Дуализм «двух сокровищ геометрии»: теоремы Пифагора и золотого сечения

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

В работе представлены структурно-образующие модели, общие для теоремы Пифагора и золотого сечения. Ввиду простых и одновременно уникальных свойств, Иоганн Кеплер охарактеризовал эти математические объекты как «два сокровища геометрии». Такими объединяющими подосновами являются рекуррентные числовые последовательности, треугольники специального вида и др.
В частности, выделен равнобедренный треугольник, стороны которого соотносятся как периметр к их сумме. Решений здесь всего два: корень квадратный из двух и константа золотого сечения. Первое число символизирует квадрат и далее кубическую решетку. Второе, в своих различных проявлениях, больше тяготеет к биологическим и зоологическим объектам. Их единение в одной модели позволяет высказать предположение об особой роли и дуализме в структурировании живых и неживых материальных тел с одинаковым "строительным" алгоритмом формирования массы.

Оглавление

Введение 1
Золотое сечение в творчестве В. Зубова 2
"Симбиоз" двух сокровищ 3
Задача на разрезание 4
Числовое тождество 5
Алгоритм Рассела 5
Парно-дуальные ПИС-триномы 6
Модельные структуры пропорционального роста 9
Квадратные уравнения 9
Золотое сечение и √2 в равнобедренном треугольнике 10
Треугольник Кеплера 11
Нематематическая "мета"-суета 13
Зри в корень 14
Пифагоровы тройки 15
Пифагорово прочтение золотого сечения 16
Вместо заключения 17
Литература 18

Сокровище – то, что ищут долго и далеко, а оно валяется под ногами. Так оно прячется. *Р. Алеев*

Введение

В основу настоящей статьи положена наша работа [1]. Специально для АТ подготовлена обновленная версия с дополнением и рассмотрением новых результатов.

Название работы о «двух сокровищах геометрии» восходит к замечательному астроному Иоганну Кеплеру. Таким возвышенным слогом он характеризовал теорему Пифагора и модель золотого сечения (ЗС).

Но что характерно, в творчестве ортодоксов-приверженцев золотоносной тематики выдающийся ученый "воспроизводится", небрежно, как походя.

То и дело всплывают вольные искажения-инсинуации.

Наиболее точно отображает великого ученого средневековья в своем научном творчестве искусствовед и философ В. Зубов, вошедший в историю гуманитарной науки как «русский Леонардо». Именно он в своё время точно отмечал «*ненаучную точку зрения* автора (М. Гика), согласно которой формы природы и формы искусства <якобы> тождественны и подчиняются общим метафизическим законам числа и пропорций» [2].

Немецкий писатель-романист А. Шамиссо с восхищением сравнивал теорему Пифагора с истинным знанием (1836). Один из переводов его сонетов на русский язык начинается так: «Пребудет вечной истина, как скоро её познает слабый человек! И ныне теорема Пифагора верна, как и в его далекий век» (1836).

Золотое сечение в творчестве В. Зубова

Наиболее полно проблематика ЗС раскрыта в докторской диссертации В. Зубова «Архитектурная теория Альберти» (1946). Данную тему "реставрировал" и прекрасно описал В. Белянин – педантичный приверженец историзма в области математики.

Разбираясь в противоречивых мнениях по истории термина «золотое сечение», В. Зубов приводит оригинальный текст высказывания Кеплера: «*Существует два сокровища в геометрии: одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении. Из первой вытекает построение куба, пирамиды и октаэдра, а из второго – построение додекаэдра и икосаэдра. Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны… первую, гласящую, что стороны прямоугольника, будучи возведены в степень, равны квадрату линии, противолежащей прямому углу, – эту теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако без первой ничего не стоит*». – J. Kepler, Mysterium Cosmographicum, 1596.

Далее читаем: «*Этот малоизвестный и, насколько я знаю, не переводившийся на русский язык текст важен во многих отношениях. Он не только с очевидностью показывает, что термин "золотое сечение" не принадлежит Кеплеру и что, по Кеплеру, "золотое сечение" следовало бы, скорее, назвать "алмазным"*» (курсив наш – *С.Л.*).

Между тем, во всех публикациях «гармонистов-золотоискателей» (А. Стахов, Г. Мартыненко и др.) приводится затасканная до неприличия ложная "цитата", причем без какой-либо ссылки на источник: «*В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем*». – В искаженной интерпретации некоего американского математика.

Например, крупнейший геометр 20 века Г. Коксетер тоже дает несколько вольное изложение Кеплера [3, с. 236]. Но делает это весьма корректно: без прямого цитирования и со ссылкой на источник, – Kepler J. Gesammelte Werke, Munchen: C.H. Beck, 1938.

До сих пор, кроме В. Зубова, никто из авторов-гармонистов, с их гипертрофированной претензией на исторические линии, не удосужился заглянуть в труды Кеплера.

В итоге перекроенная фраза Кеплера стала со временем такой же смехотворной нелепостью, как и утверждение, что термин "золотое сечение" придумал то ли Птолемей, то ли Леонардо да Винчи.

Действительно, «многие современные книги на тему золотого сечения пестрят произвольными умозрительными допущениями и не имеют никакого отношения к науке, разве что близки к жанру научно-фантастической журналистики» (В. Белянин), например:

– «Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно Леонардо да Винчи был одним из первых, кто ввел сам термин "золотое сечение" (?)». – А. Стахов, «Код да Винчи и ряды Фибоначчи»;

– «Термин "золотое сечение" (aurea sectio) идет от Клавдия Птолемея, который дал это название числу 0,618 (?)… Закрепился же данный термин и стал популярным благодаря Леонардо да Винчи, который часто его использовал». – Э. Сороко, «Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем».

На это счет нет никаких исторических фактов. Одни лишь выдумки-фантазии или "золотой лохотрон" (А. Чернов), дабы украсить собственные творения старинным налетом таинственности и античной мудрости. Вроде как их работы питаются соками-корнями древности, под соусом которых исподволь "протаскивается" любая ересь: множество золотых констант-сечений или иной подобный вздор.

Надо сказать, "гармонисты" в своем грубом искажении не одиноки: «Такое деление (точкой С) Пифагор называл *золотым делением*, или *золотой пропорцией,* а Леонардо да Винчи – общепринятым сейчас термином *золотое сечение*» [4, с. 12]. – Такой откровенный абсурд писал доктор философии Ю. Урманцев. Кстати, нужно признать, хороший ученый в своей области – общей теории систем. Только вот с отдаленным прошлым нелады.

Сегодня точно известно, что «термин "золотое сечение" вошел в употребление лишь в девятнадцатом веке» [5, гл. 23]. Первое терминологическое упоминание *goldener schnitt* соотносится с немецким математиком Мартином Омом (1835) – братом физика Г. Ома.

В 1875 г. данное словообразование впервые попадает в восьмое (!) издание Британники – наиболее полная и старейшая универсальная энциклопедия на английском языке (печатается с 1771 г.), хотя в предыдущих семи его нет.

В 1906 г. публикуется перевод книги другого немецкого математика А. Шустера [6], где в разделе «Квадратный корень» говорится: «*Решенная выше задача называется задачей о «золотом сечении» (sectio aurea)*». – Именно с данной книги или других близких по времени работ термин "золотое сечение" утверждается в русской литературе.

Что касается непомерной фетишизации ЗС или его вездесущности-присутствия, то В. Зубов в седьмой главе своей диссертации отмечал:

«*"Золотые отношения" – побочный результат геометрических построений, следствие, а не причина... Наконец, эмпирическая констатация "золотых отношений" путем обмеров ничего не дает и ничего не доказывает, прежде всего, поскольку она всегда уже является плодом известного теоретизирования, известной интерпретации сырых цифр, их "пригонки" друг к другу*».

Не случайно, на спаде архитектурно-золотоносного бума в марте 1948 на «активе зодчих столицы» акцентировалось внимание, что отдельные архитекторы *«питаются псевдонаучной теорией о всемогуществе пресловутого "золотого сечения", теорией о существовании ... неких "вечных" канонов красоты и гармонии... Этой идеалистической шелухой засоряют головы нашей архитектурной молодежи»*. – Если ЗС как-то и соотносится с мерилом красоты-гармонии, то должно, конечно, использоваться в меру.

"Симбиоз" двух сокровищ

По образному сравнению Кеплера теорема о пропорциональном (золотом) сечении прекрасна, но без теоремы Пифагора «ничего не стоит».

Не будем столь категоричны.

Ибо, в отличие от геометрических закономерностей в прямоугольном треугольнике, золотая пропорция имеет более широкое толкование, выходящее далеко за пределы планиметрии [7]. – Это к слову...

Напротив, нас интересует единение этих замечательных математических структур.

В качестве идеального прообраза теоремы Пифагора выберем наиболее древнюю форму – квадрат с единичными катетами и диагональю, равной корню квадратному из двух.

Именно эта фигура в свое время положила начало перевороту в сознании античных ученых в связи с открытием несоизмеримых геометрических отрезков.

Возникло *нечто*, невыражаемое с помощью привычных натуральных чисел. То есть, геометрически *оно* есть, как диагональ квадрата 1×1, но арифметически – нет.

В конечном итоге это привело к развитию нового исчисления и разработке теории иррациональных чисел, которые не представимы в виде отношения целых чисел.

Таким образом, наша задача несколько сужается и сводится к поиску общих оснований-истоков двух констант $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ и $\sqrt{2}$ или математических моделей, связывающих (интегрирующих) эти алгебраические числа. Как положительные корни простых уравнений

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ и } x^2 - 2 = 0.$$

В некотором смысле квадратные уравнения являются первой структурой, объединяющей две фундаментальные математические константы.

Надо сказать, иррациональность буквально приводила в гипнотический шок древнегреческих ученых, которые самозабвенно исповедовали арифметику целых чисел:

– «число есть множество, которое может быть измерено единицей», Аристотель, "Метафизика";

– «число же – множество, составленное из единиц», Евклид, "Начала", 7 книга.

Да, и не мудрено. Действительно, трудно себе вообразить-представить, что вычерченные перед глазами отрезки не имеют общей меры длины!

Однако продолжим...

Задача на разрезание

Хорошо известны следующие геометрические задачи на разрезание.

1. Отношение сторон прямоугольника $1\times\sqrt{2}$ таково, что при его разрезании пополам параллельно короткой стороне получатся две уменьшенные фигуры той же пропорции.

Указанное свойство, в частности, используется в качестве пропорции для формата бумаги в международном стандарте ISO 216 (URL: en.wikipedia.org/wiki/ISO_216).

2. Прямоугольник $1\times\Phi$ часто называют золотым. Если от него отрезать квадрат, сторона которого равна меньшей стороне исходной фигуры, то оставшийся прямоугольник является уменьшенной копией исходного, то есть ему подобен.

Такие процессы разрезания можно продолжать до бесконечности. «Тем самым будет построен пример совершенного квадрируемого прямоугольника бесконечного порядка» [5].

Вершины получаемых золотых прямоугольников лежат на пересечении диагоналей первого и второго прямоугольника.

Таким образом, золотой прямоугольник составлен из квадрата и своей уменьшенной в Φ раз копии. В этом просматривается связь теоремы Пифагора с золотым сечением и конкретно связь констант Φ и $\sqrt{2}$ (рис. 1).

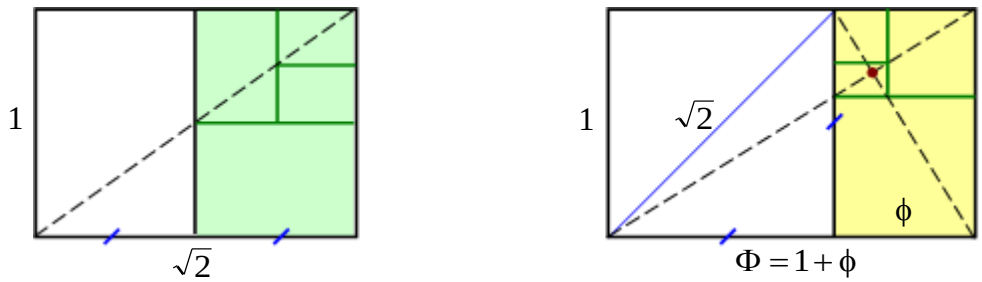


Рис. 1. Разрезание прямоугольников с образованием эквивалентных фигур

Числовое тождество

Запишем два очевидных равенства: $\Phi^2 = 1 + \Phi = 2 + \phi$ и $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Вычтя их одно из другого, получим числовое тождество $\left(\Phi - \sqrt{2}\right)\left(\Phi + \sqrt{2}\right) = \phi$, где $\phi = \Phi^{-1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$.

Как говорится, ничего необычного, но всё же...

Алгоритм Рассела

В работах [8; 9; 10, гл. 24] описана любопытная модель формирования взаимосвязанной пары числовых рекуррентных последовательностей с особыми свойствами.

Алгоритм восходит к далекой поре древности [8]:

«Квадратный корень из 2 – первое из открытых иррациональных чисел – был известен ранним пифагорейцам, и были изобретены остроумные методы приближения к его значению. Наилучшими были следующие: образуйте два столбца чисел, которые мы будем называть a и b; каждый столбец начинается с единицы.

Каждое последующее a на каждой стадии образуется путем сложения уже полученных последних a и b. Последующее b образуется путем прибавления удвоенного предыдущего a к предыдущему b.

Так получаются первые 6 пар (1, 1), (2, 3), (5, 7), (12, 17), (29, 41), (70, 99).

Для каждой пары выражение $2a^2 - b^2$ будет равно 1 или -1.

Таким образом, b/a является почти квадратным корнем из 2 и с каждым новым шагом приближается к корню из 2».

По мнению В. Белянина «многократно замечено сначала двумя индийскими математиками в VII и XII веках, а затем в Европе: Ферма, Валлисом и другими…», что в общем случае данный алгоритм или "модель Рассела" сходится к аттрактору $\sqrt{k}$ – квадратному корню любого целого числа:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + k \cdot x_{n-1}, \\ x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases} \qquad \frac{y_n}{x_n} \Rightarrow \sqrt{k}.$$

Например, квадратные корни из двух и пяти образуются такими связанными рядами:

$$\frac{1}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{7}{5}\ \frac{17}{12}\ \frac{41}{29}\ \frac{99}{70}\ \frac{239}{169}\ \ldots \to \sqrt{2};$$

$$\frac{2}{1}\ \frac{7}{3}\ \frac{22}{10}\ \frac{72}{32}\ \frac{232}{104}\ \frac{752}{336}\ \frac{2432}{1088}\ \ldots \to \sqrt{5}.$$

Перемена местами коэффициента $k = 2$ в первой формуле приводит к формированию чисел Фибоначчи, сходящихся к константе золотого сечения:

$$\begin{cases} y_n = 2y_{n-1} + x_{n-1}, \\ x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases} \qquad \frac{y_n}{x_n} \Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Алгоритм дает соответственно четные a_n и нечетные b_n элементы чисел Фибоначчи:

$$\frac{1}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{8}{5}\ \frac{21}{13}\ \frac{55}{34}\ \frac{144}{89}\ \ldots \to \Phi.$$

На основании этого в работе [8] даже делаются выводы не только об «эволюционной связи двух математических констант – квадратного корня из двойки и золотого сечения», но также в целом об «эволюционном развитии нашей вселенной».

Представляется, здесь имеет место излишне эмоциональная и слишком завышенная оценка значимости описанного события.

Кстати довольно заурядного события, как частного случая общих представлений в данной области, например:

a) начальные условия (x_0, y_0) могут отличаться от единиц и представляться любыми вещественными числами;

b) коэффициенты в рекурсии не обязательно равны 1 или 2 и также могут выражаться произвольными действительными числами;

c) эти коэффициенты в общем случае различны и могут присутствовать одновременно в разных слагаемых рекурсии и др.

Итак, две пары рядов образованы в рамках одного и того же рекуррентного алгоритма, приближая нас к разным константам.

В определенной мере можно говорить о связи чисел Φ и $\sqrt{2}$ между собой.

В работах [10, 11] описанная система уравнений обобщена, и в частности, получены расширенные структуры для константы золотого сечения:

модель парно-золотых рекурсий

$$\begin{cases} y_n = (s+1)y_{n-1} + x_{n-1}, \\ x_n = s \cdot x_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases} \qquad \theta = \mathbf{\Phi}, \qquad \lambda = s + \mathbf{\Phi};$$

модель нечетных степеней ЗС

$$\begin{cases} y_n = k_m y_{n-1} + x_{n-1}, \\ x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \end{cases} \qquad \theta = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m+1}}, \quad \lambda = 1 + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m+1}},$$

модель четных степеней ЗС

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = k'_m y_{n-1} - x_{n-1}, \end{cases} \qquad \theta = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m}}, \qquad \lambda = 1 + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m}}.$$

где $k_m = L_{2m+1} + 1 \Rightarrow 2, 5, 12, 30, 77, 200 \ldots;$

$k'_m = L_{2m} + 1 \Rightarrow 3, 4, 8, 19, 48, 124 \ldots;$ $m = 0, 1, 2, \ldots;$

L_n – числа Люка или частная последовательность Фибоначчи с начальными условиями 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...;

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}; \qquad \theta = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}.$$

Парно-дуальные ПИС-триномы

В работе [11] изложены основы новой теории обобщения задач, приводящих к уникальной константе золотого сечения (ЗС). Впервые для ЗС используется аддитивная модель с внешними условиями в виде неоднородного уравнения, характерного для открытых систем. Показано, что трехзвенная аддитивно-рекурсивная модель $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + G^n$ также сходится к своему аттрактору ЗС, если $G \le \Phi$.

"Перебить" золотой аттрактор можно лишь такой функцией, возрастание которой происходит быстрее, чем Φ^n. Иначе говоря, аддитивная функция-добавка в классической модели Фибоначчи не должна расти со скоростью, превышающей скорость увеличения степенной функции Φ^n.

Кроме того, в статье [11] описаны новые конструкции: парно-дуальные ПИС-триномы. С периодически изменяемой структурой – ПИС.

Одни из них дают корень из двух, другие – константу золотого сечения.

Простейшая периодически изменяемая структура имеет вид пары рекурсий триномиального вида:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-q}, & n = 1 \pmod 2, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-p}, & n = 0 \pmod 2, \end{cases}$$

$(f_0,\ f_1, ...,\ f_{p-1}) = (0, 1, ..., 1)$ – начальные условия; n – дискретное время;
$p,\ q$ – параметры-индексы запаздывания, $n \ge p \ge q$.

То есть для нечетных элементов n (деление на 2 с остатком 1), суммирование происходит по первой строке-формуле, для четных элементов – по второй.

Вместо одного аттрактора, как это имело место для обычных рекуррентных последовательностей, теперь следует различать пару предельных отношений

$$(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}, \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}\right).$$

Эти величины при $q = 2$ разнятся между собой порядком следования в отношении: чет-нечет или нечет-чет и удовлетворяют общему равенству:

$$1 + \alpha = \alpha\beta.$$

Отсюда, в частности, следует, что предельное отношение двух элементов ряда, отстоящих друг от друга на две позиции (2-аттрактор), уже не зависит от четности индекса n, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-2}} = \alpha \cdot \beta.$$

1) Приняв запаздывания равными $p = 3,\ q = 2,$ приходим к модели "корня из двух".

Начальные значения ряда имеют вид:

0 1 1 2 3 5 7 12 17 29 41 70 99 169 239 408 577 985 1393 ...

Предельные отношения соседних членов числовой последовательности связаны с "корнем из двух". Два аттрактора, соответствующие четным и нечетным значениям последовательности, равны

$$\alpha = \sqrt{2} \approx 1{,}414; \qquad \beta = 1 + 1/\sqrt{2} \approx 1{,}707.$$

Характерны такие предельные аттракторы:

$$\frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{1}}} \to \sqrt{2}, \qquad \frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{2}}} \to 1+\sqrt{2}, \qquad \frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{3}}} \to 2+\sqrt{2}.$$

В то же время, независимо от четности-нечетности n, справедливо отношение:

$$\frac{f_n}{f_{n-2}} \quad \to \quad \alpha \cdot \beta \ = 1 + \sqrt{2} \ \approx \ 2{,}414 \, .$$

В целом можно сказать, что рассмотренный случай относится к «модели $\sqrt{2}$ ».

2) *Модель золотого сечения (периодическая структура)* описывается следующей парой уравнений, характеризующих периодически изменяемую структуру:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1 \,(\mathrm{mod}\ 2), \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-p}, & n = 0 \,(\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

При $p = 4$ образуется следующий ряд:

0 1 **1** 1 **1** 2 **2** 4 **3** 7 **5** 12 **8** 20 **13** 33 **21** 54 **34** 88 **55** 143 **89** 232 **144** 376 **233**...

Здесь всё довольно просто.

На четных номерах-позициях расположены последовательные числа Фибоначчи.

Между ними находятся числа, которые на единицу меньше чисел Фибоначчи.

А вот при $p = 7$ формируемая последовательность уже не столь очевидна:

0 1 1 1 1 1 1 2 2 4 3 7 4 11 6 17 10 27 17 44 28 72 45 117 72 189 116 305 188 493 305 798 494 1292 799 2091 1292 3383 2090 5473 3382 8855 5473 1433 8856...

Или с измененными начальными условиями (*подчеркнуто*):

<u>0 1 2 3 4 5 6</u> 11 7 18 10 28 15 43 26 69 44 113 72 185 115 300 184 484 297 781 482 1263 782 2045 1266 3311 2047 5358 3310 8668 5355...

Примечательно, что все эти последовательности имеют аттракторы, непосредственно связанные с константой золотого сечения, а именно:

$$\alpha \ = \ \Phi^{-1} \ \approx \ 0{,}618; \qquad \beta \ = \ 1 + \Phi = \Phi^2 \ \approx \ 2{,}618.$$

Их произведение равно Φ. Это означает, что независимо от четности-нечетности n, к данной последовательности справедливо отношение для 2-аттрактора:

$$\frac{f_n}{f_{n-2}} \ \to \ \Phi \, .$$

В теоретических исследованиях по золотому сечению это довольно нетривиальный результат. Ибо до сих мы привыкли видеть подобное соотношение для соседних членов чисел Фибоначчи F_n, то есть $F_n / F_{n-1} \ \to \ \Phi$.

На наш взгляд, второе уравнение образуемой модели

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1 \,(\mathrm{mod}\ 2), \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-7}, & n = 0 \,(\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

косвенно характеризует симметрию пятого порядка $(5 = 7 - 2)$, которая свойственна правильному пятиугольнику.

Данная симметрия "запрещена" в решетке кристаллов, но может присутствовать в квазикристаллах – искусственных сплавах, образуемых при чрезвычайно высокой скорости охлаждения нагретых расплавов: до миллиона градусов в секунду.

Модельные структуры пропорционального роста

В работе [12] исследованы модельные структуры пропорционального роста.

В качестве основы рассматривается целое, которое условно равно 1 и состоит из двух аддитивных частей $1 = a + b$.

В общем случае можно выделить два основных пути-варианта пропорционального роста: увеличение-наращивание целого на величину $\Delta = \{a,\ b\}$, равную одной из частей.

Анализ возможных вариантов составления пропорции с её решением относительно большей части b приводит к следующим положительным решениям:

модели ЗС:

$$\frac{1+b}{1} = \frac{1}{b} \quad \to \quad b^2 + b - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618\,; \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618\,;$$

$$\frac{1+b}{b} = \frac{b}{a} \quad \to \quad b^2 + b - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618\,; \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618\,;$$

корень из двух +1

$$\frac{1+b}{b} = \frac{b}{a} \quad \to \quad 2b^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,; \qquad \frac{b}{a} = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414\,;$$

гармоническая модель (по Архиту, 4 век до н.э.)

$$\frac{1+a}{1} = \frac{b}{a} \quad \to \quad b^2 - 4b + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586\,; \qquad \frac{b}{a} = \sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

Помимо этих структур есть также модель "две трети", но она выходит за рамки рассматриваемых структур.

Таким образом, в новых координатах развития золоте сечение пополнилось еще двумя моделями, основанными на иррациональном корне из двух.

Последнее воссоздает образ диагонали квадрата с единичной стороной. Той самой диагонали, которая долгие столетия не давала покоя многим поколениям ученых своей несоизмеримостью со стороной фигуры.

Данные модели синтезированы на основе одинакового принципа роста.

Они равноправны в выбранном классе моделей пропорционального роста, альтернативны и имеют следующую структуру

$$\frac{1'}{(1,\ b)} = \frac{(1,\ b)}{(b,\ a)},$$

где $1' = 1 + (a, b)$ – новое целое, увеличенное на меньшую a или большую b часть;

$(1,\ b)$, $(b,\ a)$ – возможные пары величин, из которых в конкретной пропорции выбирается одна.

Квадратные уравнения

Золотому отношению $b/a = \Phi$, по-прежнему соответствует квадратное уравнение $x^2 = x + 1$ и его эквивалентный аналог в виде аддитивно-разностного уравнения $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Как формообразующая структура числовой последовательности с двумя произвольными заданными начальными условиями, не равными одновременно нулю.

Для пропорции с решением $x = b/a = 1+\sqrt{2}$ на основе «корня из двух + 1» можно сопоставить подобное соотношение:

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1+b}{b} = \frac{a+2b}{b} = \frac{1+2b/a}{b/a} = \frac{1+2x}{x} \quad \to \quad x^2 - 2x - 1 = 0;$$

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}.$$

Таким образом, имеет место связь констант через алгебраические уравнения. Правда, заметим, что взаимоотношение – не столь очевидное. Поскольку кроме данных видов уравнений и соответствующих корней имеет место бесконечное множество других вариаций.

Золотое сечение и √2 в равнобедренном треугольнике

Рассматриваемая ниже новая структура, в отличие от предшествующих версий, имеет исключительное значение для исследуемых констант. И никаких других!

Пусть $b = 1$ – боковые стороны, a – основание равнобедренного треугольника.

Тогда $2b + a$ – его периметр.

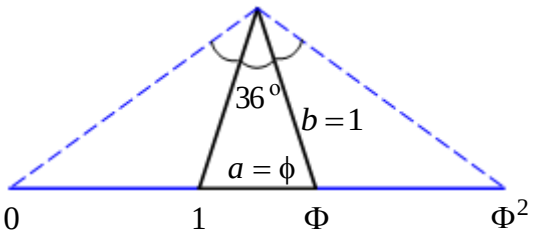
Образуем такую пропорцию:

две стороны равнобедренного треугольника относятся как периметр к их сумме.

Здесь возможно только два варианта.

Первая версия приводит к решению золотой пропорции (рис. 2):

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1+2x}{1+x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \{-\phi,\ \Phi\}.$$

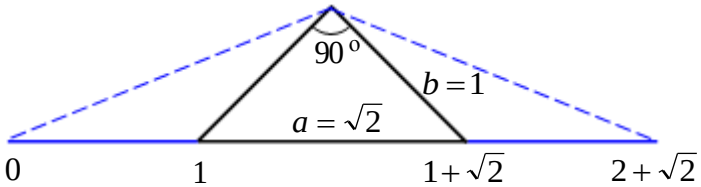


$$\frac{b}{a} = \frac{a+2b}{a+b} = \frac{2+\phi}{1+\phi} = \Phi$$

Рис. 2. Стороны равнобедренного треугольника соотносятся как периметр к их сумме, образуя золотую пропорцию

Вторая версия дает модель «квадратного корня из двух» (рис. 3):

$$y = \frac{a}{b} = \frac{y+2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}.$$



$$\frac{a}{b} = \frac{a+2b}{a+b} = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Рис. 3. Стороны равнобедренного треугольника соотносятся как периметр к их сумме, образуя модель "корня из двух"

Таким образом, имеем одно общее правило для золотого треугольника (рис. 2) и прямоугольного треугольника Пифагора (рис. 3).

Золотой равнобедренный треугольник имеет непосредственное отношение к треугольникам Робинсона:

а) остроугольный треугольник с отношением сторон – $1:1:\phi$. С наиболее распространенным названием "золотого треугольника" [13, 14];

б) тупоугольный треугольник с отношением сторон – 1 : 1 : Ф.

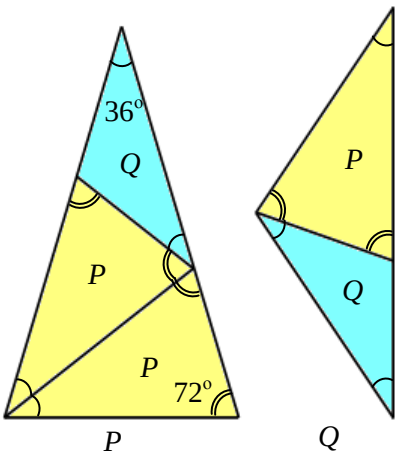


Рис. 4. Инфляция–дефляция треугольников Робинсона

Это, так называемые, *треугольники Робинсона* с углами $P(36^o, 72^o, 72^o)$ и $Q(108^o, 36^o, 36^o)$. Н.Воробьев [15, с. 100] называет их *треугольниками золотого сечения* (ЗС).

Инфляция (склеивание) и дефляция (разрезание) приводит к линейным размерам в Ф раз больше или меньше исходных фигур (рис. 4).

В виду особых пропорциональных признаков они используются в задаче на замощение плоскости [16], известной как проблема паркета, а также при размещении композиций по диагонали через центр.

Первый треугольник можно дополнить до ромба. Вместе со своим двойником они образуют пару фигур мозаики Пенроуза.

Уникальные свойства данной мозаики, а также иные свойства ЗС, позволяют высказать предположение об особой роли золотого треугольника в структурировании живых (биологических и зоологических) объектов.

Второй треугольник дополняется до квадрата.

То есть корень из двух формирует (символизирует) через квадрат кубическую решетку.

Известна её особая роль в построении костных структур в виде твердых тел.

Кроме того, прямоугольный треугольник с равными катетами имеет наибольшую площадь среди равнобедренных прямоугольных треугольников с одинаковым периметром.

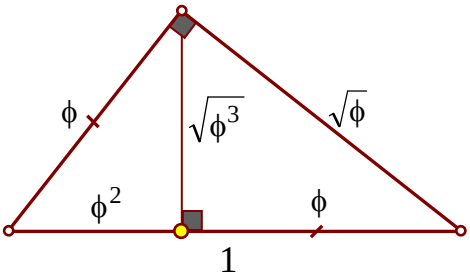
Треугольник Кеплера

Треугольник Кеплера подробно описан нами в работе [17] и соотносится с сочетанием двух чисел $(\Phi, \sqrt{\Phi})$, которые имеют необычное проявление в треугольной тематике [18].

Немецкий математик и астроном первым продемонстрировал, что эта фигура характеризуется отношением между гипотенузой и меньшим катетом, в виде золотой пропорции [19; 20, с. 149].

Треугольник объединяет две математических концепции – теорему Пифагора и золотое сечение, что глубоко впечатлило Кеплера.

В письме профессору Мастлину он писал[1]: «Если на отрезке, который делится в крайнем и среднем отношении, построить прямоугольный треугольник так, чтобы прямой угол находился на перпендикуляре к точке деления, то меньшая сторона <треугольника> будет равна большей части разделенного отрезка».



[1] «If on a line which is divided in extreme and mean ratio one constructs a right angled triangle, such that the right angle is on the perpendicular put at the section point, then the smaller leg will equal the larger segment of the divided line». – URL: moscowbooks.ru/pod/book.asp?id=459959.

Строится треугольник сравнительно просто (рис. 5).

Сторона квадрата единичной длины делится пополам.

Из точки деления O проводится дуга, отсекая на продолжении стороны величину Φ.

Этим раствором циркуля чертится дуга (с центром C) до пересечения с продолжением противоположной стороны квадрата

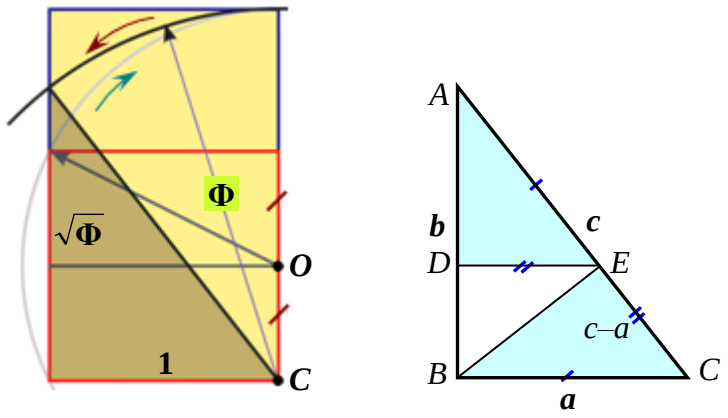


Рис. 5. Построение прямоугольного треугольника Кеплера и его пропорции

В результате такого построения образуется прямоугольный "золотой" треугольник, стороны которого соотносятся в геометрической прогрессии: $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$.

В работе [21] он описан на языке пропорций: гипотенуза c так относится к меньшему катету a, как сам катет относится к его дополнению $c-a$ до гипотенузы (рис. 5).

Но, пожалуй, самым главным свойством треугольника является "золотая" пропорция его сторон (!)

$$a:b=b:c.$$

Это еще одна альтернативная пропорция, вытекающая из подобия прямоугольных треугольников ABC и ABE.

Тем самым больший катет b золотого треугольника Кеплера является средним геометрическим между его гипотенузой c и меньшим катетом a.

Данная пропорция путем перемножения приводится к виду $b^2=ac$: квадрат большего катета равен произведению меньшего катета на гипотенузу.

Геометрически (по Евклиду) это означает, что прямоугольник, заключенный между гипотенузой и меньшим катетом, равен квадрату на большем катете.

В литературе по пирамидам его называют Δ-Кеплера или Δ-Прайса [22].

Он является единственным прямоугольным треугольником, стороны которого образуют геометрическую пропорцию $c:b=b:a$ с соответствующей геометрической прогрессией сторон $a:b:c=1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ [23].

Высота BE есть среднее геометрическое (пропорциональное) двух сегментов гипотенузы AE, EC.

Каждый катет треугольника есть среднее пропорциональное гипотенузы и смежных сегментов $b^2=c{\cdot}AC$, $a^2=c{\cdot}EC$.

Опуская терминологические особенности, треугольники Робинсона и Кеплера, так или иначе, могут быть отнесены к золотоносным треугольникам.

Итак, стороны $\Phi:\sqrt{\Phi}:1$ формируют прямоугольный треугольник <Кеплера>.

В частности, данное свойство непосредственно вытекает из написания квадратного многочлена, определяющего золотое сечение, в виде теоремы Пифагора:

$$\Phi^2=\Phi+1 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^2=\left(\sqrt{\Phi}\right)^2+1^2.$$

Есть еще одно любопытное наблюдение, уводящее нас к различным средним, которые широко использовались в древнегреческой математике.

Пусть $H=2\dfrac{xy}{x+y}$, $G=\sqrt{xy}$, $A=\dfrac{x+y}{2}$ – средние двух положительных чисел $y>x$: гармоническое, геометрическое (пропорциональное) и арифметическое.

Если в прямоугольном треугольнике катеты равны H и G, а гипотенуза равна A, то [24] $\frac{A}{H}=\frac{A^2}{G^2}=\frac{G^2}{H^2}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение и $\frac{y}{x}=\Phi^3$.

Положим $(x, y)=\left(\phi, \Phi^2\right)$. Тогда $(H, G, A)=\left(1, \sqrt{\Phi}, \Phi\right)$. – Это прямоугольный треугольник Кеплера.

Более подробные сведения об уникальных свойствах данной замечательной геометрической фигуры можно почерпнуть из наших работ [25–27].

Таким образом, треугольник Кеплера объединяет золотое сечение отрезка единичной длины и теорему Пифагора.

Что касается треугольников общего вида (не обязательно прямоугольных) со свойством геометрической пропорции $c:b=b:a$ для сторон, то таких фигур существует великое множество, образуя любопытную резольвенту Вассера [28, 29].

Нематематическая "мета"-суета

Площадь любого прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов – $a{\cdot}b$ или высоты (из прямого угла) и гипотенузы – $h{\cdot}c$.

По определению!

То есть имеет место безусловное равенство $\underline{a{\cdot}b = h{\cdot}c}$.

Если высоту принять равной единице $h = 1$, то $a{\cdot}b = c$ – произведение катетов численно равно гипотенузе. И наоборот, если $a{\cdot}b = c$, то высота равна строго единице $h = 1$.

Очевиднее не бывает. Но, оказывается, не для всех [30].

Так, во многих своих работах П. Сергиенко (URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/00/0019-00.htm) полагает или получает $a{\cdot}b = c$, но одновременно категорически не признает $h = 1$ (?).

Принимая некую несуществующую апокрифичную меру Н.Бурбаки (?) $h = 0{,}99999...$, которая им интерпретируется как «разница между сущностями живой и косной материи, как разница между жизнью и смертью».

Вопреки здравому смыслу. Наперекор всем школьным правилам алгебры и евклидовой геометрии.

Другой автор, профессор, доктор физ.-мат. наук (URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/1454-00.htm), по этой же тематике вводит несколько странную терминологию "обобщения".

Прямоугольные треугольники со свойством $c = a{\cdot}b$ он беспричинно выделяет, именуя их "Мета-треугольниками".

Он так и пишет: «следует ввести два треугольника: треугольник Кеплера и Мета-треугольник (обобщение мета-треугольника), для которого нет требования пропорциональности сторон, но, наряду с теоремой Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ выполняется условие $a{\cdot}b = c$».

Довольно-таки странное обобщение. Равно как и терминология. С заменой маленькой буковки "м" – на большую буковку "М".

Причем профессор неоднократно подчеркивает собственное исключительное авторство: «**введённый мной** из физических соображений Мета-треугольник» (выделено мною – *С.Л.*).

Воистину, миру явился новый феномен элементарной геометрии!

Разве нужно много усилий ума, чтобы положить в прямоугольном треугольнике $h = 1$ и назвать его Мета-треугольником (?)

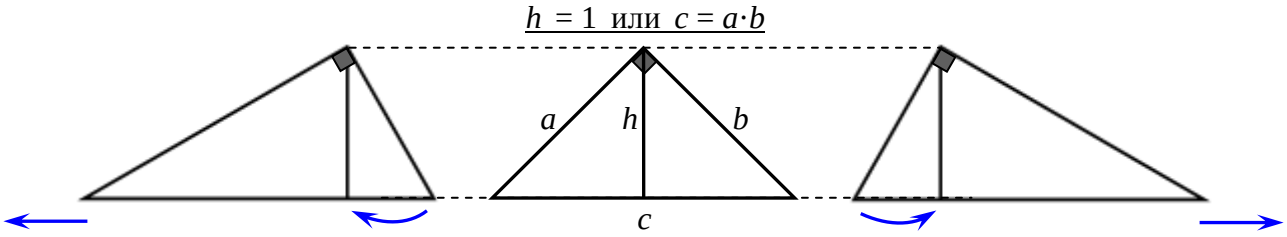
В продолжение известного образного высказывания И. Кеплера о двух действительно больших сокровищах геометрии – теоремы Пифагора и деления отрезка в среднем и крайнем отношении (золотого сечения), Сергиенко сочинил даже величавый эпиграф [31]: «треугольник, у которого произведение не равных катетов численно равно гипотенузе, есть третье сокровище геометрии».

Заодно поместил свои слова прямёхонько рядом с высказываниями А. Пушкина, Пифагора, И. Кеплера.

Надо же? – Принимают в прямоугольных треугольниках единичную высоту $h = 1$, и во всеуслышание провозглашают:

- один автор – новый класс геометрических фигур;
- другой автор – третье сокровище геометрии.

Мы же заметим, что прямоугольные треугольники с единичной высотой $h = 1$ или $a \cdot b = c$ формируют бесконечное множество геометрических фигур.



Левая сторона треугольников может отодвигаться влево (скользя нижним концом по оси абсцисс) до бесконечности.

При этом правая сторона нижним концом придвигается ближе к высоте, сохраняя между сторонами-катетами прямой угол.

Аналогичная картина наблюдается при движении вправо.

Ну, и какое здесь "сокровище геометрии"? – В одном ряду с теоремой Пифагора.

Или каковы веские аргументы для незадачливого обобщения и тем более введения нового термина "Мета-треугольники"? – Никакого вразумительного ответа вы не услышите.

Получается, математики всех стран на протяжении не одного тысячелетия упустили из виду такую "уникальную" особенность, как единичную высоту прямоугольного треугольника.

Следуя подобной странной логике, прямоугольные треугольники с гипотенузой единичной длины $c = 1$ так и напрашивается назвать *гипо*-треугольниками, с единичным катетом $a = 1$ – *като*-треугольниками и т.п.

Одним словом "иллюзион" в элементарной геометрии.

Что касается треугольника Кеплера, то вводить его, как предлагает профессор, не нужно.

Данная геометрическая фигура уже более сотни лет основательно "прижилась" в математике и литературе по пирамидологии [19].

Зри в корень

При изучении природных объектов и адекватных им математических моделей важен внимательный анализ конечных результатов.

Получаемые решения могут содержать завуалированные золотоносные структуры. В частности, наподобие целочисленных степеней Φ^n.

Это хорошо видно на примере пропорции, дающей решение с золотоносным числом $\phi^3 = \phi^2 - \phi$, равным разности между большей и меньшей частью золотого сечения единичного целого:

$$\frac{1-x}{2} = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5} - 2 \;=\; \phi^3 \;\approx\; 0{,}236.$$

Если записать это уравнение как $x = \dfrac{1}{4+x}$, а потом каждый раз заменять x в знаменателе значением $1/(4+x)$, то придем к оригинальной цепной (непрерывной) дроби:

$$x(4+x)=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{4+x}, \qquad x=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+x}}, \quad x = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}} = \phi^3.$$

Опуская промежуточные вычисления, можно показать, что в общем случае нечетные степени малого золотого числа выражается любопытной цепной дробью

$$\phi^k = \cfrac{1}{L_k + \cfrac{1}{L_k + \cfrac{1}{L_k + \ldots}}},$$

где L_k – числа Люка 1, 4, 11, 29, 76, 199,... с нечетными номерами $k = 2n+1$ – одна из наиболее известных последовательностей Фибоначчи с парой начальных значений (2, 1).

Или *другой пример*. Из литературы известно, что при раскопках Помпеи в мастерской одного скульптора найден мерный циркуль, который имеет все основания считаться инструментом целочисленного приближения к золотому сечении.

Действительно, длина циркуля составляет 146 мм, а шарнир делит его на два плеча — 56 и 90 мм, отношение которых $56/90 \approx 0{,}62$ близко к золотому сечению.

Всё бы и ничего. Однако ряд чисел 146, 90, 56 никак не образуют единую последовательность Фибоначчи.

Кроме того, весьма значимо отличие между собой приближенных отношений золотого сечения 146/90 и 90/56.

Можно предположить, что со временем инструмент, возможно, частично сработался, в результате чего его размер уменьшился на один миллиметр.

На самом деле речь идет, вероятно, о размерах 147 = 91 + 56, которые являются составляющими единого ряда Фибоначчи с затравочными числами (0, 7) или (7, 7):

0, 7, 7, 14, 21, 35, **56**, **91**, **147**...

В таком случае подход к выбору целых чисел при конструировании измерительного устройства становится более обоснованным.

Одновременно достигается более высокая точность приближения к ЗС.

Пифагоровы тройки

Напомним, пифагорова тройка (пифагоровы числа) – кортеж из трех натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих соотношению для прямоугольного треугольника $a^2 + b^2 = c^2$.

Их бесконечно много [32].

Пифагорова тройка называется примитивной, если она не может быть получена из другой пифагоровой тройки путем умножения на одно и то же целое число.

В примитивной тройке числа a и b имеют разную четность, причем четное делится на 4, c – всегда нечетно.

Примечательно, что все (!) примитивные пифагоровы тройки могут быть получены из "египетского" треугольника (3, 4, 5) с использованием трех линейных преобразований T_1, T_2, T_3, где a, b, c являются сторонами тройки [33]:

	Новые стороны		
	a	b	c
T_1	$a - 2b + 2c$	$2a - b + 2c$	$2a - 2b + 3c$
T_2	$a + 2b + 2c$	$2a + b + 2c$	$2a + 2b + 3c$
T_3	$-a + 2b + 2c$	$-2a + b + 2c$	$-2a + 2b + 3c$

Простейшая пифагорова тройка $(3,4,5)$ удовлетворяет равенству: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Есть и другие тройки с подобными свойствами, например, (6–8–10), (5–12–13), (9–10–17), (7–15–20), (6–25–29) и др.

В монографии [34, с. 85–89], посвященной новым взаимосвязям математики и гармонии, приводятся давно известные энциклопедические сведения о пифагоровых тройках, построенных с использованием чисел Фибоначчи:

$$(F_n F_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2 = \left(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2\right)^2 .$$

Даже небольшой проблеск свежей мысли позволяет здесь выделить иные, более интересные и познавательные свойства.

Дело в том, что пифагоровы тройки образуются не только по числам Фибоначчи и/или Люка, но и любым последовательностям Фибоначчи с произвольными целыми начальными условиями.

С одной стороны, косвенно подтверждается дуализм теоремы Пифагора и золотого сечения, через предельный аттрактор отношения членов последовательности.

С другой стороны, показывается четкая линия-водораздел между числами Фибоначчи и золотым сечением, представляющими две большущие разницы, когда на первый план выдвигаются не сами числа, а процедура (!) их образования.

Другими словами, в приведенной выше формуле отражены не столько свойства этих чисел, сколько проявлена уникальная особенность двучленно-аддитивной рекурсии с любыми начальными условиями! А это, конечно, более существенно и принципиально.

То есть не числа сами по себе отражают-воспроизводят данную особенность, а алгоритм (!), по которому формируются эти числа: хоть целые, включая отрицательные, хоть комплексные или трансцендентные.

Рекурсия первична, числа вторичны!

Поэтому целочисленные пифагоровы тройки можно компоновать с использованием любых неотрицательных пар начальных условий для двучленно-аддитивной рекурсии.

Например, пары (0,1) - (1,1) - (2,1) - (3,1) - (4,1) - (5,1)... дают нам красивые примитивные тройки (3–4–5), (5–12–13), (7–24–25), (9–40–41), (11–60–61), (13–84–85)..., где гипотенуза отличается от большего катета всего на единицу, а меньший катет "пробегает" нечетные числа. Следовательно, имеем такие пифагоровы тройки: $2n+1$, $2n(n+1)$, $2n(n+1)+1$.

Подобное интересно. Свежо. Достойно качественной монографии на тему гармонии в математике и ЗС. Вместо компилирования [34] из "попурри-Интернет".

Пифагорово прочтение золотого сечения

В работах [35, 36] на собственной доказательной базе делается вывод, что золотое сечение вытекает из знаменитой теоремы Пифагора, и нет оснований для его мистификации.

Мол, взяли гипотенузу, добавили два катета прямоугольного треугольника, вспомнили теорему Пифагора и получили совсем не частный случай, а новую самостоятельную сущность золотого сечения. Этим самым настойчиво проповедуется линия о некоей особенности золотого сечения в его связи с теоремой Пифагора.

На самом деле никакая уникальная связка здесь особо не просматривается.

Как было показано выше, любой прямолинейный отрезок может фигурировать в качестве диаметра соответствующей окружности.

На диаметре можно достроить бесконечное множество прямоугольных треугольников, соединив концы отрезка-диаметра с любой точкой окружности.

Перпендикуляр из данной точки к диаметру воспроизводит его надлежащее деление на две части в любом фиксированном соотношении.

Таким образом, любому делению отрезка на две части всегда можно сопоставить определенный прямоугольный треугольник, причем единственным образом.

В таком контексте золотое сечение не обладает никакими преференциями в сравнении с иными способами деления отрезка.

Излишняя суета-возня вокруг этого сродни искусственному созданию очередного мифа-ореола вокруг золотого сечения. Оно в этом вовсе не нуждается в виду достаточного количества уникальных свойств, не требующих дополнительного раздувания очередного краснобайства. Если не сказать "златобайства".

В то же время заслуживает внимания продемонстрированный в работе [35] переход от теоремы Пифагора – через деление целого в среднем и крайнем отношении – к числу золотого сечения:

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x) \quad \rightarrow \quad \frac{z+x}{y} = \frac{y}{z-x}.$$

Сравнивая с математической пропорцией (задачей деления целого в среднем и крайнем отношении) $\frac{\text{Целое}}{\text{Большее}} = \frac{\text{Большее}}{\text{Меньшее}}$, имеем: $\text{Целое} - \text{Меньшее} = (z+x) - (z-x) = y$ или $y = 2x$.

Положив для определенности $x = 1$, получаем $y = 2$ и $z = \sqrt{5}$.

Обозначая через число золотого сечения безразмерную величину Φ как отношение целого к большему, находим

$$\Phi = \frac{z+x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Хотя запись решения квадратного уравнения напрямую не использовалась, из контекста преобразований хорошо видно: оно неявно присутствует в отображении пропорции, когда в равенство отношений мы вводим неизвестную переменную.

Вместо заключения

«Со времен астронома И. Кеплера (XVII век) иногда высказываются различные точки зрения относительно того, что обладает большей фундаментальностью – теорема Пифагора или золотая пропорция».

Надо сказать, бесплодное занятие. Они «в своем развитии тесно переплетаются одна с другой и геометрическими и алгебраическими свойствами. Между ними нет ни пропасти, ни принципиальных различий. Они не конкурируют, у них разные предназначения» [37].

Теорема Пифагора лежит в основании математики.

Золотое сечение порождено тривиальной пропорцией из трех $a + b = 1$, потому его часто наделяют свойствами гармонии, и даже красоты.

Оно несложно для понимания.

Его основательность не считается общепризнанной, однако, набор уникальных свойств позволяет высказывать разные варианты гипотезы о возможной универсальности.

Так или иначе, существует ряд моделей, объединяющих особенности теоремы Пифагора и золотого сечения. Особенно это хорошо проявляется в прямоугольных треугольниках специального вида.

Рассмотренные нами модели, как и многие другие, представляют собой абстрактно-упрощенное выражение исследуемых явлений в форме числовых последовательностей, уравнений, графиков и др.

Несмотря на принятую идеализацию-абстракцию, они дают возможность проанализировать отдельные стороны и закономерности многих изучаемых процессов.

Общность и возможность единения в структурировании "корня из двух" и золотой константы Ф чрезвычайно важно.

Первое число символизирует квадрат и далее кубическую решетку – основу кристаллов. Второе, в своих различных проявлениях, больше тяготеет к одушевленным (биологическим и зоологическим) объектам.

Всё вместе позволяет считать, что живые и неживые материальные тела в своей основе могут иметь похожие закономерности строения-наращивания массы. Причем с одинаковым расширением практически на все объемные элементы природы.

Литература:

1. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 10.01.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13255.html.

2. Зубов В.П. Рецензия на книгу М.Гика. Эстетика пропорций в природе и искусстве // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 12965, 15.02.2006. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/006a/02320010.htm.

3. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с.

4. Урманцев Ю.А. Симметрия природы и природа симметрии (Философские и естественнонаучные аспекты). – М.: Мысль, 1974. – 132 с. – URL: sci.aha.ru/ots/OTS_Simmetry.pdf.

5. Мартин Гарднер. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и доп. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 447 с.

6. Шустер А. Популярные лекции низшей и высшей математики. – С.-Петербург: «Вестник Знания» (В.В. Битнера), 1906. – 130 с.

7. Мелешко С.В., Беляева Е.Д., Куксова Е.В. Золотое сечение в математике и других областях // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 78–79. – URL: rae.ru/snt/pdf/2013/6/69.pdf.

8. Чернов А. Заметки о вечном / Альтернативный алгоритм ряда Фибоначчи и обобщенный алгоритм для √2 и золотого сечения. – 2009. – URL: chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_2.htm.

9. Василенко С.Л. Парные двухчленно-аддитивные рекурсии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.10.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=51&sm=2.

10. Рассел Б. История западной философии, и её связь с политическими и социальными условиями от античности до наших дней: 3-е изд. испр. – Новосибирск: Сибир. универ. изд-во, 2001. – URL: psylib.org.ua/books/rassb01/index.htm.

11. Василенко С.Л. Новые рекуррентные формы золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 20.11.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.

12. Василенко С.Л., Никитин А.В. Модельные структуры пропорционального роста. Часть 1. Синтез // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=107&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 22.09.2013. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13091.html.

13. Weisstein E.W. Golden Triangle // MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html.

14. Golden triangle (mathematics) // From Wikipedia, the free encyclopedia. – URL: en.wikipedia.org/wiki/Golden triangle_(mathematics).

15. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

16. Корепин В.Е. Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. – 1987. – № 6. – с. 2–6.

17. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ. 17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

18. Василенко С.Л. Треугольники и золотые чевианы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.06.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=76&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17549, 23.06.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161974.htm.

19. Herz-Fischler R. The shape of the Great Pyramid. – Wilfrid Laurier University Press, 2000. – 294 p.

20. Livio Mario. The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002. – 149 p.

21. Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математ. образование. – 2006. – № 3. – С. 59–71. – URL: nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.

22. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

23. Василенко С.Л. Пирамидальная золотоносность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.02.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=64&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17305, 11.02.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161930.htm.

24. Di Domenico A. The golden ratio – the right triangle – and the arithmetic, geometric, and harmonic means // Mathematical Gazette 89, July 2005, 261.

25. Василенко С.Л. Треугольник Кеплера как объединитель теоремы Пифагора, золотого сечения и современных мифов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22385, 05.08.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163016.htm.

26. Василенко С.Л. Фибоначчиевый ряд золотых треугольников Кеплера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22546, 26.09.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163062.htm.

27. Василенко С.Л. От экстремальных свойств треугольника Кеплера и золотого конуса – к возможному проецированию на пирамиды Древнего Египта // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22827, 16.12.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163163.htm.

28. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ. 17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

29. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16007, 22.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

30. Василенко С.Л. Хождения по кругу // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22702, 11.11.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163117.htm.

31. Сергиенко П.Я. "Сакральный" треугольник как математический символ Святой Троицы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 19168, 02.07.2014. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162322.htm.

32. Пифагорова тройка // Википедия. – URL: ru.wikipedia.org/?oldid=83361189.

33. Berggren B. Pytagoreiska trianglar (Swedish) // Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi. – 1934. – Т. 17. – С. 129-139.

34. Stakhov A. Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – N.Y.: World Scientific, 2009. – 694 p.

35. Бакунинский А. Математика гармонии: позолоченные сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16939, 05.11.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322020.htm.

36. Бакунинский А. Математика гармонии: позолоченные сечения. – 23.04.2008. – URL: a3d.ru/architecture/stat/219/.

37. Белянин В.С., Романова Е.Н. Золотая пропорция. Новый взгляд // Наука и жизнь. – 2003. – № 6. – URL: nkj.ru/archive/articles/3070/.

© ВаСиЛенко, д.т.н., 2017
Харьков, Украина

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html