Денис С. Клещев

Доказуемость противоречий в основаниях математики типа $\mathfrak{R}$

Ум сугубо математический будет работать правильно, только если ему заранее известны все определения и начала, в противном случае он сбивается с толку и становится невыносимым.

Блез Паскаль. «Различие между познанием математическим и непосредственным»

Не нужно быть академиком, чтобы разоблачить шарлатана, который выманивает деньги у доверчивых людей, сидя перед хрустальным шаром и общаясь с воображаемыми объектами. Но представьте себе ситуацию, что точно такие же шарлатаны, манипулирующие воображаемыми объектами, сидят во всех университетах и институтах мира, обучают детей во всех школах. Представьте, что такие же точно мошенники управляют финансовыми потоками, создают гипнотическую виртуальную реальность, контролируют авторитетные научные журналы, разрабатывают теории о пространственно-временном континууме, не имея определения самого *континуума*. Не правда ли, картина вырисовывается абсурдная? Разве может мир науки быть по глубинной своей сути — псевдонаучным миром?

Кому-то, возможно, это могло бы напомнить времена средневековья, когда в ведущих университетах Европы преподавали астрологию и геоцентрическую систему Птолемея, а для лечения любых недугов врачи занимались кровопусканием. Однако аналогичная ситуация, несомненно, имеет место и в наши дни. Более того, если уровень развития науки определить как соотношение *знания* и *незнания*, то в современной науке *незнания* окажется существенно больше, чем в науке средневековой.

Разумеется, средневековый ученый не знал и половины того, что сегодня знает обычный школьник средней успеваемости, но и вопросов, которые могли бы возникнуть в голове у средневекового ученого, было на многие порядки меньше, чем теперь. По всей видимости, в схоластической науке был достигнут даже такой уровень «*знаний*», когда вопросов в академическом сообществе вообще не возникало, а кто пытался их задавать — тут же объявлялся невеждой или еретиком.

Поэтому далеко не всегда заявленный и демонстрируемый учеными уровень *знаний*, достигнутых человечеством, соответствует уровню реального *понимания*, существующего на данный момент в научной среде. И чем громче в мире науки кричат про «*покорение Луны, на которую ступила нога человека*», про полную «*расшифровку человеческого генома*», про обнаружение «*частицы Бога*», про появление нового вида «*информационного общества*», тем больше возникает сомнений, что ученые вообще понимают, о чем они

говорят, подобно тому, как кибернетическая машина не понимает информации, которую получает, обрабатывает и выдает в соответствии со своей программой.

Если бы ученые более охотно рассказывали нам о проблемах, а не об успехах математических, физических, биологических и прочих наук, то очень быстро бы выяснилось, что многие важнейшие проблемы, сформулированные в прошлом веке на волне стремительного научно-технического прогресса, до сих пор не решены, а некоторые были незаметно списаны учеными в раздел «*неразрешимых*». При этом никто не желает обращать внимание, что ряд научных теорий развивается только на том шатком, гипотетическом основании, что в начале XX века решение соответствующих фундаментальных проблем казалось большинству ученых вполне выполнимой задачей.

И вот с непреодолимой силой и неизбежностью приближается пора, когда для самого существования науки необходимо сформулировать «*неразрешимые*» проблемы по-новому либо придется признать, что научное знание так же, как вненаучное, может быть основано на точно таких же недоказуемых, неопределенных и непостижимых постулатах.

На фоне колоссальных знаний, накопленных наукой, мы вместе с тем замечаем, что масштаб проблем, стоящих перед учеными XXI века как будто вышел за пределы человеческого разума. Как следствие — некоторым ученым-футурологам (то есть буквально *оракулам* науки) начинает казаться, что и сам человек измельчал, сделался интеллектуально ненужным и бессмысленным, ибо разум человека, как они полагают, перестал конкурировать с машиной не только при игре в шахматы, но и при доказательстве математических теорем.

Существует ставшая уже достаточно устойчивой тенденция измельчания самих ученых, которые предпочитают браться за проблемы «*рангом помельче, побезопаснее*». В научном мире это сделалось даже условием *sine qua non* для признания того или иного специалиста «*ученым*»: если специалист берется за исследование фундаментальной проблемы, он автоматически зачисляется в разряд «*подозрительных и потенциально опасных для науки чудаков*», а если изучает площадь поверхности, скажем, африканских слонов или занимается описанием подвида пресноводных водорослей, то ему не составит труда получить ученую степень, а то и — не в обиду будет сказано — высокое звание академика Российской академии наук. И подобная тенденция к потере импульса «*большой науки*» характерна для всех стран, где осуществляется переформатирование научного мира под нужды транснациональных корпораций. Это касается не только технических или естественных наук, в той же мере это относится и к математике.

Как гласит крылатая фраза, сколько в науке математики, столько в ней и науки. Но внутренняя трагедия математики состоит в том, что она работает с идеальными абстракциями и субстанциями, которые существуют только в воображении человека. Математика и вся, следом за ней, так называемая «*позитивная наука*» находится поэтому в жесткой зависимости от возможностей и свойств человеческого разума, от развития интуиции. И эта зависимость становится еще более сильной при попытках найти не имеющее аналогов решение (а фундаментальные проблемы потому так и называются, что они не имеют аналогов). Когда ученые занимаются решением стандартных задач, они всегда опираются на уже сложившийся опыт, на шаблон, который можно тщательно и искусно подогнать под тот или иной конкретный случай. Вопреки распространенному мнению, что ученые ориентируется на некие «*чистые*» результаты экспериментов,

научная деятельность возможна лишь потому, что осуществляется она всегда через взаимную подгонку внешних экспериментов и внутреннего опыта, который никогда не бывает полностью «*очищенным от сознания*».

Когда же возникает необходимость в решении фундаментальной проблемы, прежний опыт зачастую не помогает, а мешает исследованию. Попытка свести решение, у которого еще не было аналогов, к известному шаблону обречена на провал, так сказать, по определению. Почти все возникавшие в науке «*неразрешимые проблемы*» возникали именно из-за веры ученого в вездесущую применимость старого шаблона. Такова, например, проблема *perpetuum mobile*, когда ученые, начиная с эпохи Возрождения вплоть до конца XIX века, пытались конструировать «*вечный движитель*», опираясь на свой повседневный опыт работы с конечными деталями и объектами, хотя для осуществления вечного движения энергии требуются не операции с конечными объектами, перемещаемыми друг относительно друга в пространстве, а само бесконечное пространство-время.

Несмотря на многочисленные ошибки, допущенные в прошлом, в научной парадигме по сей день живет вера в исключительную независимость науки от сознания, которое было вычеркнуто из «*картины мира*» во времена безраздельного господства Лапласовского детерминизма и не может быть введено в науку, которая не ставит своей задачей *осмысление* обретаемых знаний. А наука, в которой отсутствует осмысленность, всегда будет балансировать на тонкой грани псевдонаучного шарлатанства и прохиндейства.

Вместе с тем, если некоторое решение, не имевшее ранее аналогов, все-таки обнаруживается, ничто не мешает подогнать набор прежних шаблонов, имевшихся в распоряжении ученых, под новое представление или открытие. Лучше всего об этой особенности научного мышления сказала историк математики и методолог науки С.А.Яновская: «*Что значит решить задачу? Ответ оказывается несколько парадоксальным, хотя и поразительно простым: решить задачу — значит свести ее к уже решенным*».[1] За этим парадоксом (решить — значит найти новое, которое можно свести к уже решенному) кроется еще одна особенность процесса познания — его *непрерывность*. Познание непрерывно не только на протяжении всей человеческой истории — оно непрерывно на каждом интервале эволюции. То же самое можно сказать, выражаясь словами Г.Вейля: «*Подлинный континуум есть нечто связное в себе и не может быть разделен на отдельные куски, подобное разделение противоречит его сущности... В континууме не может существовать никаких других функций, кроме непрерывных*».[2]

Непрерывность познания означает, что зачатки любого *знания* всегда уже содержатся на предыдущих интервалах или этапах развития науки. Именно эта глубокая мысль об «*интуитивных основах науки*» выступает лейтмотивом известной монографии Т.Куна «Структура научных революций».[3] Данная структура — свойство частичного или полного предвосхищения будущих знаний, как в случае с гелиоцентрической моделью Коперника, описанной еще Аристархом (III век до н.э.),[4] связано с тем, что феномен интуиции и сознания имеет континуальную природу.

---

[1] Яновская С.А. Методологические проблемы науки. М., 1972. С.7

[2] Вейль Г. О философии математики. Москва-Ленинград, 1934. С.123, 126

[3] Кун Т. Структура научных революций. М., 1977. С.250

[4] Там же. С.107-108

Мы наблюдаем континуальную природу не только в чередовании научных парадигм, но и в мифологических и вненаучных образах, когда «*ненаучная сказка*» становится «*научной былью*». Поэтому в концепции Т.Куна следовало бы сделать важное дополнение о том, что на предыдущих интервалах эволюционного процесса содержатся как зачатки будущих *знаний*, так и зачатки неопределенности, то есть — будущего *незнания*, с которым неизбежно сталкиваются ученые.

Как заметил, пожалуй, самый выдающийся математик и физик XX века А.Пуанкаре, развитие математики и появление новых теорий можно уподобить эволюционному развитию живых организмов. Каким бы совершенным ни был вид организма, в эмбриональной стадии своего развития он всегда повторяет «*всю историю его предков в течение геологического времени. По-видимому, то же самое происходит и в развитии ума... По этой причине история науки должна быть нашим первым руководителем*».[5]

Эту мысль о тонкой взаимосвязи познания с эволюцией жизни можно продолжить, поскольку иерархия высших и низших биологических форм дает четкий коррелят с иерархией ментальных способностей. Причем в низших формах, оказывается, тоже содержатся предвосхищения будущих *знаний*, возникающих на самом пике эволюции — в человеческой цивилизации.

Когда наблюдение человека за птицами подсказывает ему идею самолетостроения, когда наблюдение за обитателями подводного мира наталкивает на мысль о строительстве субмарин, когда способность тех же птиц ориентироваться по магнитному полю повторяется в изобретении компаса, когда биотехнологи выделяют новые вещества, исследуя микроорганизмы, а дифференциация клеток и рост деревьев предвосхищают собой обнаружение ряда Фибоначчи, то все эти изобретения и открытия тоже следует рассматривать в виде непрерывного развертывания «*структуры познания*», охватывающей не только тысячи лет развития науки, но и миллиарды лет эволюции биосферы Земли.

В этом смысле новые решения, действительно, можно представить как «*хорошо забытые*» старые, уже существующие где-то на интуитивном уровне. Причем каждый из интервалов непрерывен и заключает в себе бесконечный потенциал эволюции сознания. Проблема в том, что к этим интуитивным решениям с необратимостью времени присовокупляется и огромная неопределенность — тот самый уровень *незнания*, входящий в тот же континуальный интервал «*структуры познания*», преодолеть который способно только разумное существо — человек. Таким образом, для появления принципиально нового решения в действительности требуются сложные внешние и внутренние условия, приводящие к поиску многочисленных недостающих звеньев и к очищению интуиции от наслоений неопределенности.

Некоторые случаи, описывающие работу интуиции у математиков, приведены в научно-популярной книге Ж.Адамара «Исследование психологии процесса изобретения в области математики». Так, математик К.Ф.Гаусс сравнивал озарение со вспышкой молнии, а Гельмгольц и Пуанкаре независимо друг от друга выделяли два характерных свойства обретения интуитивного знания:

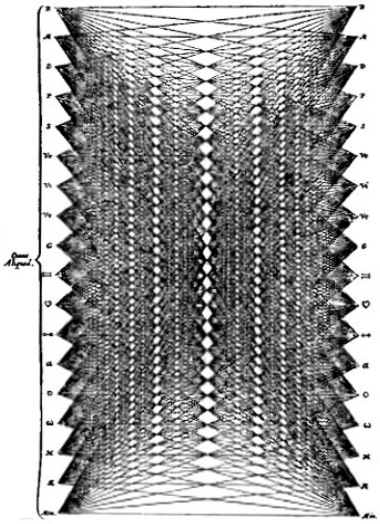
1) оно не имеет никакого отношения к предшествующим попыткам, следовательно, не вызвано предшествующей сознательной работой;

[5] Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М., 1967. С.10

2) оно приходит настолько быстро, что не требуется никакой затраты времени на размышление.[6]

В научном мире подобные заявления могли бы счесть за псевдонаучную «*экстрасенсорику*» и низкопробную мистическую чепуху, которой изобилуют средства массовой информации. Однако эти свидетельства о неизвестно откуда взявшемся интуитивном знании, были оставлены учеными-первооткрывателями, результатами которых пользуется поколение нынешних «*жрецов науки*».

Процесс преодоления континуальной неопределенности при переходе к определенному (порой, единственному) решению Ж.Адамар представляет как выборку из «*чрезвычайно большого количества сочетаний*». Мы можем представить, например, какой объем «*вычислений*» необходимо было произвести сознанию Д.И.Менделеева, чтобы к нему во сне пришло озарение, показавшее, как упорядочить химические элементы. Если он работал над упорядочением, скажем, 36 — 50 химических элементов (многие атомные массы из ≈60 известных ему элементов определялись неточно или даже некорректно), то визуально такие вычисления можно изобразить в виде таблицы из трактата Афанасия Кирхера «Искусство большой науки»: количество сочетаний, которые могут образовать эти элементы равно числу *1 273 726 838 815 420 339 851 343 083 767 005 515 293 749 454 795 473 408 000 000 000 000*. Впрочем, в реальности возможных комбинаций при упорядочении химических элементов в таблице Менделеева могло быть как больше, так меньше этого числа.



Еще более поразительные возможности интуиции демонстрировал индийский математический гений — Рамануджан. В его математическом творчестве практически все формулы были получены в результате озарений и утраченной безвозвратно техники медитаций над последовательностями чисел. Никто из ученых, конечно, не поверит в его слова, что математические формулы ему открывала во сне богиня *Намакаль,* но факт в том, что он, в самом деле, записывал их, вставая утром с постели.[7]

А ведь и основатель теории множеств Георг Кантор свидетельствовал о чем-то подобном — на математические подвиги его вдохновляла некая таинственная муза, являвшаяся ему во снах и однажды указавшая лестницу из «*алефов*», ведущую к Господу. Для Кантора, как известно, интуитивные озарения закончились расщеплением личности. Математики, разделяющие его взгляды, пытаются обвинить в злополучной болезни Георга Кантора противников теории множеств (Кронекера, Гельмгольца и др.), которые якобы слишком рьяно его критиковали. Но любой психоаналитик подтвердит, что патологические изменения личности наступают лишь тогда, когда в самом сознании человека возникает и продолжительное время существует непреодолимое противоречие.

Когда мы сталкиваемся с подобными феноменами, а мы можем привести еще и другие примеры такого рода, мы должны понимать сознание как непрерывный процесс,

[6] Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970. С.19

[7] Левин В.И. Рамануджан. М., 1968. С.8

включающий в себя и то, что психологи обыкновенно называют «*подсознанием*», и то, что вообще не является сознанием в привычном смысле этого слова. На условность введенного психологами деления (сознание/подсознание) очень верно указывает Ж.Адамар: «*Когда вы едете верхом, лошадь «выше» или «ниже» вас? Она сильнее вас и может бежать быстрее; тем не менее, вы управляете ею*». [8] Как знаток интуитивных математических озарений, Ж.Адамар уверовал в гипотезу континуума Кантора и поддержал его теорию, равно как ряд других математиков XX века, включая самого Д.Гильберта.

Но всегда ли удается, даже «*верхом на лошади*» достичь желаемого? Ведь не все обобщенные формулы Рамануджана были точными — некоторые были верны лишь до определенного конечного числа, а если говорить о Канторе, то он сам обнаружил противоречие в своей теории: трансфинитное множество всех трансфинитных множеств Ω должно включать само себя и, таким образом, оказаться больше себя самого.

То есть, оказывается, что одной интуиции и желаний недостаточно для обретения всепроникающей истины, и дело даже не в требовании строгого соблюдения научной методологии, которая лишь систематизирует опыт, раскладывает имеющиеся шаблоны и заготовки «*по полочкам*»...

Есть вещи, которые может узнать только определенный человек в определенное время и в определенном месте; это вытекает из континуальных свойств сознания: неповторимое сложение нейро-пептидных связей в десятках миллиардах соединений нейронов, случайные, казалось бы, внешние события и сновидения, влияние эпохи, — никогда невозможно в точности повторить все те условия и воспроизвести то сознание, которое испытало однажды некоторое интуитивное озарение.

В науке считается, и это в сущности является только верой, а не наукой, что ученый выступает носителем научной истины. Но само развитие науки свидетельствует, что человек, каким бы ученым он ни был, не является носителем истинного *знания*, полностью очищенного от *незнания*. Мы можем говорить лишь о том, что каждый человек — носитель *со-знания*, которое занимает в континуальном развертывании «*структуры познания*» некоторый конечный интервал. Однако в этом интервале, безусловно, заложена та же самая потенциально-бесконечная непрерывность, которой обладает континуум.

Думать иначе — якобы в современной научной среде собраны в исключительной степени истинные знания — столь же абсурдно, как и предполагать, что в ограниченном объеме пространства-времени можно собрать настоящий *perpetuum mobile*.

Используя в своих выводах математический принцип *tertium non datur — третьего не дано*, наука признает истинным такое утверждение, которое можно доказать. Загвоздка только в том, что *доказывать* можно по-разному. Здесь возникает такой же, по сути, парадокс, который в античности был известен как парадокс Эпименида: один критянин сказал, что все критяне лжецы — лжец ли он? Если он не лжец, то он, будучи критянином, тоже является лжецом. Но если он — тоже лжец, как все критяне, то он сказал правду, а значит, он не лжец... и так дальше до бесконечности. Заменив слово «*критянин*» на слово «*ученый*», мы получим логическую «*структуру научных*

[8] Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970. С.42

революций» по Т.Куну. Ведь каждый последующий ученый стремится найти и устранить неточности в знаниях предыдущего поколения ученых и, таким образом, все ученые оказываются «*лжецами*», которые пытаются сказать «*истину*» и — не могут.

Курт Гедель, абстрагируясь от истории науки, получил сходный результат, разбирая проблему доказуемости в математике: если мы заявляем в *S* об *S* «*Это утверждение ложно*», то оно, согласно ему самому, должно быть ложным, но если мы этому верим, то считаем его истинным. То есть в сознании конкретного ученого к «*ложному*» всегда примешивается свойство истинности, а к «*истинному*» — свойство ложности. Если истинно то, что доказуемо, а ложно то, что недоказуемо (именно такое мышление было привито научному миру принципом *tertium non datur*), то из результатов Геделя следует, что «*утверждение истинно в том и только в том случае, если оно недоказуемо*».[9] Но тогда необходимо признать, что ученые заблуждаются, считая абсолютной научной истинной то, что доказано.

Для примера можно рассмотреть парадокс «*истинности*» Птолемеево-Дантовой модели мира, обнаруженный русским мыслителем П.А.Флоренским. В наши дни любой ученый, не задумываясь, скажет, что Земля обращается вокруг Солнца, а не наоборот. Но, как обратил внимание П.А.Флоренский, тот же ученый верит в истинность теории относительности, одним из постулатов которой является равноправность инерциальных систем отсчета. Следовательно, ничто не мешает выбрать в качестве системы отсчета планету Земля, вокруг которой будут вращаться наблюдаемые звезды и Солнце. Можно сказать, что Птолемеева система, действительно, частично предвосхищает открытие теории относительности А.Пуанкаре и Г.Лоренца, развитую впоследствии А.Эйнштейном. Более того, в поэтическом путешествии Данте по девяти кругам Ада, когда он, совершая прямолинейное движение, попадает из центра Земли сразу же в Эмпирей, а затем, из Эмпирея, продолжая двигаться вперед, попадает обратно во Флоренцию, предвосхищает открытие односторонней Римановской эллиптической плоскости.[10]

Кажется, этого достаточно, чтобы показать, насколько сложным является вопрос о доказуемости и истинности. Если утверждение *S* — или истинное, или ложное, как утверждает наука, то сама наука становится псевдоистинной, потому что в действительности принцип *tertium non datur* даже в финитных классах может давать осечку, как в виде патологий, так в виде полезных изменений.

Для понимания, что в утверждении истинно, а что нет, требуется выход за рамки системы *S*. Например, выбрать в качестве точки отсчета какую-нибудь удаленную звезду S_n, открывающую новые области пространства-времени. Тогда мы поймем, что Птолемее-Дантова модель будет истинной только для ограниченного объема пространства. Причем, вселенная в Птолемеевой модели, действительно, ограничена сферой «*небесных движений*», которые в 27,5 раз дальше от Земли, чем Солнце.[11]

Итак, мы вплотную подошли к вопросу: если доказуемость не может быть надежным критерием истинности, если вполне надежны лишь доказательства неистинности или противоречивости утверждений, то что нужно сделать, чтобы доказать наличие противоречий в основаниях математики? Наука скажет: для этого надо доказать, что

[9] Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984. С.305

[10] Флоренский П.А. Мнимости в геометрии. М., 1991. С.46-48

[11] Флоренский П.А. Мнимости в геометрии. М., 1991. С.50

некая система аксиом *S* противоречива. Если система *S* содержит противоречие, то от него — скажет формалист — можно раз и навсегда избавиться введением аксиомы, исключающей возникновение противоречия. Как раз по пути добавления все новых и новых аксиом пошла математика XX века.

Но для интуициониста слепая вера формалистов в то, что они получили таким образом «*истинные основания математики*», по крайней мере, вызывает сомнения, а по большому счету — лишена смысла. Потому что преумножение экзистенциальных недоказуемых сущностей не добавляет утверждениям истинности и не может исключить обнаружение в будущем очередного противоречия.

Задача доказательства непротиворечивости математики была поставлена Д.Гильбертом в 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже. В то время математические парадоксы, возникшие в теории бесконечных множеств, в срочном порядке «*латались*» аксиоматизацией математики и введением новых аксиом, хотя никто не мог гарантировать, что это поможет избежать новых парадоксов.

В 1922 г. Д.Гильберт все-таки признал, что «*состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — в этом образце достоверности и истинности — образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же тогда искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?*».[12]

Успешная формализация аксиом геометрии позволила Д.Гильберту надеяться на столь же успешную формализацию и доказательство непротиворечивости аксиом арифметики. Однако после публикации в 1931 г. статьи Курта Геделя «О формально неразрешимых утверждениях и родственных систем» позиции школы формализма, возглавляемой тогда Д.Гильбертом, существенно пошатнулись. Оказалось, что невозможно доказать непротиворечивость системы аксиом *S* средствами самой этой системы.

Из первой и второй теоремы Геделя о неполноте языка формальной математики следовало, что мы можем доказать лишь существование противоречия в системе аксиом *S* через посредство другой, более полной системы аксиом S_n. Об этом важном следствии почему-то забывают упомянуть многие авторы. Оно и понятно: ни научное сообщество, ни, тем более, математиков не может радовать перспектива того, что в основе «*общепризнанной*» математики содержатся внутренние противоречия. Ведь в этом случае окажется, что весь научный мир пользуется *неистинной* или *псевдоистинной* математикой, иначе говоря, занимается распространением *псевдонауки*.

Результаты К.Геделя свели на нет надежды Д.Гильберта получить, наконец, доказательство непротиворечивости аксиом арифметики. Программа аксиоматизации математики не помогла установить ее истинность, хотя математики, разумеется, верили в то, что занимаются истинной наукой. Они не хотели и не хотят признавать ничто иное, не взирая на то, что «*Брауэр установил, что интуитивно воспринимаемые истины часто лежат далеко за пределами того, что было доказано в классической математике, а*

[12] Виленкин Н.Я. В поисках бесконечности. М.,1983. С.136

Гедель доказал, что интуитивно воспринимаемые истины вообще выходят за рамки математического доказательства».[13]

Казалось бы, в этих условиях следовало пристальней присмотреться к классической математике или хотя бы относиться более серьезно к критическим замечаниям интуиционистов. Однако интуиционизм до сих пор воспринимается как «*маргинальное*» направление, существующее в науке где-то особняком, как некий архипелаг.

Если Д.Гильберт еще мог открыто говорить об «*истинности математики*», то в настоящее время представители формализма вообще отказались от идеи применения понятия «*истина*» к математике: «*Вопрос об истинности или ложности математических суждений с формалистской точки зрения не имеет смысла. Можно говорить лишь об их доказуемости или опровержимости на основе аксиом*».[14] С еще более радикальными взглядами выступал в XX веке Карнап, который предлагал исключить слово «*истина*» даже из философских словарей. Действительно, это очень удобно: если нет «*истинной*», то не может быть и «*псевдоистинной*» науки, а значит, ничто не помешает и дальше игнорировать любую критику оснований математики.

В современном формализме принято отрицать какое бы то ни было «*интеллектуальное содержание*» математических понятий.[15] Причем лукавство подобной позиции прямо-таки поражает! Ведь в основе концепции формализма лежит теория множеств Г.Кантора, и достаточно вспомнить о «*таинственной музе*» Георга Кантора, которая являлась ему во снах, поддерживала и направляла его работу, чтобы обнаружить непосредственную связь основных понятий формализма с человеческим разумом, который, как мы знаем, не защищен от ошибочных суждений.

Игнорируя интуитивное понятие «*истины*», формалисты, вместе с тем, находят в себе моральное право выступать против интуиционизма, представляя его лишь некой «*исторической достопримечательностью*».[16] Один из поводов для критики в адрес интуиционистов звучит примерно так: «*Согласно концепции Брауэра математические объекты рождены человеческой мыслью и потому истинность суждений о них полностью определяется представлениями (об этих объектах) того математика, в сознании которого сложились эти объекты. Строго говоря, с точки зрения интуиционизма сколько математиков — столько и математик*».[17]

Зная, насколько пугливо относятся ученые к своей научной репутации, можно понять, почему математики теперь предпочитают заниматься «*безопасными*», как они думают, отраслями, не вникая в проблемы оснований, поднятые интуиционистами. В самом деле, кто захочет выглядеть в глазах других ученых сторонником кошмарной концепции, согласно которой «*Сколько в мире математиков, столько в нем и математик*» или «*Сколько в мире ученых, столько в нем и наук*»?

---

[13] Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984. С.306

[14] Успенский В.А., Плиско В.Е. Интуиционистская логика // Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М., 1985. С.395

[15] Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965. С.335

[16] Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965. С.341

[17] Успенский В.А., Плиско В.Е. Интуиционистская логика // Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М., 1985. С.395

Но это явное передергивание, призванное отпугнуть от интуиционизма, вскрывает еще один немаловажный вопрос: а кого вообще следует считать «*ученым*» или «*математиком*»? Можно ли считать ученым человека, который ничего не открыл? А если он, действительно, что-то открыл, то выходит — наука, существовавшая до него, не тождественна науке после сделанного им открытия. Так что здесь интуиционизм, несомненно, более точен в отражении реального положения дел, чем концепция формализма, согласно которой достаточно приобрести ученую степень или звание, чтобы сделаться «*ученым*».

В истории науки эта зависимость «*количества наук*» от «*числа ученых*» проступает еще более рельефно — никто, пожалуй, не станет отрицать, что математика и физика времен Ньютона и Лейбница не тождественна математике и физике времен Гаусса и Максвелла, а наука XIX века не тождественна науке XX века. Наблюдаемый при этом уровень различий находится в прямой зависимости от количества ученых, сделавших действительно важные открытия.

Именно в этом смысле единый процесс познания предстает в интуиционизме как «*различные науки*», зависящие от числа ученых, делающих на том или ином интервале пространства-времени-сознания действительные, а не фиктивные открытия, а вовсе не в том превратном толковании, будто интуиционизм не признает за наукой какой бы то ни было объективности. Кстати говоря, развитие самого интуиционизма привело к появлению «*различных интуиционизмов*», поскольку взгляды Брауэра не во всем совпадали со взглядами Пуанкаре или Вейля, взгляды Гейтинга и Трулстра не во всем совпадали со взглядами Маркова, не говоря уже о различиях во взглядах Геделя, Колмогорова, Гливенко, Новикова, Крипке, Штрассена, Артемова и др.

В интуиционизме, если общим признаком интуиционизма считать настороженное отношение к принципу *tertium non datur*, пересмотру подвергается лишь закрепленное в формальной науке разделение на «*субъективное*» и «*объективное*», поскольку в реальном процессе познания человек всегда сталкивается с тонкой градацией и взаимодействием «*субъективного*» с «*объективным*», а еще точнее — бесконечного и непрерывного с конечным и дискретным.

Если формальная математика кажется со стороны некой единообразной наукой, то это указывает, прежде всего, на очень высокий уровень шаблонности мышления формалистов, но никак не доказывает непротиворечивость или истинность оснований математики. Шаблонность мышления означает применимость шаблона в одной и неприменимость его в другой ситуации, и отождествляя единообразие поведения с истинностью, человеческое общество никогда бы не достигло того уровня знаний, которым сейчас располагает.

За попытками принизить значение интуиционизма, изгнать его из «*общего доступа*» скрывается неуверенность математиков, страх научного сообщества перед тем, что однажды откроется интеллектуальный дефолт господствующей в математике концепции формализма, набравшей слишком много кредитов и оказавшейся не в состоянии их вернуть (будь то гипотеза континуума Г.Кантора или доказательство непротиворечивости аксиом арифметики). Дефолт, о котором предупреждал еще Г.Вейль, сравнивая абстрактные суждения формалистов, претендующие на всеобщность, с «*бумажной валютой*», тогда как подлинные математические знания можно уподобить непосредственно доступным «*материальным ресурсам и продуктам*».

Когда «*бумажной валюты*» становится намного больше, чем «*ресурсов*», которые можно за нее купить, в экономике неизбежно происходит обесценение «*бумажных денег*» — как бы ни старались банкиры обмануть экономических агентов, изымая из оборота, перенаправляя и скрывая от общества излишки «*бумаги*».

Вместо рассмотрения конкретных арифметических аксиом и утверждений формальный стиль требовал наиболее общих доказательств, которые бы сразу охватывали по возможности все области математики. Только интуиционизм признавал роль отдельных примеров и утверждений в качестве аргументов доказательства: если для некоторого «*общего*» экзистенциального утверждения находился контр-пример, такое утверждение теряло смысл «*общего*» утверждения.

Поскольку Д.Гильберт черпал свою мощную веру в непротиворечивость аксиом арифметики в успешной формализации аксиом геометрии, то для начала не мешало бы сравнить используемые в арифметике аксиомы с геометрическими аксиомами Гильберта. По всей видимости, никто из математиков за сотню лет так и не удосужился этого сделать. В противном случае несоответствие обнаружилось бы уже при сопоставлении аксиом арифметики с первой Гильбертовой аксиомой порядка:

«*Если A, B, C — точки одной прямой, и B лежит между A и C, то B лежит также между C и A*».[18]

Как заметил М.Я.Выгодский, в самой геометрии можно было бы обойтись и без Гильбертова определения понятия «*между*», ведь очевидно, что фраза «*B лежит между A и C*» подразумевает точно такой же смысл и у фразы «*B лежит между C и A*».[19] Но Д.Гильберт мыслил очень последовательно, руководствуясь более общими соображениями об упорядочении и аксиоматизации.

Итак, выберем для точек *A, B, C,* лежащими на одной прямой, простые числовые значения *1, 2, 3*, которые, согласно арифметической аксиоме эквивалентности, равны соответственно десятичным дробям *0,(9), 1,(9)* и *2,(9)*. Тогда переходы между этими точками в одном направлении $A \rightarrow B \rightarrow C$ будут включать в окрестность точек непрерывные *дроби с недостатком*, а вот при обратном направлении $C \rightarrow B \rightarrow A$ окажется, что окрестности точек *пусты*. Другими словами, непрерывность в таких конечных арифметических значениях достигается лишь наполовину, а значит, точка *B* при переходе от *A* к *C* не будет лежать в точности «*также*», как при обратном переходе от *C* к *A*.

Более того, для нулевой точки, которая в арифметике обозначается числом *0*, окрестности по обе стороны числовой прямой в положительном и отрицательном направлении окажутся арифметически *пустыми*: *0=0,(0)*. Тогда спрашивается: почему для точек *1, 2, 3* мы находили окрестности, включающие *непрерывные дроби с недостатком*, а для числа *0* — только *пустые* окрестности? Выходит, даже понятие

[18] Гильберт Д. Основания геометрии. Петроград, 1923. С.4

[19] Выгодский М.Я. «Начала» Евклида // Историко-математические исследования. Москва-Ленинград, вып. 1, 1948. С.267

«*точка*», используемое в арифметике, не совпадает с понятием «*точка*», используемым в геометрии.

Конечно, такое несоответствие еще не означает обнаружение противоречия в системах аксиом арифметики, но оно могло бы насторожить математиков. Для устранения данного несоответствия потребовалось бы всего-навсего ввести непрерывные десятичные приближения с *недостатком* и *избытком*. Тогда можно было бы сказать, что в арифметике, как и в геометрии, существуют непрерывные переходы в прямом и обратном направлении, по крайней мере, между всеми точками числовой прямой, соответствующими рациональным числам и нулевому значению:

$$-0{,}000...\infty 1 = 0 = 0{,}000...\infty 1;$$
$$0{,}999...\infty = 1 = 1{,}000...\infty 1;$$
$$1{,}999...\infty = 2 = 2{,}000...\infty 1;$$
$$2{,}999...\infty = 3 = 3{,}000...\infty 1...$$

Именно в этом и состояло предложение Брауэра и Вейля рассматривать каждую точку континуума в качестве непрерывного интервала

$$\left(\frac{m-1}{10^h}, \frac{m+1}{10^h}\right),$$

где h — глубина десятичного интервала.

Загляните в любой учебник по элементарной математике — вы не найдете там даже упоминаний о десятичных приближениях с избытком, симметричных на числовой прямой приближениям с недостатком. Зато во всех этих учебниках вы найдете массу слов о «*непрерывных функциях*». О какой «*непрерывности*» может идти речь, если в стандартной арифметике все рациональные значения, подобно мифологическому образу кентавра, непрерывны только наполовину, а нулевое значение как начальная точка отсчета вообще не обладает в такой арифметике свойством непрерывности?

Далее, поскольку мы дополнили арифметическую аксиому эквивалентности, назовем ее *(a)*, бесконечными приближениями с избытком, которые симметричны приближениям с недостатком, а именно непрерывным дробям с периодом *(9),* для каждого рационального значения, то вместо прежней классической системы аксиом *S (a)* мы получили новую систему аксиом арифметики, которую можно назвать интуиционистской системой аксиом арифметики $S_i\,(a)$.

Если введенное нами дополнение действительно образует более полную систему S_i, а не является лишь тривиальной тавтологией, столь часто выдаваемой в формальной математике за новый научный результат, то, согласно теореме Геделя о неполноте, более полная система арифметических аксиом S_i позволит доказать противоречивость классической арифметики, использующей систему аксиом *S*.

Чтобы обнаружить такое противоречие в основаниях математики, не надо перебирать все понятия, формулы и доказательства с Геделевскими номерами, такими как 2^{900} или 3^{90}. Противоречие было известно с незапамятных времен, а в XIX веке на него вновь обратил внимание Р.Дедекинд. В работе «Непрерывность и иррациональные

числа» (1859) он отмечает, что понятие «*непрерывность*», которым широко пользуются математики, нигде не определено, а самая большая трудность состоит в том, что классические иррациональные числа и классические рациональные числа разрывают числовую прямую на два класса, между которыми нет ни общих точек, ни величин, которые бы их соединяли.

Р.Дедекинд недоумевал по поводу столь безответственного отношения своих коллег к основаниям математики: «*Принятое до сих пор введение иррациональных чисел связывается именно с понятием о протяженных величинах — которое само нигде не определено — и определяет число как результат измерения такой величины другою такого же рода. Вместо этого я требую, чтобы арифметика развивалась сама из себя… чтобы иррациональные числа были вполне определены через посредство рациональных. Но как это сделать — вот в чем вопрос*».[20]

Для выхода из этого затруднения и получения непрерывности Дедекинд ввел абстрактную точку сечения α, которая могла произвольно относиться как к первому, так ко второму классу. За неимением других вариантов математики единогласно согласились с Дедекиндом, хотя сам Дедекинд отмечал, что он «*решительно не в состоянии привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и никто не в состоянии. Принятие этого свойства прямой линии есть не что иное как аксиома, посредством которой мы только и признаем за прямой ее непрерывность*».[21]

В интуиционистской математике, как уже было сказано, вместо точек с пустыми окрестностями и Дедекиндовых точек сечения вводятся интервалы:[22]

$$\left(\frac{m-1}{10^h}, \frac{m+1}{10^h}\right).$$

Это ведет к неожиданному, на первый взгляд, результату: для всех «*классических иррациональностей*» квадратичных, кубических и т.д. отпадает сама необходимость соединять между собой два класса точками сечения для получения континуальной непрерывности.

В частности, в системе арифметических аксиом S_i число *2* задано интервалом *1,999...∞ = 2 = 2,000... ∞1*, что позволяет отнести числа *2* и *√2* к одному классу, то есть представить *√2* периодической десятичной дробью, поскольку найдется глубина потока h, необходимая для получения рационального числа:

$$\sqrt{2} = 1{,}414_(707_)$$

В данном и во всех подобных случаях искомая непрерывность достигается не через абстрактную, произвольно относящуюся то ли к одному, то ли к другому классу «*точку сечения*», о которой математики не могут ничего сказать, кроме экзистенциального утверждения «*она существует*», а через конечное, рациональное интервальное значение

[20] Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1923. С.16
[21] Там же. С.18
[22] Вейль Г. О философии математики. Москва-Ленинград, 1934. С.121

2,00_1, задающее базис *1,414_* для получения бесконечно повторяющегося периода *(707_)*.

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{(1414_707_-1414_)^2}{999_000_^2} = \frac{199_700000_1000_}{99_800_1000000_} = 2{,}00_1$$

В самом деле, если дробь $\sqrt{2}=1{,}414...$ является непериодической десятичной дробью, то при ее возведении в квадрат мы никак не сможем получить периодическое значение *1,(9)* равное *2*, а будем получать лишь такое же непериодическое значение $\sqrt{2}^2=1{,}9999u_1u_2u_3...$ Иначе говоря, в классической арифметике нет совершенно никаких оснований для введения строгого арифметического тождества $\sqrt{2}^2=1{,}(9)=2$, которое между прочим в ней беззастенчиво используется.

Утверждение о том, что некая непериодическая десятичная дробь $\sqrt{2}=1{,}414...$ дает во второй степени периодическое десятичное значение или рациональное число $\sqrt{2}^2=1{,}(9)=2$ столь же абсурдно, как и утверждение, что число $\pi=3{,}1415...$ в некоторой степени n, $n\neq0$, является «*рациональным числом*» π^n.

Теперь на том же примере $\sqrt{2}$ (который можно распространить на все квадратичные, кубические и т.д. «*классические иррациональности*»), мы можем получить тот же вывод с помощью принципа противоречивости, который, как показал А.Н.Колмогоров, выполняется и в классической, и в интуиционистской логике суждений.[23]

Тезис А: пусть $\sqrt{2}$ обладает свойством иррациональности $\sim\rho$:

$$\sqrt{2} \in \sim\rho$$

Тезис В: тогда произведение $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}$ обладает тем же свойством иррациональности $\sim\rho$:

$$\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \in \sim\rho$$

Тезис ~В: в то же время нам известно, что произведение $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} = 1{,}(9) = 2$ обладает свойством ρ рационального числа:

$$\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \in \rho$$

В таком случае окажется, что $\sqrt{2}$ тоже обладает свойством рациональности ρ. То есть истинным будет...

Тезис ~А: число $\sqrt{2}$ обладает свойством ρ рационального числа:

$$\sqrt{2} \in \rho$$

Если из *А* следует *В* и *не-В,* то в действительности имеет место *не-А*:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A\}.$$

В системе арифметических аксиом S_i доказана противоречивость классической системы *S*, что согласуется с теоремой Геделя, а значит, интуиционистская система аксиом S_i, действительно, более полная, чем классическая система аксиом *S*.

Кроме того, мы можем подтвердить интерпретацию А.Н.Колмогорова в той ее части, что свойством *псевдоистинности* может в равной степени обладать как обычная

[23] Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.45-69

математика, использующая принцип *tertium non datur*, так и математика интуиционистская, если в ней продолжают использовать систему арифметических аксиом *S*, ввиду того, что никаких других систем «*пока неизвестно*».[24]

Тогда и в той, и в другой математике будет содержаться завуалированное противоречие ~ρ=ρ, когда «*классические иррациональности*», возведенные в ту или иную степень *n, n≠0,* вдруг дают периодические значения и становятся рациональными числами.

То есть, действительно, «*формула псевдоматематики может быть доказана и без применения принципа t. n. d. и все же вести к противоречию*».[25] Так, если нам неизвестна система аксиом S_i , в которой возникает рациональное интервальное значение *2,00_1*, мы можем легко доказать «*иррациональность*» *√2* и без незаконного применения закона исключенного третьего, как это сделано в античном доказательстве Гиппаса о «*несоизмеримости*» стороны и диагонали квадрата. А именно — в системе *S* существует и другое, вполне конструктивное доказательство.

Теорема: десятичная дробь *√2=1,414…* несоизмерима в целых числах *p* и *q*.

Доказательство. Рассмотрим числа *p* и *q*, такие что $p^2=2q^2$. Так как рациональное число *2* можно записать в виде бесконечной десятичной дроби *1,(9)*, а при ее переводе в обыкновенную дробь в знаменателе получается конечная последовательность из одних девяток *199...8 / 999... = 2*, то запись целых чисел p^2/q^2 примет вид:

$$p^2 / 999_^2 = 2,$$

откуда $p^2 = 2 \bullet 999_^2 = 199_600_2$. Как видим, число *199_600_2* должно оканчиваться на *2*. Получить такую последовательность можно лишь возвышением в квадрат некоторого целого числа, на конце которого стоит одно из натуральных чисел от *0* до *9*, которое на конце образуемой последовательности *199_600_2* дает число *2*.

Простым перебором натуральных чисел от *0* до *9*, возведенных в квадрат, легко установить, что ни одно из них не дает на конце число *2*:

$$0^2=0;\ 1^2=1;\ 2^2=4;\ 3^2=9;\ 4^2=16;\ 5^2=25;\ 6^2=36;\ 7^2=49;\ 8^2=64;\ 9^2=81.$$

Квадраты любых конечных последовательностей образуют на конце только числа *0, 1, 4, 9, 6, 5*, среди которых нет числа *2*. Следовательно, искомого таким способом целого числа *p* — не существует.

В таком конструктивном доказательстве не используется принцип *t. n. d.*, однако оно все равно будет *псевдоистинным*: не содержать в себе противоречия, и все же вести к противоречию ~ρ=ρ.

Если нам не известна система аксиом S_i , дающая интервал *2,00_1,* и конкретный способ соизмерения, то сторона и диагональ квадрата, действительно, будут для нас «*несоизмеримы*». Поэтому в псевдоматематике утверждение об их «*несоизмеримости*» будет «*истинным*», а точнее псевдоистинным: раз не известен способ — нет и соизмерения. А.Н.Колмогоров очень тонко уловил этот нюанс: «*все формулы ее*

[24] Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.62

[25] Там же. С.63

[псевдоматематики] истинны, так как они являются следствиями истинных формул, соответствующих в псевдоматематике аксиомам типа $\mathfrak{R}$.[26]

Однако, в отличие от Л.Брауэра, он выдал обычной математике очередной крупный «*кредит*». Так как других аксиом, кроме типа $\mathfrak{R}$, «*пока неизвестно*» (апелляция к тезису «*ignorabimus*»), то «*название ''псевдоматематика'' для этой ее части, только пока и существующей, становится неподходящим: она как собрание истинных формул является частью настоящей математики*».[27]

Стало быть, вместе с появлением более полной системы арифметических аксиом S_i, не принадлежащей типу $\mathfrak{R}$, у нас нет уже прежних оснований отождествлять обычную математику с «*настоящей математикой*». Так называемая «*обычная математика*», построенная на основании аксиом типа $\mathfrak{R}$, в которой квадратичные, кубические и т.д. «*классические иррациональности*» признаются непериодическими десятичными дробями, является именно *псевдоистинной* математикой в терминах Колмогорова.

Возникает вопрос: каким же образом математикам удавалось так долго скрывать от самих себя существование в основаниях обычной арифметики противоречия ~ρ=ρ? Оказывается, ими было введено весьма остроумное исключение из правил, согласно которому «*любая бесконечная периодическая дробь с периодом, отличным от 9, является рациональным числом*».[28]

Как вам это нравится? Воспользовавшись этим исключением, можно сказать, что произведение *√2 • √2* равно *1,(9)*, а эта периодическая десятичная дробь *1,(9)* с периодом *(9)* — исключена из рациональных чисел. Вместе с тем, в исключении не говорится, что *1,(9)* является иррациональным числом. Таким образом, оно не является ни тем, ни этим, и противоречия ~ρ=ρ на этом шаге не возникает. Не возникает его и на следующем шаге, когда утверждается, что дробь *1,(9)* с периодом *(9)* равна рациональному числу *2*. Ведь из исключения следует только то, что дробь *1,(9)* не является рациональным, а что число *1,(9)* иррационально — об этом никто не сказал. Следовательно, когда мы утверждаем, что *1,(9) = 2,* противоречия ~ρ=ρ *«иррациональное равно рациональному»* тоже формально как бы не возникает. В исключении содержится только суждение, что число *1,(9)* не является рациональным, а каким именно его считать — вообще не указано.

Как тут не вспомнить слова Г.Вейля, только он сравнивал доказательства формалистов с листом бумаги или картой, на которой никак не отмечено расположение нужного объекта или «*сокровища*»,[29] а здесь вам вообще протягивают пустые руки и говорят, что в них находится... очень-очень точная карта от самого-самого ценного сокровища.

Подобный экзистенциальный подход весьма характерен для формального стиля мышления. Когда формалист чего-то не знает, он никогда не признается, что он чего-то не знает, потому что, не признавая *незнания*, можно продолжать по-прежнему думать и вести себя так, будто тебе все известно. Такая вот получается формальная логика. Но в

[26] Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.61

[27] Там же. С.61

[28] Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. Алгебра и элементарные функции. Ч.I. М., 1966. С.85

[29] Вейль Г. О философии математики. Москва-Ленинград, 1934. С.23

случае с исключением, согласно которому «*бесконечные периодические дроби с периодом (9)*» не являются рациональными числами, формалисты лишь придали противоречию ~ρ=ρ новый вид. Отчего противоречие стало еще пышнее и краше. Теперь ему можно придать разные формы.

Пусть $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1,(9)$, а про число *1,(9)* сказано, что оно не рационально, и не сказано, что оно иррационально (свойство ?ρ). Если $1,(9) = 2$, то и про *2* следует говорить, что оно не рационально, и не говорить, что оно иррационально ($2 \in ?\rho$). Но в то же время математики говорят, что число *2* рационально ($2 \in \rho$). Тогда по тому же принципу противоречивости истинным будет суждение, что число *1,(9)* рационально ($1,(9) \in \rho$), а если оно рационально, то будет рационально и $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1,(9)$, то есть ($\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \in \rho$), что возвращает нас к противоречию ~ρ=ρ, из которого, как показано выше, вытекает, что $\sqrt{2}$ рационально ($\sqrt{2} \in \rho$).

Если вы продолжаете упорствовать и утверждать, что периодическая (!) десятичная дробь *1,(9)* не является рациональным числом, то вместо парадокса ~ρ=ρ «*иррациональное равно рациональному*» вы получаете парадокс ?ρ=ρ «*не рациональное, о котором запрещено говорить, что оно иррационально, равно рациональному*» только и всего.

Несмотря на то, что такие выдающиеся математики как Л.Брауэр, А.Гейтинг, А.Н.Колмогоров исследовали пропозиционное исчисление суждений в контексте истинности и доказуемости, получившее затем обобщенное название «*семантика Брауэра-Гейтинга-Колмогорова (БГК)*», а К.Гедель в теоремах о неполноте обосновал доказуемость лишь существования противоречий в системе аксиом арифметики в рамках более полной системы, никто из них, как известно, так и не применил принцип противоречия непосредственно к основаниям математики. Хотя, как справедливо отмечает биограф Л.Брауэра и специалист по интуиционизму Дирк ван Дален, чтобы работать в этой области и «*формализовывать понятие, его нужно сначала понять*».[30] То есть у всех, кто разрабатывал эту семантику, имелись свои примеры парадоксов. Поэтому и подходы к проблеме противоречий у них были несколько различны.

Причем, как пишет Дирк ван Дален, только А.Гейтинг, чьи взгляды изначально были наиболее близки взглядам Л.Брауэра (прохладно относившегося к самой идее полной формализации интуиционизма), сохранил до конца верность принципу противоречия и стал его трактовать как «*предложение, выражающее задачу или, еще лучше, ожидание*»[31] построения, приводящего к противоречию.

А.Н.Колмогоров, и это особенно четко заявлено в статье «О принципе tertium non datur», наоборот, трактовал отсутствие построения системы, не принадлежащей типу $\mathfrak{R}$, в пользу отсутствия реального, неисправимого в рамках $\mathfrak{R}$ противоречия. Поэтому он, написав еще одну статью «К толкованию интуиционистской логики», добавил к принципу противоречия связку «*есть решение*» (если *~A* решено, то решение *A* невозможно),[32] и больше напрямую не возвращался к этой теме. Впрочем, проблема

[30] ван Дален Д. Колмогоров и Брауэр о конструктивной импликации и правило противоречия // Успехи математических наук. Т. 59, вып. 2(356), 2004. С.55

[31] Там же. С.60

[32] Там же. С.60

истинности и доказуемости подтолкнула его к введению понятия т.н. Колмогоровской степени сложности (минимальная длина совокупности знаков, описывающая математический объект и его свойства), а затем Г.Чейтин указал на существование предела, не позволяющего использовать для данного объекта какой-то единый, универсальный алгоритм построения.

Можно сказать, что установка на «*обещающий*» характер трактовки А.Гейтинга принципа противоречия получила тем самым косвенное подтверждение. Но существенным здесь является то, что исчислимые предикаты и формы суждений имеют своей целью переход от менее истинного к более истинному, а он осуществляется всегда через обнаружение и доказательство *contradictio in adjecto* («*внутреннего противоречия*»). Так что только непосредственная *применимость* принципа противоречия была целью всего процесса формализации интуиционистской логики. Без применимости не может быть никакой доказуемости, а без доказуемости интуиционистская логика становится такой же мертвой «*бумагой*» кредитного займа, который однажды взяли, но так и не вернули формалисты. И тем удивительнее наблюдать, как современный интуиционизм поэтапно отказывается от требования применимости, т.е. от непосредственных доказательств внутренних противоречий, превращаясь лишь в более рафинированную оболочку прежнего формализма.

Далеко не случайно, что самый принцип противоречия начинает выглядеть для ряда исследователей даже сомнительным.[33] Ведь в любой формализации применимость отождествляется с импликацией логических суждений, а такое суждение как «*принцип противоречия*» оказывается вроде как пустым и незаполненным. А чтобы он и дальше оставался незаполненной *формой* суждения, достаточно просто игнорировать любое его применение.

Не сложно понять причину, по которой научное сообщество не выдает и, надо полагать, никогда не выдаст по доброй воле ни одного «*ордера*» на применение принципа противоречия. В этом принципе заключена слишком большая, слишком необузданная сила и опасность для науки, которая хотя и пользуется интуитивными озарениями, но состоит «*в официальном браке*» с формализмом, и этот брак требует исходить всегда из имеющихся средств для достижения намеченных целей.

Однако поставленные интуиционизмом задачи не могут быть решены за конечное время жизни одного человека планомерным «*движением от средств к цели*». От этого как раз и отталкивался Л.Брауэр, выдвигая столь непонятное и даже, пожалуй, абсурдное для нынешней научной методологии, почти Ницшеанское, требование «*скачка от цели к средствам*». Только если подумать, сколько лет пришлось бы ждать Д.И.Менделееву, пока средствами и методами науки XIX века будет оглашен весь список «*необходимых элементов*», чтобы получить, наконец, отмашку научного сообщества на их упорядочение, то станет совершенно ясно, что сам Менделеев просто бы не дожил до такого счастливого момента, а научное сообщество могло бы еще и в наши дни спорить, сколько в списке должно быть «*необходимых элементов*».

[33] ван Дален Д. Колмогоров и Брауэр о конструктивной импликации и правило противоречия // Успехи математических наук. Т. 59, вып. 2(356), 2004. С.59

В математике, где операции упорядочения охватывают не 50 и не 100, а порой многие миллиарды математических элементов и объектов, требование «*скачка от цели к средствам*» было с древнейших времен даже не требованием, а скорее одним из условий существования математической науки.

Например, Ж.Адамар, обнаружил минимум кривизны поверхности в гиперпространствах Римана, перескочив через «*средство*» — группу преобразований Лоренца, на основании которой строится теория относительности,[34] и он рассматривает целый ряд других подобных случаев из личного опыта. Фактически «*скачок от цели к средствам*» происходит в истории науки на каждом этапе ее развития.

Можно сказать, оба эти случая: «*движение от средств к цели*» и «*скачек от цели к средствам*», — следствие той самой первой Гильбертовой аксиомы порядка, который сам по себе возможен лишь при условии равноправия переходов как в направлении $A \rightarrow B \rightarrow C$, так в направлении $C \rightarrow B \rightarrow A$. Что выглядит как нарушение «*стрелы времени*» или перемещения информации только в одном направлении из прошлого в будущее, но поскольку в пространстве-времени-сознании перемещаются только интервалы, то есть только части континуальной информации, то никакого противоречия в этом нет: часть более полной информации не только может, но и должна уже содержаться на более ранних интервалах времени. И если научная методология не признает спонтанных перемещений информации из будущего в прошлое, то это говорит о противоречивости самих основ науки или о неспособности ученых *осознавать* свои знания и адекватно воспринимать свойства континуума.

Сосредоточенная медитация сознания и его расширение в область воображения или «*подсознания*» позволяют совершать преобразования, необходимые для всякой интуиции (и достаточно ясной, и содержащей высокий уровень неопределенности), возможности которой тем сильнее и тем шире, чем сильнее и шире каждое конкретное сознание способно концентрироваться и расширяться. Через эту способность, так сказать, искривлять пространство-время-сознания, и достигается озарение, заключающееся в просачивании образов, решений, идей и т.д., которые могли, как кажется со стороны, возникнуть лишь в некотором, порой, в очень отдаленном будущем.

Таким образом, интуиция не является ни прошлым, ни будущим, она не является также и настоящим, как мы его себе представляем, находясь в ситуации вполне определенной исторической эпохи и т.п.; интуиция и есть *непрерывность*, соединяющая различные интервалы или точки пространства-времени: объективного, внутреннего нейрофизиологического, математического, космологического и даже пространства мифологического или воображаемого.

Риман, предложив для поиска простых чисел использовать свойства ζ-функции, способной принимать действительные или мнимые значения, так и не опубликовал выражение, из которого выводятся свойства этой функции, поскольку «*не смог его достаточно упростить*».[35] И гипотеза Римана о существовании такого «*выражения*» до сих пор занимает умы многих математиков. Так что, словами Ж.Адамара, «*почти*

[34] Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970. С.51

[35] Там же. С.111

невозможно понять, как он [Риман] мог его [свойство ζ-функции] открыть, не используя частично этих [открытых позже] общих принципов».[36]

Завуалированный вопрос Ж.Адамара можно сформулировать иначе, в более явной форме, как, например, это сделал в своем докладе Дж. Халперн: «*Допустим некто знает произведение двух (очень больших) простых чисел. В каком смысле он/она знает каждое из этих чисел, если разложение на множители может потребовать миллиарды лет вычислений?*».[37]

Подобный «*скачок*» сознания кажется совсем уж чем-то фантастическим и немыслимым. В обычной математике потому-то и возникают, словами Г.Вейля, экзистенциальные «*карты*» о существовании «*сокровищ*», не указывающие, где они находится, что в формальном подходе никто всерьез и не намерен их добывать. Но вы не можете быть шахтером, если вы никогда не спускались в шахту, не так ли? В этом смысле критика Л.Брауэра вполне убедительна, хотя даже интуиционизм не ставит задачу «*добыть все сокровища*» и не отвергает полностью экзистенциальные суждения, а предлагает хотя бы иногда их проверять конкретными построениями во избежание неистинных суждений, выдаваемых учеными с завидным упорством за истинные.

Тем не менее, в научном сообществе довольствуются тем, что наука и так уже обладает необходимыми и достаточными знаниями, так что степень истинности или глубина знаний давно перестала волновать большинство ученых. Наука избрала для себя путь незнания, и в этом видится опасность деградации научного опыта вследствие феноменальной косности ученых и все возрастающего отрыва абстрактных знаний от непосредственного опыта. «*Наша наука с бóльшим успехом увеличивает нашу мощь, чем наделяет нас знаниями...*», — так описывал этот тревожный симптом Юджин Вигнер,[38] связывая с низким уровнем осмысления знаний трудности при их передаче последующим поколениям.

Если Ю.Вигнер еще мог признаться, что кредит доверия к науке, осознающей лишь то, что ее возможности не безграничны, отнюдь не возрастает, а стремительно падает, то ученые XXI века вынуждены, наоборот, и дальше набирать все новые и новые кредиты, «*играя на повышение*». Наука, действительно, превратилась в банковское искусство — в искусство выдавать кредиты для того, чтобы выдавать кредиты, а банковское искусство из особой формы благотворительности превратилось — и превратилось довольно давно — в искусство порабощения.

Когда интуиция исследователя стреножена либо полностью обезножена «*научными методами*», а «*научные методы*» вырождаются в псевдонаучные, так как не обеспечивают достаточной точности и надежности оснований, то становится невозможным ни дальнейшее «*движение от средств к цели*», ни «*скачок от цели к средствам*».

---

[36] Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970. С.111

[37] Артемов С.Н. Подход Колмогорова и Геделя к интуиционистской логике и работы последнего десятилетия в этом направлении // Успехи математических наук. Т. 59, вып. 2(356), 2004.

[38] Вигнер Ю. Этюды о симметрии. М., 1971. С.176

Конечно, интуитивные решения о произведении двух очень больших простых чисел по Дж. Халперну или о произведении дробей $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}$, конечный базис периода которых *1,414_* также представляет собой большое или очень большое число, то есть когда речь может идти о миллиардах лет компьютерных вычислений (что само по себе налагает много практически невыполнимых условий), не говоря уже о невозможности полной записи таких чисел на клочке бумаги, ни в коем случае не следует понимать как чудесное обретение готовых, проверенных самой интуицией знаний. Тогда бы интуиционизм мало чем отличался от мистических откровений, выступающих «*символом веры*» формалистов, протягивающих пустые руки вместо «*самых несметных сокровищ*», для добычи которых под аплодисменты академического сообщества брались совершенно ошеломительные и недоступные другим направлениям кредиты.

В том-то и дело, что интуиционизм как «*скачок от цели к средствам*» требует вслед за обретением интуитивного знания вполне конструктивных построений — не туманных формальных описаний или логических доводов, которые могут служить в качестве вспомогательных средств или инструкций, а именно выполнимых за конечное время геометрических и алгоритмических построений! Несомненно, это требование оказывается невыполнимым для смелых, но интуитивно неочевидных экзистенциальных суждений, вроде той же Дедекиндовой *«точки сечения»*, которая в интерпретации Кантора стала относиться не произвольно к тому или другому классу, а к классу трансфинитных, сиречь актуально-бесконечных множеств. И здесь интуиционизм оказывается в значительной мере возвращением к традиционному пониманию науки как знаний, которые должны иметь применение к действительности.

Что касается геометрического построения для дроби $\sqrt{2}=1,414_(707_)$, то оно уже много раз демонстрировалось.[39] Это построение, подобно другим построениям для такого рода чисел, связано с разбиением квадрата *ABCD* на дискретную решетку и нахождением элементов диагонального квадрата $ACEF=x^2$. Важно отметить, что сама возможность такого построения является ярким примером, подтверждающим справедливость теоремы Г.Чейтина о существовании предела для объектов Колмогоровской степени сложности, при достижении которого один и тот же с формальной точки зрения объект может быть построен разными способами, дополняющими представления об этом объекте и его свойствах.

Действительно, для обычной математики, в которой не требуется выполнять операции с очень большими числами, когда для того, чтобы задача считалась решенной, достаточно указать лишь несколько цифр десятичной последовательности, а видимость «*точных*» равенств на калькуляторе достигается с помощью программы, обрывающей вычисление на *32*-м разряде, можно использовать фиктивный алгоритм для построения $\sqrt{2}$:

$$S\ (ACEF) = 2S\ (ABCD)$$

Данный алгоритм является фиктивным, так как в нем, по сути, утверждается, что «*число 2 является квадратным*», т.е. таким же квадратным, как числа *1, 4, 9, 16*... (или 1^2, 2^2, 3^2, 4^2...). Данное утверждение о «*квадратности*» числа *2* не соответствует действительности, точнее говоря, оно является псевдоистинным, и дальше из него

[39] Клещев Д.С. Ключ Давида (о решении второй математической проблемы Дэвида Гильберта) // Философская мысль. №3, 2012. С.44-118

вытекает псевдоистинное утверждение о том, что диагональ квадрата «*несоизмерима*» с его стороной: нет построения — нет и соизмерения!

Но тогда мы должны задаться вопросом, который следует из теоремы Г.Чейтина: является ли этот фиктивный алгоритм универсальным? Другими словами, не поменяет ли совокупность знаков, описывающих $\sqrt{2}$, свои свойства, если Колмогоровская степень сложности будет увеличена?

Если свойства $\sqrt{2}$, действительно, не зависят от увеличения степени сложности, то мы полностью согласимся с выводом А.Н.Колмогорова, что в данном конкретном случае «*псевдоистинная формула является истинной*». [40] Если обнаружится, что свойства $\sqrt{2}$ находятся в зависимости от увеличения длины совокупности знаков, то мы согласимся с выводом Г.Чейтина о существовании в данном случае предела сложности, и тогда утверждение о том, что «*псевдоистинная формула» S (ACEF)=2S (ABCD)* является *«истинной*», придется отвергнуть.

При разбиении квадрата *ABCD* на дискретную решетку, в самом деле, можно найти принципиально другой алгоритм для построения $\sqrt{2}$:

$$S\ (ACEF) = 2S\ (ABCD)–(2(AB)–1)$$

или

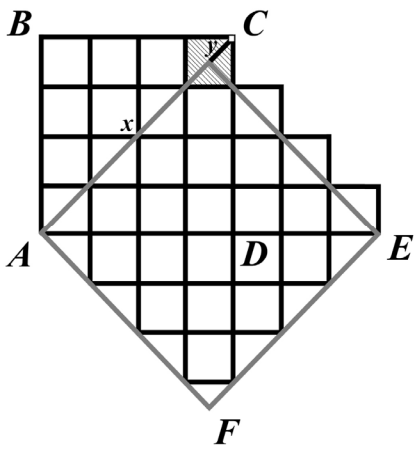
$$x^2 = 2n^2–(2n –1),$$

где n — число элементов,

из которых состоит сторона квадрата *ABCD.*

То есть, если мы используем десятичные дроби, совсем не обязательно сводить отношение площади *S* квадрата *ACEF* к *целочисленному* значению *2S (ABCD*), что само по себе не имеет смысла, ведь *2* — число не квадратное. На самом деле достаточно найти разбиение $x^2=1414_$, такое что его можно повторить для каждого *n-го* элемента диагонали. Тогда при $n \to \infty$ мы перейдем к периодической десятичной дроби $\sqrt{2}=1{,}414_(707_)$.

Такое разбиение для $n = 4$ выполняется не за миллиарды лет, а за пару мгновений. Так, диагональный квадрат *ACEF* равен $25=5^2=x^2$. А значит, предел при $n \to \infty$ становится периодически повторяющейся последовательностью.



Мы получили два алгоритма: один из них является фиктивным, так как из него можно получить некорректное высказывание, что «*число 2 является квадратным*»; другой позволяет обойти это некорректное высказывание, поскольку из него следует, что $x^2 = 1414_= 199_800_1$. Во втором случае мы получаем не фиктивный квадрат, которому в обычной математике не соответствует никакого построения, а именно квадратное число.

Причем как раз в режиме построения такого квадратного числа *199_800_1* и находится каждый шаг приближения в дроби $\sqrt{2}=1{,}414...$:

[40] Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.62

$1{,}41^2 = 1{,}9_881$
$1{,}414^2 = 1{,}99_9396$
$1{,}4142^2 = 1{,}999_96164$
$1{,}41421^2 = 1{,}9999_899241$
$1{,}414213^2 = 1{,}99999_8409369;$
$1{,}4142135^2 = 1{,}999999_82358225;$
$1{,}41421356^2 = 1{,}9999999_932878736$ и т.д.

Если бы десятичное значение $\sqrt{2}=1{,}414...$ было непериодическим, как утверждается в псевдоистинной математике, то на каждом шаге мы бы получали хаотичный набор из девяток и *не*-девяток. В реальности мы получаем такое число девяток, которое указывает на приближение к разрядности числа *199_800_1*. При подробном изучении выявляется целый ряд других свойств числа $\sqrt{2}=1{,}414...$, которыми могут обладать только периодические десятичные дроби.

Иначе говоря, свойства $\sqrt{2}$ зависят от длины совокупности знаков. В так называемой обычной математике, конечно, это не так уж и важно: многие результаты псевдоистинной математики будут походить на результаты истинной (или, скажем точнее, более истинной математики). Но такие свойства как «*периодичность*» или «*непериодичность*», «*рациональность*» или «*иррациональность*» будут иметь критическое значение, если требуется обосновать непрерывность континуума или сходимость последовательности $\sqrt{2^2}=1{,}414...^2$ к значению числа *2*.

В XIX веке профессор Леопольд Кронекер, как известно, резко выступавший против теории множеств, предупреждал о ненадежности выводов анализа, неподтвержденных арифметически: «*Скоро арифметика покажет настоящие точные пути анализу и убедит в неверности всех тех умозаключений, с которыми работает современный, так называемый, анализ*».[41] Выдающийся математик Вейерштрасс на старости лет был буквально доведен до слез такими замечаниями Кронекера.[42]

Но в начале XX века, действительно, появилось направление интуиционизма, которое подвергло радикально глубокой критике основания математической науки. В ответ на эту малоприятную для математиков критику Д.Гильберт мог ответить только следующее: «*То, что делают Вейль и Брауэр, есть ни что иное как возрождение идей Кронекера! Они стремятся спасти математику, выбрасывая за борт все то, что причиняет беспокойства... Если бы мы приняли реформу, которую они предлагают, то подверглись бы риску потерять большую часть наших самых ценных сокровищ*».[43]

Послушайте, ну, так где они, эти пресловутые «*самые ценные сокровища*»? Что считать «*сокровищем*»? Фиктивные доказательства, в которых искусственно вводятся исключения и ограничивается выбор алгоритмов? Тогда «*сокровищем*» следует считать и, например, следующее псевдоистинное доказательство «*неделимости единицы*»: ограничим

[41] Васильев А.В. Вступительная статья «От Евклида до Гильберта» // Д.Гильберт. Основания геометрии. Петроград, 1923, С.XXIV
[42] Рид К. Гильберт. М.,1977. С.40
[43] Там же. С.202

алгоритм делением только на единицу, тогда, разделив единицу, получим *1/1=1*, следовательно, «*единица неделима*». Можно смеяться или плакать, но такая схема нередко используется в фиктивных доказательствах «*обычной математики*» и теории множеств.

Не случайно весь этот список «*сокровищ*», перечисленных Д.Гильбертом в 1922 году на собрании математиков в Гамбурге, начинается с «*общего понятия иррационального числа*». Как было показано выше, именно в «*классических иррациональностях*» квадратичных, кубических и др. возникает парадокс ~ρ=ρ, для исключения которого периодические дроби с периодом *(9)* были наделены еще более сомнительным свойством ?ρ «*не рациональности*», лишь заменившим один парадокс другим ?ρ=ρ.

Пытаясь отстоять сложившуюся «*общепризнанную*» математику, Д.Гильберт заявлял: «*Насколько у Кронекера было мало шансов упразднить иррациональные числа... настолько же маловероятен и успех Вейля и Брауэра. Брауэр не представляет собой революцию, как это считает Вейль, — только повторение попытки организовать Putsch*».[44]

Но историк науки может задаться вопросом: а когда же в действительности произошел первый «*математический путч*»? И ответ вновь оказывается не в пользу школы формалистов. Ведь самый первый «*математический путч*» произошел как раз во времена Пифагорейского братства (V в до н.э.), когда математик Гиппас получил свое знаменитое псевдоистинное доказательство «*несоизмеримости*» стороны и диагонали квадрата.

В отличие от нынешних формалистов, назвавших это доказательство «*наилучшим классическим примером рассуждения от противного в математике*»,[45] в античности вокруг этой теоремы развернулась ожесточенная борьба. Пифагорейцы отказывались ее признавать, так что Гиппас был изгнан из Пифагорейского братства, после чего он примкнул к зачинщикам Кротонского погрома.[46]

По этическим соображениям об этом не принято говорить, но после физической расправы над пифагорейцами во время Кротонского бунта Гиппас и его сторонники оказались носителями «*единственно истинной математики*», согласно которой диагональ была несоизмерима на том основании, что единица считалась неделимым числом.[47] Означает ли это, что мы и теперь должны относить античную аксиому неделимости единицы к «*самым ценным сокровищам*» математики?

Ведь на дворе уже XXI век, и ссылки на авторитет Платона и Аристотеля,[48] признававших аксиому неделимости единицы и, следовательно, теорему Гиппаса, оставленные нам самим Кантором,[49] уже не выглядят столь убедительными. По крайней мере, для интуиционистов.

Если математики хранят на борту своего корабля тайную доктрину о «*неделимости*» единицы, а сами занимаются ее делением, используя десятичные дроби, то в таком корабле зияют чудовищно большие дыры! По словам Д.Гильберта, «*если какому-нибудь*

---

[44] Рид К. Гильберт. М.,1977. С.204

[45] Бурбаки Н. Теоря множеств. М., 1965. С.300

[46] Ямвлих. Жизнь Пифагора / Под ред. В.Б.Черниговского. М., 1998. С.150

[47] ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. М., 1959. С.69

[48] Аристотель. Сочинения в четырех томах. М., 1981, ТIII. С.120

[49] Кантор Г. К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств.М., 1985. С.273

понятию присвоены признаки, которые друг другу противоречат, то... это понятие математически не существует». [50] Следовательно, в псевдоматематике, которую в учебниках преподносят как «*истинную науку*», отсутствует даже понятие «*единица*». Вы, конечно, можете плыть куда угодно на таком корабле, но только в своем воображении, пока ваш «*корабль*» не спустили на воду.

Кризис оснований математики, разразившийся в конце XIX — начале XX века и продолжающийся вплоть до наших дней, не является поэтому результатом обнаружения одних лишь парадоксов теории множеств Георга Кантора, как об этом сообщается во всех монографиях по философии математики. Настоящие корни этого кризиса уходят в античность, а по большому счету — в псевдоистинную теорему Гиппаса, поставившую задачу о построении заведомо несуществующего «*квадратного числа 2*», хотя за рамками «*общепризнанной*» системы типа $\mathfrak{R}$ существует вполне конструктивное решение.

Подход к решению этой проблемы, как мы видели, невозможен без первой аксиомы порядка Гильберта, так что интуиционизм не предлагает и не предлагал «*разрушать до оснований*» здание математики. Интуиционизм убедительно совмещает в себе атомистическое восприятие с восприятием континуальным через понятие интервала — и такое взаимодействие двух понятийных аппаратов характерно не только для основ математики, оно лежит в основе самого феномена сознания как сопряжения «*левостороннего*» и «*правостороннего*» мышления.

Что же касается формализма, то он оказывается лишь оторвавшейся от правого полушария частью общей интуиционистской математики — сиречь возгордившимся *интеллектом*, вкусившим плоды познания и отпавшим от истины, решив подменить собой бесконечный божественный *Разум*. Истинная математика — та и только та, что открывается нам в глубинах сознания, ибо никакой другой математики, равно как понятий о казуальных связях мира, включая понятие о времени и пространстве, вне мышления и сознания не существует и существовать не может. В этом смысле Л.Брауэр — это и спустя сто лет революция, а теорема Гиппаса — противоречие и кризис даже спустя две с половиной тысячи лет!

В интуиции человека заложены поистине неисчерпаемые возможности — способность находить решения, для которых потребовались бы миллиарды и миллиарды лет вычислений, немыслимые количества энергии и ресурсов. И хотя интуиция человека, как показывает история науки, не всегда оказывается источником надежных знаний — это единственный источник новых знаний и открытий, которым мы, в конечном счете, располагаем.

[50] Гильберт Д. Математические проблемы. М., 1969. С.26