрическое решение задачи "колодец Лотоса". Буду рад приветствовать первого Магистра-Теурга, нашедшего с помощью циркуля и линейки диаметр колодца, спрятанного "античными фараонами" и "жрецами Ра" в древнем храме за стеной из глыб».

Напутствие-пожелание, конечно, доброе. Но, увы, бесперспективное.

Нет смысла корпеть-искать геометрическое решение задачи для исходных параметров (1, 2, 3). С помощью циркуля и линейки диаметр колодца найти невозможно.

Циркулем и линейкой допустимо построить любое квадратично иррациональное выражение от заданных чисел (отрезков).

Ничего другого построить нельзя!

Выполняя любую цепочку построений, мы никогда не выйдем из области квадратично иррациональных выражений от исходных чисел.

Так, кубическое уравнение с целыми коэффициентами, не имеющее рациональных корней, неразрешимо в квадратных радикалах.

Неразрешимость задачи даже в одном-единственном (частном) случае означает, что у неё нет и общего решения.

Хотя это не признак того, что она никогда не решается.

Примером тому служат приведенные нами целочисленные решения, допускающие геометрические построения.

Можно также несколько снизить жесткие требования на чертежные инструменты.

В частности, если снять строгое ограничение на линейку и на ней отметить единичную меру, то исходная задача допускает несложное точное решение [13, 15].

Конечно, такой способ не является классическим, но весьма к нему близок. Поскольку речь идет не вообще о линейке с делениями, а всего лишь отметке на ней одного отрезка принятой меры.

Согласитесь, вещь – довольно естественная, когда речь идет о метрическом определении диаметра, который так или иначе нужно будет сравнивать с принятой мерой.

Где ж ей быть, как ни на линейке!?

Вместо заключения

Напоследок хотим предложить одну несложную задачу:

построить прямоугольную трапецию с перпендикулярными диагоналями,
одна из которых равна основанию трапеции.

Она имеет прямую аналогию-интерпретацию в терминологии "колодца Лотоса" с его диаметром, скрещивающейся парой тростинок и уровнем живительной воды.

Решение достаточно простое и приводит к любопытному результату.

Как раз для коллаборации АТ, где разные часто с противоположными взглядами люди иногда способны организовать совместную деятельность типа "мозгового штурма".

С их настроем и взаимодействием для обмена знаниями, обучения, достижения общей цели и взаимного согласия. Что невольно становится заметным дефицитом в стремительном беге нашей жизни.

Quaerite et invenietis!

Используемые источники:

1. Шелаев А.Н. Геометрическо-физические аналогии при рассмотрении задач о движении точки пересечения двух отрезков или их продолжений в областях с подвижными границами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23524, 03.07.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163345.htm.
2. Белянин В.С. Колодец Лотоса: утверждение, что это задача древнеегипетских жрецов – иллюзия // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23556, 18.07.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163358.htm.
3. Weisstein E.W. Crossed Ladders Problem. From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/CrossedLaddersProblem.html.
4. The Crossed Ladders Problem. – 2011. – URL: janmr.com/blog/.
5. Wikipedia contributors. "52 (number)". – Wikipedia, The Free Encyclopedia, 17 Jul. 2017. Web. 19 Jul. 2017.
6. Dickson L.E. History of the Theory of Numbers. Volume II: Diophantine Analysis // Chelsea Publ. Co., 1952, pp. 688–691.
7. Bennett A.A. E 433 (1940, 487) // Amer. Math. Month., April (1941), 268-269.
8. Sutcliffe A. Complete Solution of the Ladder Problem in Integers // Math. Gaz. Vol. 47, No. 360 (May, 1963), 133-136.
9. Nelson H.I. The Two Ladders // J. Recreational Math. 11, 4 (1979-80), 312-314.
10. Wikipedia contributors. "Optic equation". – Wikipedia, The Free Encyclopedia, 20 Mar. 2017. Web. 18 Jul. 2017.
11. Дирак П.А.М. Воспоминания о необычной эпохе // Успехи физических наук. – 1987. – Т. 153, вып. 1. – С. 105-134.
12. Адлер А. Теория геометрических построений: пер. с нем. 3-е изд. – Л.: Учпедгиз, 1940. – 232 с. – http://ilib.mccme.ru/djvu/geometry/adler.htm.
13. Василенко С.Л. Тест-задача египетских фараонов для колодца Лотоса // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23457, 07.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163321.htm.
14. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости: 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1957. – 268 с.
15. Василенко С.Л. В поисках математических истин у древних египтян // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23507, 24.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163337.htm.

Харьков, Украина

Приложение

Целочисленные решения задачи "колодец Лотоса" ($d \leq 1000$)

№	*a*	*b*	*h*	*A*	*B*	*d*	*d'*	*d"*
1	40	280	35	104	296	96	12	84
2	42	105	30	70	119	56	16	40
3	56	140	40	119	175	105	30	75
4	70	126	45	182	210	168	60	108
5	77	770	70	275	814	264	24	240
6	80	560	70	208	592	192	24	168
7	84	210	60	140	238	112	32	80
8	88	396	72	187	429	165	30	135
9	96	672	84	296	728	280	35	245
10	105	336	80	273	420	252	60	192
11	110	495	90	286	561	264	48	216
12	112	280	80	238	350	210	60	150
13	117	390	90	533	650	520	120	400
14	119	170	70	425	442	408	168	240
15	120	840	105	312	888	288	36	252
16	120	1680	112	255	1695	225	15	210
17	126	315	90	210	357	168	48	120
18	132	1320	120	407	1375	385	35	350
19	140	252	90	364	420	336	120	216
20	153	714	126	697	986	680	120	560
21	154	1540	140	550	1628	528	48	480
22	156	520	120	195	533	117	27	90
23	160	1120	140	416	1184	384	48	336
24	168	420	120	280	476	224	64	160
25	168	420	120	357	525	315	90	225
26	175	450	126	625	750	600	168	432
27	176	792	144	374	858	330	60	270
28	180	252	105	300	348	240	100	140
29	192	1344	168	592	1456	560	70	490
30	200	1400	175	520	1480	480	60	420
31	207	4554	198	943	4646	920	40	880
32	210	378	135	546	630	504	180	324
33	210	525	150	350	595	280	80	200
34	210	672	160	546	840	504	120	384
35	220	990	180	572	1122	528	96	432
36	224	560	160	476	700	420	120	300
37	225	400	144	375	500	300	108	192
38	231	2310	210	825	2442	792	72	720
39	238	340	140	850	884	816	336	480
40	240	336	140	348	420	252	105	147
41	240	1680	210	624	1776	576	72	504
42	240	2640	220	348	2652	252	21	231
43	240	3360	224	510	3390	450	30	420
44	252	630	180	420	714	336	96	240

№	*a*	*b*	*h*	*A*	*B*	*d*	*d'*	*d"*
67	360	2520	315	936	2664	864	108	756
68	360	5040	336	765	5085	675	45	630
69	364	4368	336	689	4407	585	45	540
70	378	945	270	630	1071	504	144	360
71	392	980	280	833	1225	735	210	525
72	396	1540	315	660	1628	528	108	420
73	400	2800	350	1040	2960	960	120	840
74	420	1050	300	700	1190	560	160	400
75	440	1980	360	935	2145	825	150	675
76	448	1120	320	952	1400	840	240	600
77	450	800	288	750	1000	600	216	384
78	460	1656	360	667	1725	483	105	378
79	462	990	315	770	1166	616	196	420
80	462	1155	330	770	1309	616	176	440
81	468	1560	360	585	1599	351	81	270
82	480	672	280	696	840	504	210	294
83	480	5280	440	696	5304	504	42	462
84	480	6720	448	1020	6780	900	60	840
85	483	1104	336	667	1196	460	140	320
86	504	1260	360	840	1428	672	192	480
87	504	1260	360	1071	1575	945	270	675
88	528	2376	432	1122	2574	990	180	810
89	540	756	315	900	1044	720	300	420
90	546	1365	390	910	1547	728	208	520
91	560	1008	360	700	1092	420	150	270
92	570	3762	495	950	3838	760	100	660
93	588	1470	420	980	1666	784	224	560
94	600	3150	504	1000	3250	800	128	672
95	616	1320	420	1166	1650	990	315	675
96	624	2080	480	780	2132	468	108	360
97	630	1575	450	1050	1785	840	240	600
98	630	2016	480	1050	2184	840	200	640
99	660	3696	560	825	3729	495	75	420
100	672	1680	480	1120	1904	896	256	640
101	675	1200	432	1125	1500	900	324	576
102	700	1800	504	875	1875	525	147	378
103	714	1785	510	1190	2023	952	272	680
104	720	1008	420	1044	1260	756	315	441
105	720	1008	420	1200	1392	960	400	560
106	720	1980	528	1095	2145	825	220	605
107	720	3120	585	848	3152	448	84	364
108	720	7920	660	1044	7956	756	63	693
109	780	2600	600	975	2665	585	135	450
110	816	1785	560	1020	1887	612	192	420

45	264	1188	216	561	1287	495	90	405
46	264	2640	240	814	2750	770	70	700
47	273	1248	224	975	1560	936	168	768
48	280	504	180	350	546	210	75	135
49	280	504	180	728	840	672	240	432
50	280	700	200	595	875	525	150	375
51	280	1960	245	728	2072	672	84	588
52	288	2016	252	888	2184	840	105	735
53	294	735	210	490	833	392	112	280
54	300	825	220	780	1095	720	192	528
55	300	1575	252	500	1625	400	64	336
56	312	364	168	663	689	585	270	315
57	312	1040	240	390	1066	234	54	180
58	315	1008	240	525	1092	420	100	320
59	315	1008	240	819	1260	756	180	576
60	320	2240	280	832	2368	768	96	672
61	330	1485	270	858	1683	792	144	648
62	336	840	240	560	952	448	128	320
63	336	840	240	714	1050	630	180	450
64	350	630	225	910	1050	840	300	540
65	352	1584	288	748	1716	660	120	540
66	360	504	210	600	696	480	200	280

111	840	1512	540	1050	1638	630	225	405
112	840	3960	693	1160	4040	800	140	660
113	882	8379	798	1218	8421	840	80	760
114	920	3312	720	1334	3450	966	210	756
115	930	1953	630	1054	2015	496	160	336
116	936	3120	720	1170	3198	702	162	540
117	966	2208	672	1334	2392	920	280	640
118	1035	1610	630	1173	1702	552	216	336
119	1092	3640	840	1365	3731	819	189	630
120	1100	1400	616	1375	1625	825	363	462
121	1120	2016	720	1400	2184	840	300	540
122	1170	1365	630	1378	1547	728	336	392
123	1248	4160	960	1560	4264	936	216	720
124	1260	5355	1020	1428	5397	672	128	544
125	1320	7392	1120	1650	7458	990	150	840
126	1332	4144	1008	1443	4181	555	135	420
127	1428	2040	840	1547	2125	595	245	350
128	1440	6240	1170	1696	6304	896	168	728
129	1860	3906	1260	2108	4030	992	320	672
130	1860	9672	1560	2015	9703	775	125	650
131	2002	2730	1155	2210	2886	936	396	540
132	2352	4851	1584	2548	4949	980	320	660