Е.Л. Царфин

КАК ОЦЕНИТЬ СЛОЖНОСТЬ СЛОЖНОЙ СЕТИ?

Теория сложных сетей – ровесница XXI века. Сложными сетями моделируются не только сети энергоснабжения, транспортные, компьютерные или социальные сети. Сложные сети возникают в задачах социологии, эпидемиологии, нейрофизиологии.

В настоящее время сложные сети изучаются

1. Методами классической теории графов – при этом выясняются топологические характеристики сетей: связность, цикличность, мотивы,
2. Методами компьютерного моделирования и статистической физики, собственно, положившими начало теории сложных сетей и являющимися в настоящий момент основными в изучении сложных сетей. (http://barabasi.com/book/network-science)

В представленной работе сложные сети рассматриваются с позиций синергической теории информации.

Введение. Основная формула синергической теории информации.

Основная формула синергической (в оригинале: «синергетической») теории информации представлена В.Б.Вяткиным в работах [1,2,3] и является естественным обобщением понятий количества информации Р.Хартли и энтропии К.Шеннона.

$$\boldsymbol{log_2 M} = -\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{m_i/M})\, \boldsymbol{log_2}\,(\boldsymbol{m_i/M}) + \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{m_i/M})\, \boldsymbol{log_2}(\boldsymbol{m_i}) \qquad (\mathbf{1})$$

где $\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}$ – количество элементов в системе,
$\boldsymbol{n}$ – количество подсистем в системе,
$\boldsymbol{m_i} \geq \mathbf{1}$ – количество элементов в $\boldsymbol{i}$-той подсистеме, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1..}\boldsymbol{n}$.

Логарифм в левой части формулы $(\mathbf{1})$ – это количество информации Р.Хартли, далее – **информационная сложность (сложность)** системы $\boldsymbol{I}$, первая сумма в правой части – энтропия Шеннона, далее – энтропийная составляющая или **энтропия** $\boldsymbol{H}$.

Вторая сумма в правой части, введенная В.Б.Вяткиным – синергетическая составляющая, назовем ее просто: **синергия** $\boldsymbol{S}$.

Тогда формула

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{S} \qquad (\mathbf{2})$$

– это закон сохранения **разнообразия** (**сложности** системы $\boldsymbol{I}$) в системе из $\boldsymbol{M}$ элементов, как постоянство суммы характеристик **хаоса** (***энтропии*** $\boldsymbol{H}$) и **порядка** (***синергии*** $\boldsymbol{S}$).

Обсуждение.

1) Закон сохранения разнообразия-информации напоминает закон сохранения энергии

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K} + \Pi \quad ,$$

где полной энергии $\boldsymbol{E}$ соответствует полная энтропия (сложность) $\boldsymbol{I}$,
кинетической энергии $\boldsymbol{K}$ соответствует энтропия Шеннона $\boldsymbol{H}$,
а потенциальной энергии Π соответствует синергия $\boldsymbol{S}$.

2) Формула $(\mathbf{1})$ появилась не случайно, ее связь с основными понятиями теории информации очевидна:

Пусть $\boldsymbol{p_i}$ – вероятность появления в тексте одной из $\boldsymbol{n}$ букв алфавита.

Тогда значение энтропии Шеннона

$$\boldsymbol{H_r} = -\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i}\, \boldsymbol{log_2 p_i} \qquad (\mathbf{3})$$

Рассмотрим сообщение длиной n при равновероятном распределении букв $p_i = \frac{1}{n}$,

В этом случае, **энтропия Шеннона** $H_r = H_{max} = log_2 n = I$ равна **информационной сложности системы**,

тогда разность $H_{max} - H_r = I_s = S$ – это **избыточная информация**.

Заметим, что **избыточная информация** и **синергия** это, в данном случае, одно и то же, а формула (1) имеет аналогию с формулой К.Шеннона (4):

$$H_{max} - H_r = I_s \qquad (4)$$

3) Частные случаи:

1. $m_i = m$, $i = 1..n$. Все подсистемы равны.

$M = mn$,

$I = log_2 M = log_2 n + log_2 m$, $H = H_{max} = log_2 n$, $S = log_2 m$.

2. $M = n$, $m = 1$.

$I = log_2 M = log_2 n = H = H_{max}$, $S = 0$.

3. $M = m$, $n = 1$.

$I = log_2 M = log_2 m$, $H = H_{max} = log_2 n = 0$, $S = S_{max} = log_2 m = log_2 M = I$

4) Очевидно, что формула (1) справедлива для

– логарифмов по любому положительному основанию, например, десятичных или натуральных,

– значений $m_i \geq 1$, которые могут быть не только натуральными, но и действительными числами, - главное, чтобы логарифмы от них не были отрицательны,

– не только конечных, но и бесконечных сходящихся сумм $M = \sum_{i=1}^{\infty} m_i$.

5) Интегральная интерпретация формулы (1) при

$$M = \int_a^b m(x)\,dx, \quad m(x) \geq 1$$

и соответствующей замене сумм в правой части (1) интегралами не тривиализирует этого замечательного равенства, поскольку всегда представляет интерес разность между значениями полной энтропии системы и энтропией К.Шеннона.

6) Дифференциальная энтропия Шеннона вероятностного распределения с плотностью $p(x)$ определяется формулой

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x)\,dx \qquad (5)$$

Применение формулы (1) для вероятностного распределения не имеет смысла, т.к.

$p(x) \leq 1$. Но для любой реальной выборки положительной случайной величины m_i , соответствующей распределению $p(x)$, формула (1) имеет место. Для этого выбираем единицу измерения так, чтобы выполнялось неравенство $min\, m_i \geq 1$.

Тогда, полагая

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, справедливо равенство (1).

Заметим, что сюрпризов, которые преподносит дифференциальная энтропия, принимая не только положительные, но и отрицательные значения можно избежать, правильно выбирая параметры распределения и единицу измерения реальной величины.

7) На самом деле, для системы в формуле (1) важны значения информационной сложности $I = lg(M)$ и одного из относительных значений энтропии и синергии

$$\eta = H/I \quad \text{и} \quad \sigma = S/I \quad , \quad \eta + \sigma = 1 \qquad (6) \quad .$$

8) Смысл основных понятий синергической теории информации раскрывают следующие синонимические гнезда:

$\boldsymbol{I}$ – информация Р.Хартли, информационная сложность, ресурс, полная энтропия системы,

$\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{S}$ – энтропия К.Шеннона и синергия (синергетическая составляющая), хаос и порядок, конкуренция и кооперация.

В.Б. Вяткин в работах [1,2,3] применял свою формулу для исследования соотношения энтропии и синергии текстов, распределения электронов в оболочках элементов периодической системы Менделеева, структур паутин, которые плетут пауки. Применим формулу $(\mathbf{1})$ для оценки информационной сложности сложных сетей.

1. Информационная сложность сложной сети.

Рассмотрим произвольный орграф с петлями $\boldsymbol{G(n, M_{in}, M_{out})}$, состоящий из $\boldsymbol{n}$ узлов, $\boldsymbol{M_{in}}$ входящих связей и $\boldsymbol{M_{out}}$ выходящих связей. $\boldsymbol{M = M_{in} = M_{out}}$. Тогда каждому узлу орграфа $\boldsymbol{i}$ соответствуют множества $\{\boldsymbol{M_{in}}\}$ ($\{\boldsymbol{M_{out}}\}$) связей, входящих (выходящих) из $\boldsymbol{i}$ мощность которого равна $\boldsymbol{m_{i+}}$ $(\boldsymbol{m_{i-}})$ **.** Петли причисляем и к $\boldsymbol{M_{in}}$ и к $\boldsymbol{M_{out}}$. Информационную сложность такого орграфа можно оценить с помощью формулы $(\mathbf{1})$ **:**

$$\boldsymbol{I_{\pm} = lgM_{\pm} = -\sum_{i=1}^{n}(m_{i\pm}/M_{\pm})\,lg\,(m_{i\pm}/M_{\pm}) + \sum_{i=1}^{n}(m_{i\pm}/M_{\pm})\,lg(m_{i\pm})} \qquad (7)$$

Если узел $\boldsymbol{i_*}$ не имеет входящих (выходящих) связей, то $\boldsymbol{m_{i^*+} = 0}$ $(\boldsymbol{m_{i^*-} = 0})$. В этом случае нулевые значения в формулу $(\mathbf{7})$ не подставляются.

На **Fig. 1** изображен ориентированный граф. В скобках указываются значения $\boldsymbol{m_{i+}}$ $(\boldsymbol{m_{i-}})$:

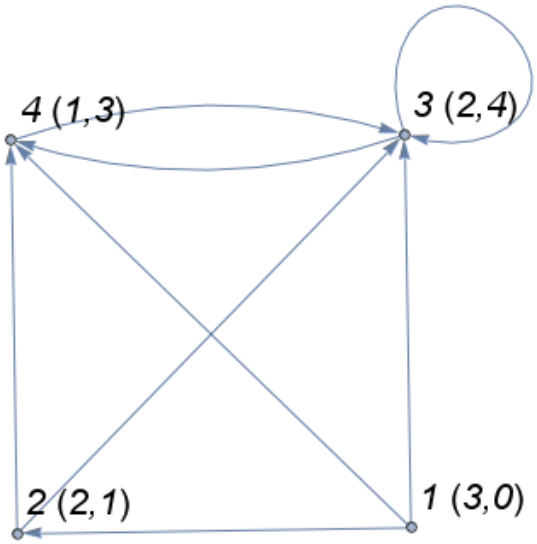

Fig. 1

Для этого графа

$$\boldsymbol{I = 1.50515\,, H = 1.19453\,,\ S = 0.310621\,,\ \eta = 0.793628\ ,\ \sigma = 0.206372\ .}$$

Произвольный неориентированный граф без петель $\boldsymbol{G(n, M)}$, состоящий из $\boldsymbol{n}$ узлов и $\boldsymbol{M}$ связей, легко превратить в ориентированный граф, заменяя каждую связь двумя связями, выходящими из одной вершины и входящими в другую. Тогда $\boldsymbol{m_{i\pm} = m_i}$ и информационная сложность орграфа, полученного из неориентированного графа $\boldsymbol{G(n, M)}$:

$$\boldsymbol{I = lg(2M) = -\sum_{i=1}^{n}(m_i/2M)\,lg\,(m_i/2M) + \sum_{i=1}^{n}(m_i/2M)\,lg(m_i) = H + S\,.} \qquad (8)$$

Очевидно, что любой случайный граф (например, типа Эрдёша-Реньи), превращенный в орграф, можно охарактеризовать средними значениями $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{S}$.

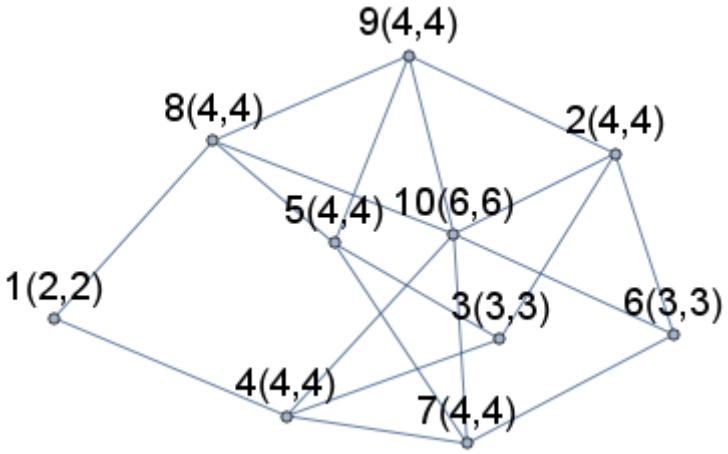

Fig. 2

На рисунке **Fig. 2** изображен граф Бернулли с 10-ю узлами и вероятностью связи 0,5:

```
g = RandomGraph[BernoulliGraphDistribution[10, 0.5]];
Graph[g,VertexLabels ->
Table[i -> Placed[Row[{i, "(", VertexInDegree[g, i], ",",
VertexOutDegree[g, i], ")"}], Above], {i, VertexList[g]}],
VertexLabelStyle -> 18,VertexSize -> Small]
m = VertexDegree [g]; sm = 2Total[m];
smM =Array[N[(Log[10,m[[#]]]*m[[#]]/sm)] &, 5];
sS = Total[smM]; sI = N [Log[10, sm]]; sH = sI - sS;
s = sS/sI; h = sH/sI;
Row [{"I = ", sI, "  H = ", sH,"  S = ", sS,"     h = ", h, "    s = ",s}]
```

(Текст программы на Wolfram Language).

$$\boldsymbol{I} = 1.88081,\ \boldsymbol{H} = 1.759,\ \boldsymbol{S} = 0.121818,\ \boldsymbol{\eta} = 0.935231,\ \boldsymbol{\sigma} = 0.0647686.$$

А вот – Барабаши-Альберт граф с 10-ю узлами,на каждом шаге присоединяются по 2 связи (WL):

```
g = RandomGraph [BarabasiAlbertGraphDistribution [10, 2]]
```

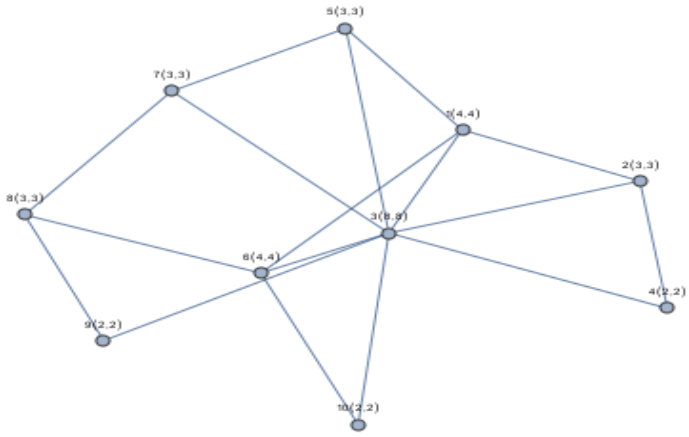

Fig. 3

$$\boldsymbol{I} = \mathbf{1.83251},\ \boldsymbol{H} = \mathbf{1.54467},\ \mathbf{S} = \mathbf{0.287836},\ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0.842928},\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0.157072}.$$

А вот – Барабаши-Альберт граф с 50-ю узлами, на каждом шаге присоединяются по 2 связи:

g = RandomGraph [BarabasiAlbertGraphDistribution[50, 2]]

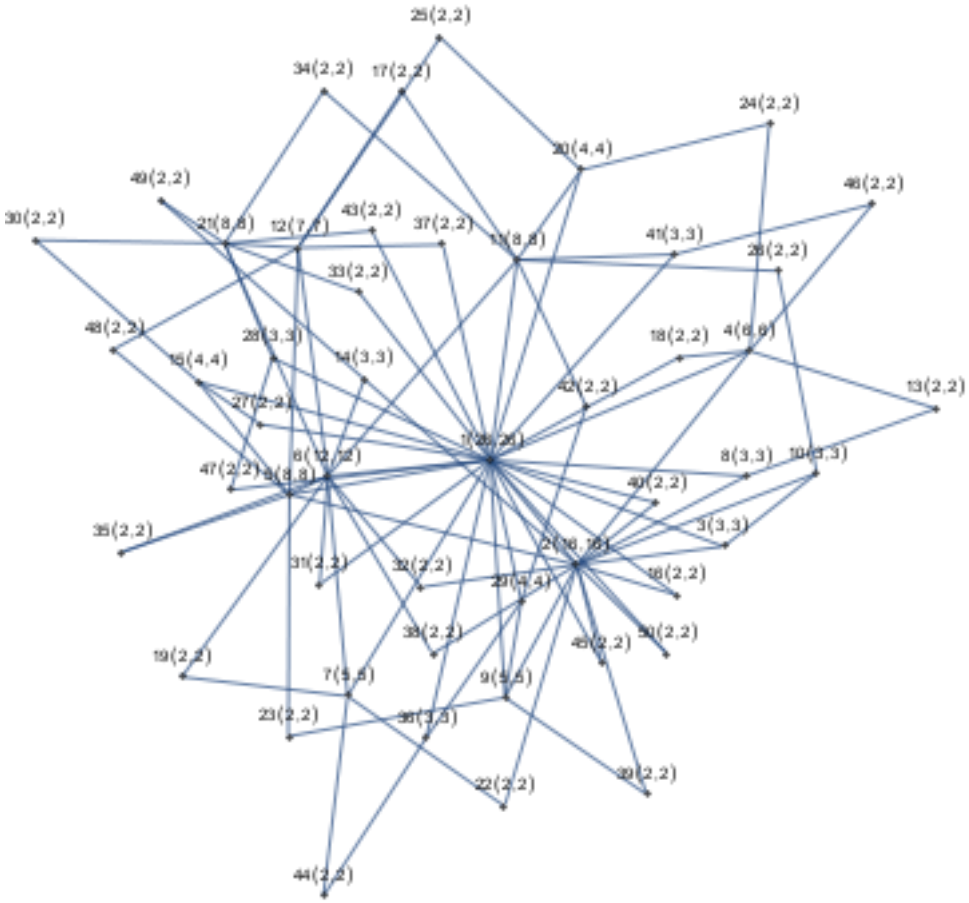

Fig. 4

$$\boldsymbol{I} = \mathbf{2.58883},\ \boldsymbol{H} = \mathbf{2.21883},\ \mathbf{S} = \mathbf{0.37},\ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0.857078},\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0.142922}.$$

В таблице приведена зависимость между параметрами БА-графа (максимальным количеством узлов $\boldsymbol{N}$, количеством связей от каждого нового присоединенного узла $\boldsymbol{k}$) и относительным значением энтропии $\boldsymbol{\eta}$:

$\boldsymbol{N}$	**10**	**100**	**1000**	**10000**	**100000**
$\boldsymbol{k} =$	**0.84**	**0.87**	**0.90**	**0.92**	**0.93**
$\boldsymbol{k} =$			**0.79**	**0.81**	

На примерах видно, что с увеличением числа связей энтропия БА-графа растет, а синергия – падает (по всей видимости, за счет тяжелого хвоста безмасштабного распределения, соответствующего модели БА, заложенной в Wolfram Language).

Сложная сеть характеризуется, прежде всего, вероятностным распределением узлов по числу связей:

$$\boldsymbol{p(k)} \qquad (\mathbf{9})$$

(http://barabasi.com/networksciencebook/chapter/4#power-laws).

Если в сети всего $\boldsymbol{N}$ узлов, то $\boldsymbol{n(k) = p(k)N}$ - количество узлов, имеющих $\boldsymbol{k}$ связей.

Тогда общее количество связей:

$$\boldsymbol{M = \int_{k_{min}}^{k_{max}} n(k)k\,dk} \qquad (\mathbf{10})$$

Информационная сложность орграфа, полученного из сети с распределением $(\mathbf{9})$

$$\boldsymbol{I = H + S =}$$

$$\boldsymbol{= lg(2M) = -\int_{k_{min}}^{k_{max}} n(k)[(k/2M)\,lg\,(k/2M)]dk}$$

$$\boldsymbol{+ \int_{k_{min}}^{k_{max}} n(k)[(k/2M)\,lg(k)]dk} \qquad (\mathbf{11})$$

Для ориентированной сложной сети с распределением $\boldsymbol{n(k_{\pm}) = p(k_{\pm})n}$

$$\boldsymbol{I = I_{\pm} = H_{\pm} + S_{\pm} = lgM_{\pm} =}$$

$$\boldsymbol{= -\int_{k_{min\pm}}^{k_{max\pm}} n(k_{\pm})\left[\left(\frac{k_{\pm}}{M}\right)lg\left(\frac{k_{\pm}}{M}\right)\right]dk_{\pm} + \int_{k_{min}}^{k_{max}} n(k_{\pm})\left[\left(\frac{k_{\pm}}{M}\right)lg(k_{\pm})\right]dk_{\pm}} \qquad (\mathbf{12})$$

Для дискретного распределения $(\mathbf{9})$ достаточно заменить интегралы суммами, аналогичными $(\mathbf{7}), (\mathbf{8})$.

Рассмотрим сложную сеть с безмасштабным вероятностным распределением узлов по числу связей:

$$\boldsymbol{p(k) = (\gamma\text{-}1)k_{min}^{\gamma\text{-}1}k^{-\gamma}} \qquad (\mathbf{13})$$

Понятно, что сложная сеть, моделируемая неориентированным (ориентированнным) графом с матрицей инциденций, состоящей из нулей и единиц, - это мертвая схема, отражающая

лишь топологию реальной сети. Поэтому оценка сложности сети с помощью формул $(11), (12)$ зачастую приводит к тривиальным результатам. Гораздо более красноречиво выглядят информационные оценки в реальных сетях, «оживленных» потоками.

2. Потоки в сложных сетях и их информационная сложность.

Пусть предприятие, располагающее суммарным ресурсом $\boldsymbol{M}$ **,** состоит из $\boldsymbol{n}$ участков (цехов), на каждом из которых, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1..}\boldsymbol{n}$, сосредоточено примерно равное количество $\boldsymbol{m_i} \geq \mathbf{1}$ ресурсов. Последнее неравенство необходимо, чтобы синергия была положительна, а энтропия не росла бесконечно. Количество ресурсов измеряется в выбранных единицах: тоннах, человеко-часах и т.п. так, чтобы минимальный ресурс не превышал единицы.

Предположим, что на одном или нескольких из участков возник «аврал» и с других участков туда переброшена часть ресурсов, которые, в данный момент, не используются. Описанную ситуацию можно представить матрицами (5), и (6):

$\boldsymbol{m_1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{m_{1j}} = \boldsymbol{m}$
$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{m_i}$	$\mathbf{0}$	$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{m_{ij}} = \boldsymbol{m}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{m_n}$	$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{m_{nj}} = \boldsymbol{m}$
$\boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{M_{10}}$	$\boldsymbol{m_i} = \boldsymbol{M_{j0}}$	$\boldsymbol{m_n} = \boldsymbol{M_{n0}}$	

Табл. (5)

$\boldsymbol{m_{11}}$	$\dots$	$\boldsymbol{m_{1n}}$	$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{m_{1j}} = \boldsymbol{m}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{m_{ij}} = \boldsymbol{m}$
$\boldsymbol{m_{n1}}$	$\dots$	$\boldsymbol{m_{nn}}$	$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{m_{nj}} = \boldsymbol{m}$
$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_{i1}} =$	$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_{ij}} =$	$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_{in}} = \boldsymbol{M_n}$	

Табл. (6)

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i} = \boldsymbol{M} \ , \qquad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{M_j} = \boldsymbol{M} \ . \qquad (14)$$

Вычислим **энтропию Шеннона** и **синергию** в случае до и после переброски ресурсов:

$$\boldsymbol{H_0} = -\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{m_i}/\boldsymbol{M})\, \boldsymbol{lg}\, (\boldsymbol{m_i}/\boldsymbol{M}) \ , \qquad \boldsymbol{S_0} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{m_i}/\boldsymbol{M})\, \boldsymbol{lg}(\boldsymbol{m_i}) \qquad (15) \quad ,$$

$$\boldsymbol{H_1} = -\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{M_J}/\boldsymbol{M})\, \boldsymbol{lg}\, (\boldsymbol{M_J}/\boldsymbol{M}) \ , \qquad \boldsymbol{S_1} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{M_j}/\boldsymbol{M})\, \boldsymbol{lg}(\boldsymbol{M_j}) \qquad (16) \quad ,$$

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{lgM} = \boldsymbol{H_0} + \boldsymbol{S_0} = \boldsymbol{H_1} + \boldsymbol{S_1} \qquad (17) \ .$$

Поскольку энтропия Шеннона – выпуклая функция, то при неравномерном распределении ресурсов (**Табл. (6)**) энтропия падает, а синергия растет:

$$\boldsymbol{H_0} > \boldsymbol{H_1} \ , \quad \boldsymbol{S_0} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H_0} < \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H_0} = \boldsymbol{S_1} \qquad (18)$$

Синергия, в переводе с древнегреческого, означает «сотрудничество». Концентрация ресурсов в «узком месте» способствует их взаимодействию. Это интуитивное соображение и побудило автора назвать «синергетическую составляющую» (по В.Б. Вяткину) в формуле (1) – **синергией.**

Исходя из матрицы (6) имеет смысл отдельно рассмотреть

1) **собственные ресурсы системы**, расположенные на главной диагонали,

2) **донорскую часть системы** – строки матрицы без главной диагонали, по которым видно, как распределяются ресурсы, которые отдает один участок всем остальным,

3) **акцепторскую часть системы** – столбцы матрицы без главной диагонали, по которым видно, как распределяются ресурсы, которые получает участок от всех остальных.

Представляет интерес отдельное рассмотрение собственной, донорской и акцепторской сложности, энтропии и синергии. Формула (1) применяется соответственно к векторам, формирующимся из главной диагонали матрицы (6) и сумм по строкам и столбцам (без элементов главной диагонали) . Очевидно, что донорская и акцепторская сложность одинаковы, тогда как донорская и акцепторская энтропия и синергия совпадают лишь в случае симметричной матрицы (неориентированного графа).

Заметим, что все вышесказанное относится к обычному ориентированному (неориентированному) графу с матрицей инциденций, состоящей из нулей и единиц.

В последнее время в научно-технической литературе популярна тема сетецентризма. Предлагаемый выше способ оценки потоков в сетях с позиций синергической теории информации может оказаться полезной в изучении природы сетецентричности.

2.1 Синергия в производстве.

Пусть производство продукции на **j** – том участке занимает $\mathbf{M_j}$ ресурсов и производится за $\mathbf{T_j}$ времени. Представим, что выпуск продукции (output) на участке – нелинейная функция

$$\mathbf{Y_j = [a\, M_j + \sigma(M_j)] * T_j} \quad , \qquad \mathbf{(19)}$$

где $\mathbf{\sigma(M_j) \geq 0}$ – отвечает за синергию.

Тогда суммарный выпуск продукции

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{Y_j} \quad . \qquad \mathbf{(20)}$$

Для оценки сложности (ресурсоемкости) производственного процесса введем понятие (нег)энтропии или **синтропии** производства (output enthropie):

$$\boldsymbol{J = I * T} \quad , \qquad \mathbf{(21)}$$

где $\boldsymbol{I}$ – полная энтропия матрицы ресурсов,

$$\boldsymbol{T} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{T_j} \qquad \mathbf{(22)}$$

– время, необходимое для выпуска определенного количества продукции.

Полагая продуктивность (нелинейной) функцией **(19)** , получим сокращение времени выпуска продукции за счет концентрации (синергии) ресурсов в «узких местах» для покрытия пиков нагрузки.

2.2 Задача о двух крестьянах.

Два крестьянина-соседа очищают свои земельные участки от камней. Один крестьянин убирает легкий камень за час, а тяжелый – за три часа. Вдвоем крестьяне убирают тяжелый камень за один час. Пусть у каждого из крестьян по 12 камней на участке, из них по три - тяжелых. Тогда, работая в одиночку, каждый из них затрачивает:

$\mathbf{T_0 = 9ч + 3*3ч = 18ч.}$

Убирая тяжелые камни вместе, каждый из них затрачивает: $\mathbf{T_1 = 9ч + 3ч + 3ч = 15ч}$ **.**
Итак, за счет взаимодействия, каждый из крестьян экономит по **3ч** или **16,7%** времени.
В терминах синергической теории информации:
работа в одиночку представляется матрицей

$$\begin{matrix} [1\ 0] \\ [0\ 1] \end{matrix} \qquad \mathbf{M=2,\ m_1=1,\ m_2=1,}\ \text{(по одному работнику на участке)}$$
$$\boldsymbol{I} = \log_2(2) = 1,\ \boldsymbol{H} = -2*(1/2)\log_2(1/2) = 1,\ \boldsymbol{S} = 0.$$

Энтропия Шеннона максимальна, синергия равна нулю.
Совместная работа представляется матрицами

$$\begin{matrix} [1\ 0] \\ [1\ 0] \end{matrix}\quad \mathbf{M=2,\ M_1=2,\ M_2=0.}\quad \text{и}\quad \begin{matrix} [0\ 1] \\ [0\ 1] \end{matrix}\quad \mathbf{M=2,\ M_1=0,\ M_2=1.}$$

(на одном участке трудятся оба работника).

В обоих случаях:

$$\boldsymbol{I} = \log_2(2) = 1,\quad \boldsymbol{S} = 2*(1/2)\log_2(2) = 1,\quad \boldsymbol{H} = 0.$$

Синергия максимальна, энтропия Шеннона равна нулю.

В приведенном случае продуктивность системы из двух работников – нелинейная функция: уборка одного тяжелого камня двумя работниками происходит не за **3ч:2 =1,5ч,** а за **1ч.**

Подобная задача – о двух компьютерах: отец и сын сидят за компьютерами, связанными LAN. Отец просматривает страницы в интернете, сын играет в компьютерную игру, требующую ресурс оперативной памяти. Специальная программа (написанная отцом) позволяет использовать память обоих компьютеров в игре сына.

В данном случае

$\mathbf{M = m_1 + m_2 = M_1 + M_2}$ **,**

где $\mathbf{m_i}$ – реальные ресурсы памяти каждого из компьютеров,

$\mathbf{M_i}$ – их виртуальные ресурсы.

А теперь представим себе, что один крестьянин позвал другого на помощь. Вместе они одолели тяжелый камень за, скажем, 1ч 20мин. Потом они, на радостях, покурили, поговорили и, счастливые и довольные, разошлись через 40мин. В результате, на уборку камня было затрачено 2ч рабочего времени, при крайней норме в 1ч 30мин! Так какая же польза от такой синергии? Никакой!

Какая же польза от синергическойтеории информации? Огромная – ведь формула Шеннона-Вяткина (1) позволяет численно выразить концентрацию ресурсов в системе. Но на вопрос: «Насколько эффективна концентрация ресурсов?» дает ответ только продукционная функция.

2.3 Оценка сложности управляемой сложной сети.

Для того, чтобы управлять сложной сетью нужно контролировать определенное количество узлов, зависящее от топологии конкретной сети. Эти узлы называются драйверами (по-русски – ведущими узлами). А.-Л.Барабаши с соавторами дал оценки количества узлов-драйверов в зависимости от распределения узлов графа по количеству входящих (выходящих) связей [4]. Существуют надежные алгоритмы, позволяющие находить узлы-драйверы. https://github.com/ntamas/netctrl

Рассмотрим матрицу потоков сети, которой мы хотим управлять. По матрице инциденций графа, соответствующего сети, находим узлы-драйверы. На пересечении столбцов, отвечающих драйверам, и главной диагонали матрицы потоков поставим значения управляющих потоков (или

разбросаем их по столбцу-драйверу пропорционально уже имеющимся потокам). Вычислим с помощью формул **(7), (8), (9)** полную информацию, энтропию и синергию сетевой матрицы до и после подачи управляющих потоков. С увеличением управляющего потока относительная энтропия сети, скорее всего, будет падать (при управлении возникает эффект негэнтропии), а синергия – расти. (Пожалуй, этого эффекта стоить ожидать в сетях с относительно небольшим количеством драйверов.)

Очевидно, что синергическая теория информации дает выраженный эффект в применении к взвешенным графам. Случай, когда весами снабжаются не связи графа, а узлы, рассмотрим в следующем разделе.

3. Закон иерархических компенсаций (Е.А. Седова – А.П.Назаретяна) и его интерпретация в свете синергической теории информации.

Попробуем, с позиций синергической теории информации, интерпретировать **закон иерархических компенсаций (Е.А. Седова – А.П.Назаретяна):**

В сложной, иерархически организованной системе, рост разнообразия на верхнем уровне обеспечивается ограничением разнообразия на предыдущих уровнях, и наоборот, разнообразия на нижнем уровне разрушает верхний уровень организации (то есть, система как таковая гибнет). http://vikent.ru/enc/634/

Эта закономерность, сформулированная А.П.Назаретяном, вытекает из следующего предположения Е.А.Седова (высказанного им в своей последней работе [5]) :

«Только при условии ОГРАНИЧЕНИЯ РАЗНООБРАЗИЯ нижележащего уровня можно формировать разнообразные функции и структуры находящихся на более высоких уровнях социальных систем. Таким образом, и в этом аспекте возникает проблема поисков оптимального соотношения детерминации (I_s) и непредсказуемости (H_r) граждан и их сообществ как составных элементов социальных систем.»

Е.А.Седов предполагал, что соотношение

$H_r / (H_{max} - H_r) = H_r / I_s = 20/80$, где $H_{max} = 100\ \%$

характерное для текстов на европейских (и других языках) может применяться как критерий стабильности (социальной) системы. (см. **п.2. Обсуждение** формулы **(1)**). К сожалению, безвременно ушедший, Е.А.Седов не разработал подробного математического аппарата для вычисления величин H_{max} , H_r , I_s . Не совсем понятно, также, какой математической моделью должна представляться «сложная, иерархически организованная система».

Представим иерархическую систему древовидной структурой, в которой каждому узлу, находящемуся в самом низу иерархии, припишем вес 0. Для узлов, находящегося на вышележащем уровне, веса вычисляются рекуррентно, как сумма весов связанных с ним узлов низлежащего уровня. (**Fig.5**)

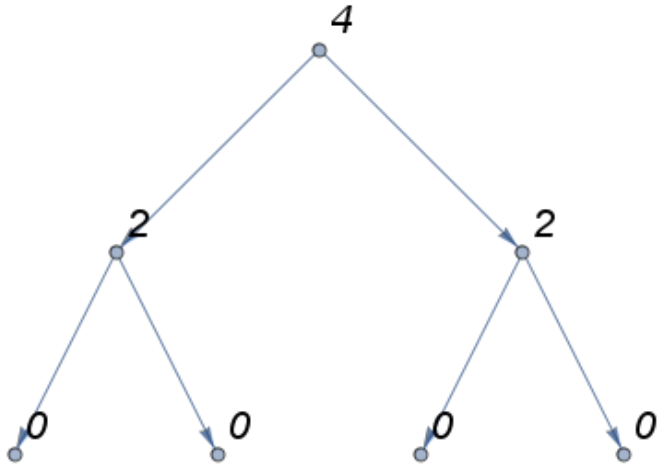

Fig.5

Применим к множеству узлов (ненулевого веса) системы, изображенной на **Fig.5** формулу (**1**):

$\mathbf{M = 8,\ m_1 = m_2 = 2,\ m_3 = 4.}$

I = lg 8 = 0,903 , S = (1/2)lg4 + 2(1/4)lg2 = 0,452, H = 0,451 .
$\eta = H/I$ = 0,5 , $\sigma = S/I$ = 0,5 (соотношение (η/σ = 50:50)
Рассмотрим эволюцию системы от **Fig.6** к **Fig.7 :**
Система на Fig.6 :
M = 6, $m_1 = m_2 = m_3 = 2$.
I = lg 6 = 0,778 , S = 3(1/3)lg2 = 0,301, H = 0,476.
$\eta = H/I$ = 0,631 , $\sigma = S/I$ = 0,369 . (соотношение η/σ = 60:40)

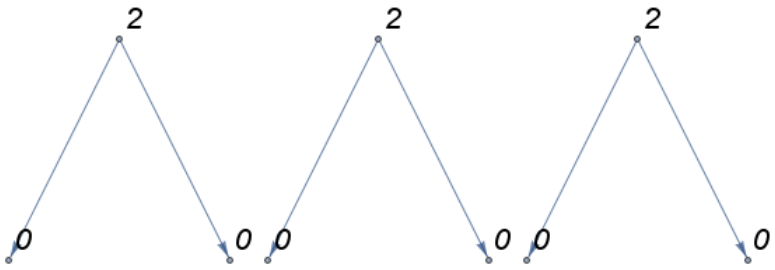

Fig.6

Система на Fig.7 :
M = 12, $m_1 = m_2 = 3$, $m_3 = 6$.
I = lg 12 = 1,0792 , S = 2(1/4)lg3 + (1/2)lg6 = 0,6276 , H = 0,4516 .
$\eta = H/I$ = 0,4185 , $\sigma = S/I$ = 0,5815 . (соотношение η/σ = 40:60)

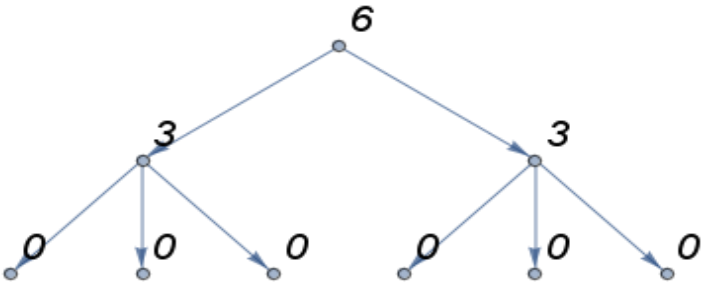

Fig.7

Соотношение η/σ для **Fig.6-7** меняется на противоположное: синергия (порядок) растет, энтропия (беспорядок) падает.

Подобными схемами представляются простые древовидные иерархии, сложным иерархическим (архетипическим) сетям будет посвящено отдельное исследование.

Заключение.

Сложными сетями моделируются различные большие системы, но только потоки в сетях или взвешенные узлы позволяют вскрыть истинную природу моделируемого объекта. Не только количество связей в социальной сети, а мощность информационных потоков. Не просто органиграмма предприятия, а истинная власть, представленная ее взвешенными узлами.

Предложенный, на основе синергической теории информации, метод оценки сложности сетей позволяет получить эффективные и наглядные результаты, открывает новые перспективы в изучении сложных сетей.

1. Вяткин В.Б. К вопросу взаимосвязи комбинаторного, вероятностного и синергетического подходов к определению количества информации.

2. Вяткин В.Б. Синергетическая теория информации: пояснения и терминологические замечания.

3. Вяткин В.Б. Хаос и порядок дискретных систем в свете синергетической теории информации.
4. Yang-Yu Liu, Jean-Jacques Slotine & Albert-Laszlo Barabasi. Controllability of complex networks. (перевод на русский)
5. Евгений Седов. Информационно-энтропийные свойства социальных систем.