Денис Клещев

Что субъективно, а что объективно: гармония математики или математика гармонии?

Математика лишилась своей истинности. Ныне она уже не является независимой, абсолютно надежной и прочно обоснованной…

Моррис Клайн.
«Математика. Утрата определенности»

Наука — с точки зрения обывательской, а не философской — отождествляется с абсолютным знанием истины. Такой взгляд на науку характерен не только для обывателей. Зачастую истину с наукой отождествляют даже те, кто непосредственно занимается наукой. В результате такого догматического восприятия происходит утрата способности к различению: *знание* становится безразлично к *незнанию* и перестает отвечать критериям истинности, то есть критериям непротиворечивости.

Именно это произошло с математикой в XX веке: в ней были обнаружены фундаментальные проблемы неразрешимости, такие как теорема Курта Геделя о неполноте структурных элементов языка математики для доказательства непротиворечивости ее оснований. В результате таких открытий, потрясших математическую науку, математики отказались от философских размышлений, от исторических изысканий, от эмпирической концепции, согласно которой математические законы столь же объективны, как законы естествознания. В школе формализма возникло устойчивое представление о том, что математика — это особый род деятельности человеческого ума, полностью субъективная область знаний, зависящая только от человеческого интеллекта.

Математики решили, что раз невозможно доказать непротиворечивость их науки, то они будут просто пользоваться существующим языком, ничего по существу не меняя, не пытаясь *перепроверить* привычные «*символы веры*». Они договорились не заострять внимания на трудностях, игнорировать любые противоречия, которые невозможно исключить введением дополнительных аксиом. Таким образом, математическое *знание* стало безразлично к *незнанию* — вот, в чем главная причина кризиса, описанного Моррисом Клайном в его книге «Математика. Утрата определенности».

Собственно, именно к этой книге Морриса Клайна нас отсылает А.П.Стахов, когда перечисляет целый ряд стратегических ошибок в развитии математики.[1] В наши дни объективное состояние математической науки далеко от идеального. На самом деле среди математиков нет даже единого представления о том, *что такое математика*: школы формализма, логицизма, интуиционизма, конструктивизма, конвенционизма и возникшие в последние десятилетия постмодернистские концепции дают разные, порой, диаметрально противоположные определения математики.

Гармония математики — это миф, остаточный образ, который существует только на обывательском уровне. В общественном сознании до сих пор продолжают жить афоризмы о том, что «*математика — царица всех наук*», «*математика — образец истинности*» и тому подобное. Некоторые даже верят в эти афоризмы, но такая вера — субъективное явление, ее нельзя ни запретить, ни доказать реальными фактами. Действительное

[1] Стахов А.П. Стратегические ошибки в развитии математики и роль Математики Гармонии в современной науке // De Lapide Philosophorum. № III (011), 2017. С.2-73

положение дел не позволяет называть современную математику «*образцом истинности*». Противоречия стали преследовать математиков с тех самых пор, как они погрузились в решение чисто символических, абстрактных проблем, не связанных с явлениями внешнего мира. Отход математики от естествознания А.П.Стахов называет «*крупнейшей стратегической ошибкой*»,[2] но важно понимать, что эта стратегическая ошибка была допущена математиками сознательно!

Выдающийся математик В.И.Арнольд неоднократно подчеркивал, что в мировой науке существует так называемая «*мафия левополушарных математиков*», исключающих из образования развитие пространственно-математического мышления. Вся содержательная сущность математики теперь подменяется манипуляциями, которые нельзя применять ни в какой другой науке. Другой выдающийся математик Ю.И.Манин в дискуссии с В.И.Арнольдом откровенно признался, для чего это делается: основная задача постмодернистской математики вовсе «*не в том, чтобы, как думают некоторые, ускорять прогресс человечества, а в том, чтобы этот прогресс всемерно тормозить*».[3] Иначе говоря, интеллектуальные силы лучших математиков преднамеренно бросаются на бесцельные «*игры разума*». Причем это делается сознательно, на высшем уровне управления человеческой цивилизацией, чтобы математику не использовали для осмысления окружающей действительности и тех рукотворных кризисов, с помощью которых удается «*цивилизованно*» порабощать целые народы.

Другой стратегической ошибкой, как пишет А.П.Стахов, является то, что в качестве фундамента для всей математической науки была выбрана теория множеств. Введение в математику теории бесконечных множеств Георга Кантора А.П.Стахов называет «*величайшей математической мистификацией XIX века*»,[4] и это — не частное мнение одного отдельного специалиста. В некоторых положениях теории Георга Кантора сомневались великие математики и логики (Кронекер, Виттгенштейн, Пуанкаре, Брауэр). Для борьбы с многочисленными парадоксами теории множеств потребовались невероятные интеллектуальные усилия самых незаурядных умов.

Так, были разработаны ограничительные аксиомы Цермело-Френкеля, затем была создана *металогика*, с помощью которой планировали доказать континуум-гипотезу Кантора. В первой половине XX века математики еще помнили о том, что без этого доказательства теряется первоначальный смысл создания теории множеств. Затем лучшие математические умы были собраны в тайный клуб — *Ассоциацию колаборантов Николя Бурбаки*, ставший законодателем «*математической моды*». Но конкретным результатом всей этой колоссальной работы оказалось доказательство Поля Коэна, полученное в 1963 году, согласно которому ни континуум-гипотеза, ни теорема Цермело об упорядочении любого множества не зависят от системы аксиом теории множеств.

В любой другой науке это бы уже привело к переосмыслению теории, и такие попытки переосмысления, действительно, возникали, однако они жестко подавлялись. В качестве примера достаточно рассмотреть работы Александра Зенкина,[5] критиковавшего «*диагональный метод*», использованный Кантором для доказательства «*несчетности*» множества всех действительных чисел, по сути, для обоснования «*актуальной бесконечности*». Или исследования Валдиса Эгле, основоположника Веданской теории, который более 32 лет последовательно призывал к ответственности математиков, продолжающих верить в «*непогрешимость*» теории множеств, и в конце концов пришел к выводу о том, что в современной математике «*Мы имеем дело не с учеными, а с бандой негодяев!*».[6] Были и другие скептики, такие, как создатель школы интуиционизма Лейтзен Брауэр, назвавший теорию множеств «*патологическим казусом*», но их взгляды методично зачищаются в информационном поле, чтобы продолжал господствовать миф об абсолютной истинности выбранного в XX веке подхода к математике и к самой истории ее появления.

Неслучайно А.П.Стахов обращается в своей статье именно к истории математики, предлагая разобраться с теми фундаментальными проблемами, которые привели к возникновению математической науки. В связи с этим он пишет, что помимо «*проблемы счета*» и «*проблемы измерения*», из которых А.Н.Колмогоров в своем очерке вывел основные математические разделы,[7] на появление математики как науки существенное влияние оказала «*проблема гармонии*». Именно поиск гармонии чисел стимулировал появление и развитие математики в Пифагорейском братстве, привел к появлению теории правильных многогранников или Платоновых тел, а

---

[2] Стахов А.П. Стратегические ошибки в развитии математики и роль Математики Гармонии в современной науке // De Lapide Philosophorum. № III (011), 2017. С.9

[3] Арнольд В.И. Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник Российской Академии Наук. Т.72, №3, 2002. С.245-250

[4] Стахов А.П. Стратегические ошибки в развитии математики и роль Математики Гармонии в современной науке // De Lapide Philosophorum. № III (011), 2017. С.17

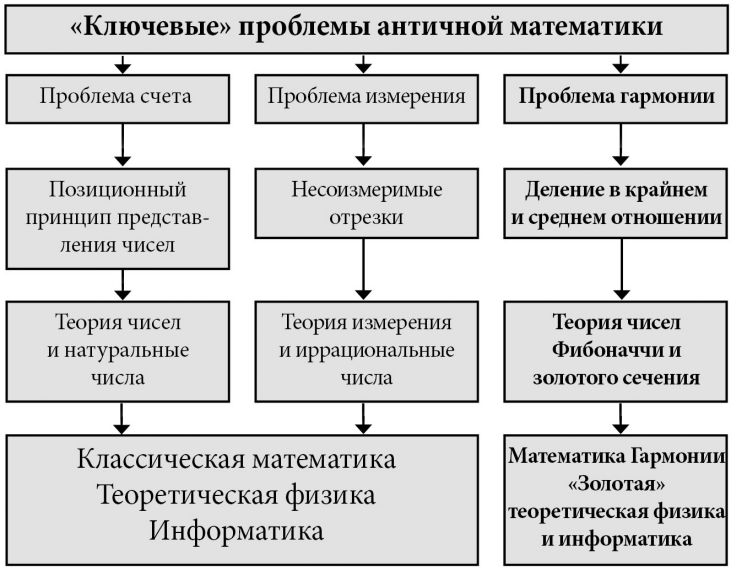
[5] Зенкин А.А. Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000, №2, С.165-168

[6] Ипатьева М. Лженаука в математике // Альманах «Мысли об истине». Вып. 5, 2013. С.4

[7] Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М., 1991.

также был одним из мотивов появления Евклидовой геометрии. Поскольку заключительная XIII книга «Начал» Евклида посвящена как раз изложению теории Платоновых тел — первоэлементов, из которых по античным воззрениям сотворен космос, то изначальной целью трактата было описание такой геометрии, которая, по словам Прокла Диадоха, «*в целом занята мировыми телами*».[8] О том же говорит в своих комментариях к «Началам» Евклида и Д.Д.Мордухай-Болтовский: «*Тщательный анализ "Начал" меня решительно убеждает, что построение правильных тел, и еще более — доказательство существования пяти и только пяти тел — представляло некогда, еще до Евклида, конечную цель того труда, из которого произошли "Начала"*».[9]

Но в наши дни, когда говорят о геометрии Евклида, уже никто не связывает ее возникновение с теорией Платоновых тел, а значит, мы имеем дело с попыткой фальсификации истории математики, из которой была исключена «*проблема гармонии*», сыгравшая ключевую роль в возникновении математики и науки как таковой. А если учесть, что «*золотое сечение*» и Платоновы тела не раз возникали в истории науки при переходе от одной парадигмы к другой (та же планетарная «*Harmonices Mundi*» Иоганна Кеплера) и вновь проявила себя в необычных свойствах графена и квазикристаллов, то можно лишь подтвердить вывод А.П.Стахова о том, что «*пренебрежение "золотым сечением" и идеей Гармонии — еще одна "стратегическая ошибка" не только математики, но и теоретической физики*».[10]



Взгляд на историю математики из статьи А.П.Стахова «Стратегические ошибки в развитии математики и роль Математики Гармонии в современной науке».

Несмотря на то, что каждый тезис, выдвигаемый А.П.Стаховым, подтвержден конкретными примерами, как всегда, нашлись критики, объявившие существование *математики гармонии*, имеющей свои особенности, отличительные черты, способствующие переходу систем из состояния динамического хаоса к динамическому порядку, лишь продуктом фантазии автора… Но почему-то никто не набрасывается на выражение «*геометрия фракталов*», ни один языковед не критикует название таких дисциплин, как «*теория групп*», «*теория чисел*», «*теория струн*» в физике. Любое направление, выделяемое в особую область исследований, получает условное название, смысл которого не сводится к смысловым значениям отдельных слов, входящих в него. Тем, кому не интересны фракталы, не поймут, к чему изучать особенности их геометрии, кому не интересны натуральные числа, не поймут, зачем для их изучения была создана целая теория. Кому не интересен феномен гармонии, не поймут, для чего отдельно говорить об ее математических свойствах.

По-видимому, сам термин *математика гармонии* вызывает у таких лиц глубокую реакцию отторжения, привычнее для них звучат словосочетания «*гармония математики*» или «*математическая гармония*». Но, как уже говорилось выше, ни о какой *гармонии* в современной математике не может быть и речи. Субъективной фантазией является как раз представление о том, что стандартные математические символы и спекулятивные

[8] Прокл. Комментарий к Первой книге «Начал» Евклида. Введение. М., 1994. С.171

[9] Начала Евклида / Пер. с греч. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского, ред. уч. М.Я. Выгодского, И.П. Веселовского. Москва-Ленинград, ТIII, 1950. С.309

[10] Стахов А.П. Стратегические ошибки в развитии математики и роль Математики Гармонии в современной науке // De Lapide Philosophorum. № III (011), 2017. С.12

операции с ними слагают некую единую «*истинную*» математику. В нынешней математике нет ни единства, ни истинности, если под «*истинностью*» мы будем понимать непротиворечивость ее оснований.

Что касается термина «*математика гармонии*», то он как раз очень четко отражает аспекты, на которых акцентирует внимание А.П.Стахов. Действительно, несмотря на кризисное состояние *оснований математики*, всегда существовала и существует особая область, связывающая основания математики с явлениями природы, связывающая элементарные разделы математики с высшими ее разделами. Такой областью, как ни странно, выступает именно ключевая «*проблема гармонии*». Более того, именно «*проблема гармонии*» связывает между собой «*проблему измерения*» и «*проблему счета*», она является первичной по отношению к ним и, возможно, выступает первичной проблемой, оказавшей решающее влияние на появление самого человеческого разума.

Если мы будем говорить о такой гармонии — о самой способности нашего интеллекта устанавливать *связь*, *согласие*, *сочетание*, находить различные *комбинации*,[11] то здесь А.П.Стахов высказывает очень ценное и рациональное предложение. Он настаивает на том, что в системе образования должны присутствовать элементы *математики гармонии*.[12] Важно еще раз подчеркнуть: не элементы субъективной «*математической гармонии*», которые внушали бы миф об абсолютной истинности современной математической науки, а именно элементы *математики гармонии*. Они прекрасно развивают пространственное мышление, наблюдательность, эстетическое восприятие, интерес к истории, они будут полезны как «*физикам*», так «*лирикам*».

Когда в педагогическом сообществе обсуждают тревожные сигналы, свидетельствующие о том, что у подрастающего поколения в современном «*информационном пространстве*» происходит частичная или полная утрата духовно-нравственных и культурно-исторических ориентиров, никто почему-то не связывает подобные деструктивные, разрушающие личность явления с той научной парадигмой, которая к этим явлениям привела и которая формирует информационное поле «*общепризнанности*».

Именно наука, исключившая из своих оснований якобы устаревшую «*проблему гармонии*», отбросившая из картины мира такие явления как красота и сознание, создала поистине чудовищный, не имеющий права на существование мир. Именно наука, в которой была обесчеловечена и доведена до абсурда математика, создала столь же бесчеловечное и противоречивое по своей сути общество «*двойных стандартов*», когда человек и вся планета Земля рассматриваются лишь как *механизм* глобальной системы потребления, включая потребление информации. В результате современная *пост-наука* сформировала соответствующий ей тип *пост-человека* — «*цивилизованного варвара*», пользующегося всеми последними достижениями цивилизации, но несущего в себе только разрушительный потенциал и агрессию.

Критиковать А.П.Стахова за термин «*математика гармонии*», за исследования глубинных структурных процессов научных революций, о которых говорит Томас Кун в своей книге «Структура научных революций», о которых писал Моррис Клайн, излагая кризисные явления современной математики, может лишь человек либо мало знакомый с историей и философией математики, либо специалист узкого профиля, никогда не размышлявший над тем, что такое *гармония*, не чувствующий или не знающий, насколько широко может трактоваться это понятие, не укладывающееся в рамки какой-то одной дисциплины или науки.

Редакция и все авторы выпуска журнала «De Lapide Philosophorum» от 1 марта 2017 года, в котором была опубликована статья А.П.Стахова, отметили, что весь номер получился очень интересным. Однако неутомимым критикам показалось мало обвинить А.П.Стахова в том, что он изложил свои взгляды на страницах журнала, эти китики стали составлять и публиковать «*списки*» тех, кто разделяет те или иные взгляды А.П.Стахова. Досталось, разумеется, и редактору — автору этой статьи. Критикам явно не понравилось название журнала «De Lapide Philosophorum», что с латыни переводится как «Философский камень» или «О философском камне». При выборе данного названия, конечно же, учитывалось возникновение различных аллюзий, поскольку одно из направлений публикаций связано с психоанализом Карла Густава Юнга, заметившего взаимосвязь аллегорий средневековых алхимиков с процессами, протекающими в сознании человека и в коллективном бессознательном.

Но для всех, кто достаточно хорошо знаком с историей математики, название журнала, где публикуются различные исследования на тему «*золотого сечения*», конечно же, напомнит высказывание Иоганна Кеплера: «*В геометрии существует два сокровища — теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем*». Так

---

[11] Стахов А.П. Стратегические ошибки в развитии математики и роль Математики Гармонии в современной науке // De Lapide Philosophorum. № III (011), 2017. С.36-37

[12] Стахов А.П. Стратегические ошибки в развитии математики и роль Математики Гармонии в современной науке // De Lapide Philosophorum. № III (011), 2017. С.72-73

что не надо никого пугать «*злостными алхимиками*» из журнала «De Lapide Philosophorum». В журнале вовсе не предлагается искать способы получения искусственного золота из ртути. Подумать такое о философском журнале может только далекий от любых философских размышлений обыватель, который до сих пор не знает, что в Израиле уже давно производят искусственное золото, полезные свойства которого превосходят свойства натурального. Этот факт сам по себе очень наглядно демонстрирует выводы Томаса Куна о структуре научных революций, когда идеи и теории, выходящие за рамки существующей *научной парадигмы*, в том или ином виде реализуются на более высоком уровне научных знаний и технических возможностей.

При этом в журнале публикуются очень разные авторы, их представления совсем не обязательно должны совпадать. Непонятно, откуда у критиков берутся такие претензии судить всех и каждого: А.П.Стахова — за *математику гармонии*, а редактора «De Lapide Philosophorum» — за приверженность взглядам Лейтзена Брауэра и несогласие с методом *ad absurdum* в доказательстве теоремы Гиппаса о несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. Для такой «*тотальной критики*» надо быть как минимум старшим научным сотрудником Института математики или даже академиком РАН. Но вот в чем беда, любой профессиональный математик (в отличие от постоянных критиков А.П.Стахова), прекрасно понимает, что нестандартные идеи интуиционистов тоже имеют право на существование.

Голландский математик Лейтзен Брауэр известен, прежде всего, тем, что он отверг саму возможность применения закона исключенного третьего к бесконечным множествам. Другими словами, в интуиционистской логике некорректно уже само утверждение, что «*если доказано, что не все элементы бесконечного множества целых чисел четны, то… среди них существует по крайней мере одно нечетное целое число*».[13] Доказательство теоремы Гиппаса зиждется как раз на таком грубом и некорректном посыле, в нем не учитывается даже само существование бесконечных десятичных дробей (античные математики их не знали)! Все это представляет большой интерес для историка математики, ведь при помощи такой некорректной манипуляции принципом *tertium non datur* возникла нынешняя теория действительных чисел, содержащая внутренние противоречия.

Несоизмеримость (то есть иррациональность) таких чисел, как квадратный корень из двух, означает, что возвышение его в квадрат всегда дает «*иррациональное число*»: $1{,}414\ldots^2 = 1{,}(9)$. Но периодическая десятичная дробь $1{,}(9)$ по определению должна быть рациональным числом. Математики не могли обойти столь неудобное для них обстоятельство и ввели в теорию действительных чисел исключение из правил, выполняющее, по сути, функцию скрытой аксиомы (см. Приложение 1 к статье): «*Любая бесконечная периодическая дробь с периодом, отличным от 9, является рациональным числом*».[14]. Если число 2 — рационально, а $1{,}(9)$ — уже не является рациональным, то как понимать привычный математический «*символ веры*» $2 = 1{,}(9)$? Рациональное число — не является рациональным? Если это — не арифметическое противоречие, то что тогда считать противоречием?

Никто не может запретить веру в абсолютную «*истинность*» стандартной математики, утверждающей, будто могут существовать «*обычные периодические десятичные дроби*» и дроби с периодом (9), которые не являются рациональными числами. Разумеется, большая часть обывателей будет верить всему, что написано в учебниках. Но слепая вера в абсурд не добавляет истинности, напротив, она красноречиво свидетельствует, что *гармония математики* — очень субъективное представление, в которое можно верить, а можно не верить.

А существует ли *математика гармонии*? Оказывается, да — она существует независимо от дискуссий между различными математическими школами, она существовала на протяжении всей истории независимо от уровня научных знаний, потому что в объективной реальности существуют квазикристаллы, биологические формы жизни, в которых ярко проявляется феномен гармонии, например, *филлотаксис* в растительном мире. Неоспоримым фактом является то, что самой природой для передачи важнейшей информации о развитии и строении тел живых организмов был выбран «*код Фибоначчи*». Верифицируемость органов, построенных по принципам «*золотой пропорции*», позволяет нивелировать случайные мутации и патологические отклонения на протяжении миллиардов лет эволюции того или иного вида. Можно сказать, без *математики гармонии* было бы невозможно столь устойчивое существование биологических форм на Земле.

Математика гармонии — как бы ее ни называли в древности или в наши дни — вовсе не плод фантазии отдельного человека или группы лиц, это как раз вполне объективное явление, которое А.П.Стахов предлагает изучать как междисциплинарный феномен. Такое возвращение в основания математики «*проблемы гармонии*», безусловно, будет способствовать выходу из глубочайшего кризиса, описанного Моррисом Клайном еще более тридцати лет назад и в котором до сих пор пребывает математическая наука.

---

[13] Клайн М. Математики. Утрата определенности. М., 1984. С.275

[14] Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. Алгебра и элементарные функции. Ч.I. М., 1966. С.85

Страница из учебника «Алгебра и элементарные функции» Е.С.Кочеткова, Е.С.Кочетковой (1966).

```
5 | 16          1 | 3           29 | 110
50 0,3125        10 0,3333...     290 0,26363...
48                9               220
 20               10               700
 16                9               660
  40               10               400
  32                9               330
   80               10               700
                                     660
                                      400
                                      330
                                       70
```

Поэтому

$\frac{5}{16} = 0{,}3125$ (конечная десятичная дробь);

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ (бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 3);

$\frac{29}{110} = 0{,}26363\ldots$ (бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 63).

Период начинается либо сразу же после запятой (например, 0,333...), либо после нескольких десятичных знаков, не входящих в период (например, 0,26363...). Соответственно этому все периодические десятичные дроби разделяются на *простые* (такие, как 0,333...) и *смешанные* (такие, как 0,26363...).

Период бесконечной десятичной дроби, которая получается в результате деления целых чисел „уголком", может быть любым натуральным числом; исключается лишь случай, когда он составлен из одних девяток. (На строгом доказательстве этого факта мы останавливаться не будем.) Отметим еще, что любую конечную десятичную дробь можно рассматривать как бесконечную периодическую дробь с периодом 0. Например,

$$0{,}37 = 0{,}370000\ \ldots$$
$$6{,}14 = 6{,}140000\ \ldots$$

и т. д. Таким образом, ***любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, период которой отличен от 9.***

Верно и обратное утверждение: ***любая бесконечная периодическая дробь с периодом, отличным от 9, является рациональным числом.***

Строго доказывать это мы также не будем. Напомним лишь известные из арифметики правила обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные. Для простоты мы предположим, что все рассматриваемые нами десятичные дроби положительны и меньше единицы.

P.S. Разумеется, во всех современных учебниках и пособиях вы уже не найдете ни толкового изложения правил перевода десятичных дробей в обыкновенные, ни подобных подозрительных «*исключений*» из правил. Так что поколение математиков, которое сейчас приходит в науку, просто не знает, как переводить составные десятичные дроби в обыкновенные (это не шутка, а действительный случай). Однако все они продолжают «*свято верить*» в то, что понимают, какие числа являются рациональными, а какие не являются…