В отражении воды колодца Лотоса: древние египтяне и наши современники

С.Л. Василенко

В отражении воды – весь мир...

Древние народы мира, особенно засушливых регионов, весьма трепетно относились к колодцу с водой, который буквально символизировал Жизнь.

Связь времен сохраняется и поныне.

Отсюда на разных языках родились многочисленные поговорки, например:

– когда пьешь воду, не забывай тех, кто вырыл колодец.

– воду мы начинаем ценить не раньше, чем пересыхает колодец.

Возможно, поэтому появилась и древнеегипетская задача фараона о колодце Лотоса, воплощающего идею жизнетворного источника.

На первый взгляд непритязательная задачка с целыми числами, в качестве исходных данных, получила неожиданный интерес на страницах АТ [1–6], где каждый автор привнес свое неординарное понимание.

Не будем её подробно описывать. Она отражена в нашей статье [4], в которой проанализированы исследования [1–3], а также представлены собственные аналитические и геометрические решения.

Упомянем только вкратце более поздние описания [5, 6].

Так, проф. Г. Аракелян демонстрирует [5] численный метод решения уравнения с одним неизвестным с применением компьютерной программы.

Безусловно, он прав, когда рассуждает о прелестях-преимуществах машинного счета перед рутинно-ручным способом. Априори очевидное положение. Только задача фараона состоит не в том, чтобы представить получающееся иррациональное число диаметра колодца с большой степенью точностью. Что хочет этим показать автор для колодца Лотоса не совсем ясно, ибо численное решение исходной задачи давно известно.

Проф. А. Шелаев в свойственной ему манере профессионально изложил [6] подробную аналитику. С множеством формул, графиков, разных аппроксимаций, поиском экстремумов функций и т.п. В их основе лежат свойства подобных треугольников в прямоугольной трапеции, образованных её диагоналями.

Работа, безусловно, интересная.

Особый увлекательный тренд задает уже первое предложение с небольшой стилистической погрешностью в духе переноса современного писателя "машиной времени": «найдены нетривиальные соотношения в предлагаемом обобщении исходной задачи "Колодец Лотоса", сформулированной согласно одноимённому рассказу писателя-фантаста А.П. Казанцева в 8-м веке до н.э.». Но "сухая" математика от этого только выигрывает.

Совершим и мы виртуальное путешествие в пространстве и времени...

Несколько слов о древнеегипетской математике.

«Древние греки, математическая культура которых явилась фундаментом, на котором построена современная математика, считали себя учениками египтян... Государственная организация орошения и земледельческих работ, сбор налогов, ведение отчетности – все эти операции... были бы совершенно немыслимы без систематизации основных арифметических и геометрических фактов, без их теоретического осмысливания» [7, с. 9–10].

К сожалению, письменных памятников той отдаленной эпохи сохранилось немного, и в них почти нет никаких данных о состоянии математических знаний древних египтян.

В основном встречаются лишь записи чисел, позволяющие судить о нумерации и древнейших формах числовых знаков.

Египтяне ещё не знали десятичных дробей в их нынешнем представлении.

Но подобные операции в частях (долях) единицы умели выполнять, выражая требуемый результат комбинацией специальных знаков.

В частности, «с помощью таблиц, содержащих готовые результаты деления $2:k$, египетский вычислитель мог выполнять единым систематическим способом деление любого целого числа на любое целое» [7, с. 28].

Сотня изображалась отдельным закрученным знаком, имевшим значение "измерительной веревки" [7, с. 15]. Кроме того, существовали знаки для записи одной десятой и одной сотой части, о чём свидетельствует папирус Райнда.

Особые обозначения отводились для дробей одна и две трети. Именно такое соотношение площадей мы увидим ниже для исходной задачи.

Основные аликвотные дроби $1/n$ обозначались знаком числа n, над которым ставился дополнительный символ, похожий на эллипс (рот – "часть") [8, с. 21].

Более подробные сведения и гипотезы можно найти в работах [7–9].

По стопам древних египтян.

Итак, в цилиндрический колодец вдоль его вертикальной плоскости опущены две упругие тростинки (пруты): длиной 2 и 3 меры.

Вверху и в самом низу они касаются боковой поверхности, скрещиваясь над дном колодца на высоте 1 меры – уровне воды.

Требуется найти диаметр колодца.

Для сравнительного анализа введем обозначения (рис. 1):

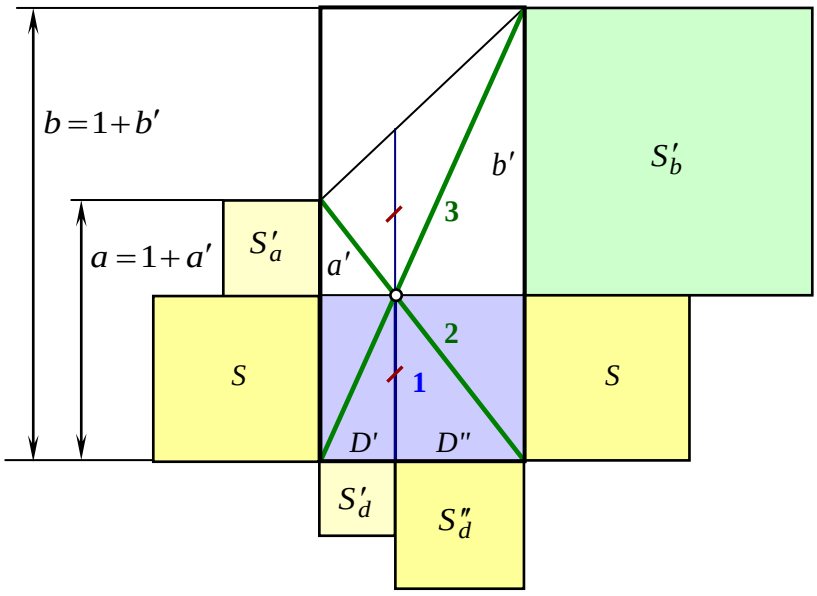

Рис. 1. Сопоставление длин и площадей в задаче фараона

a, a' (b, b') – проекции на боковую стенку соответственно всей и сухой части короткой (длинной) тростинки;

S'_d, S''_d – площади квадратов на частях диаметра колодца;

S'_a, S (S'_b, S) – площади квадратов на частях проекции короткой (длинной) тростинки;

S – "единичный" квадрат 1×1.

Один из современных вариантов решения задачи сводится к аналитической записи положительного корня алгебраического уравнения четвертой степени

$$t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 2t - 1 = 0, \quad t \approx \sqrt{3},$$

где $t > 1$ – отношение частей диаметра или проекций сухих и мокрых частей тростинок на горизонталь (дно колодца).

Далее определяется иррациональное значение диаметра с любой степенью точности.

Рассмотрим теперь задачу в контексте научных знаний древней эпохи.

Из подобия треугольников следует $(b-1)(a-1) = b'a' = 1\times 1$.

То есть прямоугольник, образованный проекциями на боковую стенку сухих частей a', b' короткой и длинной тростинки, равновелик "единичному" квадрату 1×1.

Простое и одновременно важное свойство.

Кроме того, сравнение площадей квадратов, построенных на частях проекций тростинок на вертикаль и горизонталь, показывает абсолютную идентичность отношений.

Сами отношения примерно равны трем. Следовательно, имеем:

$$t^2 = \frac{b'}{a'} = \frac{S''_d}{S'_d} = \frac{S}{S'_a} = \frac{S'_b}{S} \approx 3.$$

Подобные геометрические сопоставления древнеегипетские ученые «щелкали как орешки». Разве что иначе записывали.

Отметим, что при всём обилии важных формул в работе [6] не отражены приведенные отношения отрезков и площадей. Но именно они, на наш взгляд, являются ключом к решению задачи.

Итак, произведение частей численно равно 1, а их отношение приближенно равно трем:

$$(b-1)(a-1) = b'a' = 1\times 1; \qquad (b-1)/(a-1) = b'/a' \approx 3.$$

Отсюда легко находим $a \approx 1 + 1/\sqrt{3}$, $\quad b \approx 1 + \sqrt{3}$.

Получаются две расчетно-приближенные формулы для диаметра колодца.

$$\tilde{D} = \sqrt{3^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)^2} \approx 1{,}239;$$

$$\tilde{D} = \sqrt{2^2 - \left(1+1/\sqrt{3}\right)^2} \approx 1{,}230.$$

Первая формула дает завышенное значение истинного диаметра D = 1,231185723...

Расчетный диаметр по второй формуле приводит к меньшей погрешности и немного меньше искомой величины.

Если за меру принять современный метр, то результат 1,230 меньше истинного значения всего лишь на один миллиметр. Практически не заметно.

Более того, данное решение можно легко продемонстрировать движениями прутика соответствующей длины в горизонтальной плоскости внутри колодца: зазор остается, но очень маленький. Именно этот факт мог стать наглядным свидетельством (доказательством) правильности полученного результата.

Заметим, во всех расчетных формулах и сравнительных отношениях фигурируют исключительно числа (1, 2, 3), которые также являются исходными. Других чисел нет!

Напомним, что величина $1/\sqrt{3}$ есть:

- косинус угла наклона бокового ребра к основанию правильного тетраэдра;
- синус угла наклона диагонали куба к его основанию.

Древние египтяне не оперировали тригонометрическими функциями, но подобные отношения оценивать умели, о чём свидетельствует их высокая архитектура.

Возвращаясь к числовым параметрам поставленной задачи, в её решении сегодня нужно просто поставить запятую

$$\boxed{1\ 2\ 3} \Rightarrow \boxed{1,2\,3}.$$

Таким образом, ответом задачи является число 1,23 заданной меры.

Так или иначе, но исходные данные (1, 2, 3) содержатся в ответе, который египтяне спокойно записывали в виде суммы: целое 1, две десятых и три сотых долей.

Полагаем, именно в этом заключалась соль-изюминка задачи!

То есть исходные данные (1, 2, 3) одновременно являются знаковыми символами для отображения решения. Дело оставалось лишь за техникой исполнения и сведения-соединения всего в единое решение. С использованием молотка, зубила и камня, а также аддитивной системы счисления, по которой египтяне выстраивали конечный результат.

Если в качестве меры условно выбрать метр, то итоговая запись имеет примерный вид:

один метр + два дециметра (*две* десятые меры) + три сантиметра (*три* сотые меры).

Или приближаясь к древнеегипетской форме аддитивного отображения [7–9]:

$$1{,}23 = 1 + \overline{10} + \overline{10} + \overline{100} + \overline{100} + \overline{100}\,.$$

Воистину, творческая мудрость древних ученых впечатляет! Sapere aude ...

Используемые источники:

1. Говоров В.И. Древній Египетъ. Экзаменъ на званіе "Жреца" // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23433, 31.05.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163314.htm.
2. Шелаев А.Н. Решение "неразрешимой" задачи египетских жрецов "Колодец Лотоса" без нахождения корней уравнений 8-й и 4-й степени // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23438, 01.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163315.htm.
3. Сергиенко П.Я. О решении экзаменационной задачи кандидатом на звание "Жреца" // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23452, 05.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163319.htm.
4. Василенко С.Л. Тест-задача египетских фараонов для колодца Лотоса // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23457, 07.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163321.htm.
5. Аракелян Г.Б. Решение "задачи фараона" посредством программы "Mathematica" // АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ. 23473, 12.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163327.htm.
6. Шелаев А.Н. Инварианты, соотношения гармонии и нетривиальные экстремальные зависимости для предлагаемой обобщенной задачи "Колодец Лотоса" // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23488, 18.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163330.htm.
7. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в Древнем Мире. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
8. История математики. С древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. / Под ред. А.П. Юшкевича. Т. 3. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
9. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 460 с.

© ВаСиЛенко, д.т.н., 2017
Харьков, Украина