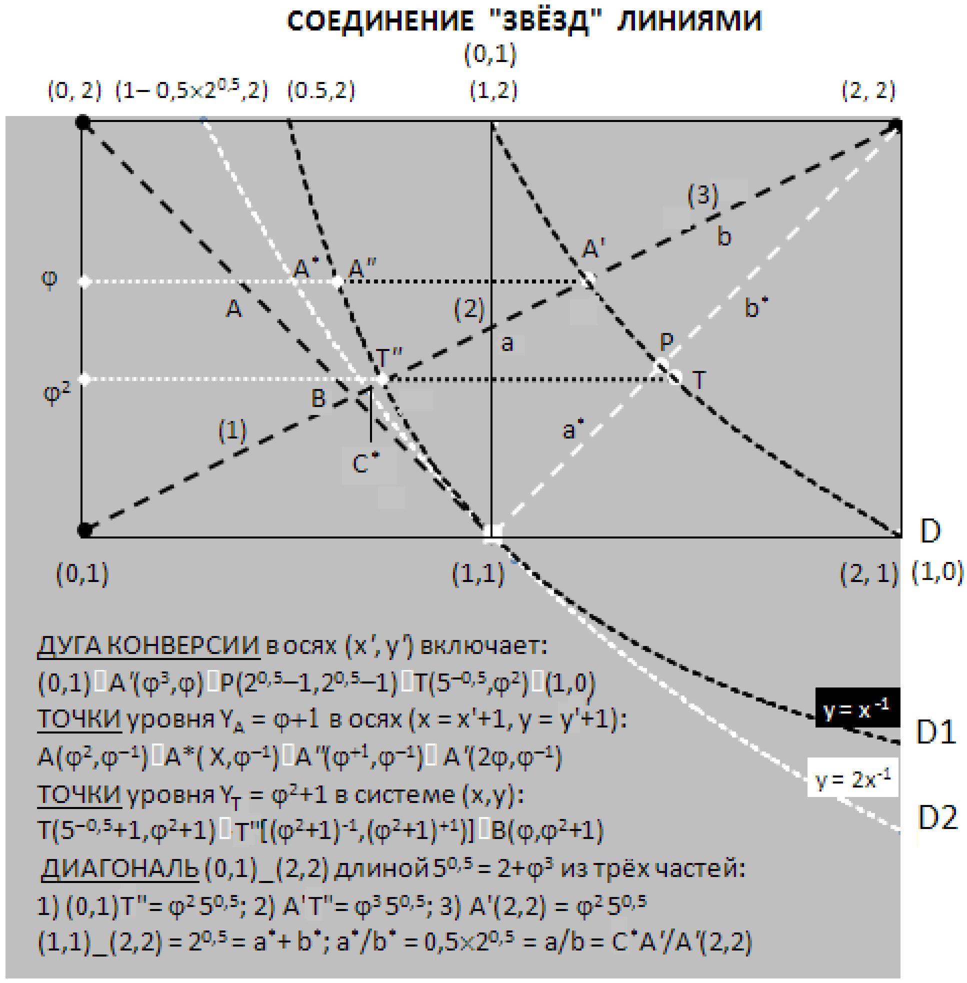
*Олег Черепанов*

## АРИФМОМЕТРИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

### Урок пятый: нашёл факт – поделись и поймёшь, что деление умножает. Полиформизм дуги конверсии, ротация в периоде, экстра-рациональные дроби.

Вернёмся к дуге конверсии D (*см. Урок третий*), образ которой связан с пятью точками-бинарами (0,1), A′($\varphi^3$, $\varphi^1$), P ($2^{0,5}$–1, $2^{0,5}$–1), T($5^{-0,5}$, $\varphi^2$), и (1,0), локализованными в квадрате 1 × 1, нижняя и левая стороны которого обозначают оси координатной системы $(x', y')$ с началом в центре квадрата $2\times 2$. Далее введём систему $(x, y)$, где $x = x' + 1$, $y = y' + 1$, и увидим, что половины возросших на единицу абсцисс 1, $\varphi^3$+ 1 = 2$\varphi$, $2^{0,5}$, 1+ $5^{-0,5}$ = $2(1+\varphi^2)^{-1}$ и 1 пяти особенных точек служат $x$-координатами бинаров (0.5, 2), A″($\varphi$, $\varphi$+1), P″($2^{-0,5}$, $2^{0,5}$), T″($\varphi^{-1}\times 5^{-0,5}$, $\varphi^2$+1) и (1,1), ординаты которых им обратны. А это значит, что вторая пятёрка точек принадлежит симметричной дуге D1 равнобочной гиперболы $y = x^{-1}$, заключённой вместе с дугой D гиперболы $y' = \dfrac{1-x'}{1+x'}$ в квадрат 2 × 2, представленный на рисунке своей верхней половиной 2 × 1.




Итак, дуги D и D1 являются фрагментами кривых с уравнениями $y' = \dfrac{1-x'}{1+x'}$ и $y = x^{-1}$ как функциями, аргументы и значения которых содержат скаляры 1, 2 и 5= $(2 + \varphi^3)^2$ с числом Фидия $\varphi$ в степени не выше 3 и образуют бинарную структуру, которую обозначим как «золотое» созвездие. Но если кривые из точек, слитых в континуум, содержат бинары по пять на каждой линии, то не все точки множеств {D} и {D1} одинаково востребованы и понятие функции является избыточным. В таком случае можно пользоваться понятием функтора – той же функции, но с дискретным аргументом, лишающим функцию непрерывности. Причём значения аргумента могут изменяться с определённой закономерностью. С этой позиции бинары как элементы всё также принадлежат гиперболам $y' = \frac{1-x'}{1+x'}$ и $y = x^{-1}$, образы которых объединены тем, что их одноуровневые (по вертикали) точки имеют $x$-координаты, отличающиеся в два раза. Так звёзды A″(φ, $\varphi^{-1}$) и T″($m$, $m^{-1}$) дуги D1 делят абсциссы $1 + \varphi^3 = 2\varphi$ и $1 + 5^{-0,5} = 2m$ точек A′ и T дуги D пополам. Таким образом, D и D1 выглядят одним объектом с двумя уравнениями, что позволяет называть D1 дублёром D. Но линия D2 с уравнением $y = 2x^{-1}$ тоже дублирует дугу конверсии D.

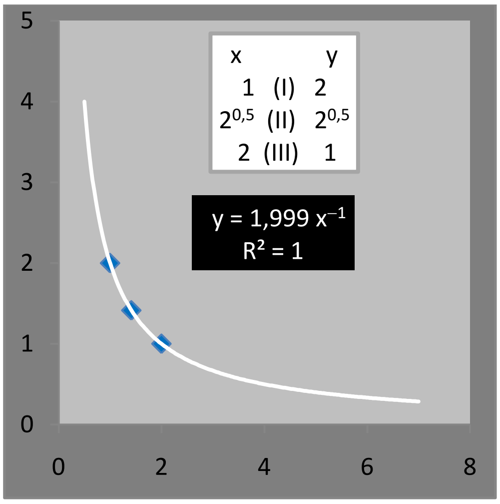
Очевидную разницу между уравнениями $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{1}{x}$ двух гипербол при $x > 0$ сохраняют выражения $xy = 1$ и $xy = 2$. Но соединение вершин несовпадающих равнобочных гипербол в точке (1, 1) координатной системы ($x$, $y$) не подразумевает сокращения или растяжения координатных осей в $2^{0,5}$ раз и сохраняет естественную расходимость ветвей сопоставляемых графиков в пределах зоны анализа 2 × 2, где построение дуги-дублёра D1 обеспечено делением $x$-координат бинаров дуги D пополам. Однако соответствие точек {D2} исходному множеству {D} в отличии от дихотомии абсцисс $x = 1 + x'$ носит характер диарезиса, то есть деления на две неравные части.

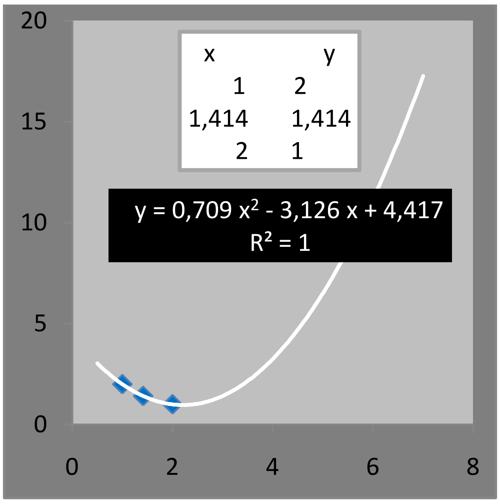
Заметим, что в координатах ($x = x' + 1$, $y = y' + 1$) точка P дуги D занимает пункт ($2^{0,5}$, $2^{0,5}$) как вершину гиперболы $y = \frac{2}{x}$ до переноса в пункт (1, 1), он же центр квадрата 2 × 2. И если принять полюсом его угловую точку (2,2), то исходящие оттуда лучи пересекут дугу конверсии в «звёздных» пунктах A′ и P, а дугу D1 в горизонтально сопряжённых точках T″($m$, $m^{-1}$) и (1, 1). При этом расстояния между полюсом (2,2) и пунктами (1,1) и $C^*$ перенесённой дуги D2 разделены точками P и A′ на части $a^*$, $b^*$ и $a$, $b$, такие, что $\frac{a^*}{b^*} = \frac{a}{b}$. А в горизонтальном положении луч соприкасается с дугами D1 и D2 в верхних точках (0.5, 2) и ($1 - 2^{-0,5}$, 2).

Как видно, дуга-фрагмент D2 состоит из точек (например, $A^*$), дистанцированных от полюса (2,2) так, что расстояние до любой из них дуга D делит на части $a$ и $b$, отношение которых является инвариантом поворота луча в пределах прямого угла при вершине (2,2) прямоугольника 2 × 1. В этом можно убедиться, установив, что луч, исходящий из точки (2,2), по пути в пункт (0,1) пересекающий дугу D в точке A′($\varphi^3$, φ) координат ($x'$, $y'$), а дугу D1 в точке T″[$(1+\varphi^2)^{-1}$), $\varphi^2+1$] системы ($x$, $y$), не только разделён ими на части (1), (2) и (3), соответственно равные $\varphi^2 \times 5^{0,5}$, $\varphi^3 \times 5^{0,5}$ и $\varphi^2 \times 5^{0,5}$, но пересекает дугу D2 в пункте $C^*$. При этом длина $\varphi^2 \times 5^{0,5}$ отрезка (2,2)_A′ относится к отрезку A′ $C^*$ диагонали (0,1)_(2,2) = $5^{0,5}$ прямоугольника 1 × 2 как $a^*$ к $b^*$. Но дихотомическое и диарезисное подобие трёх графических образов в квадрате 2 × 2 лишь косвенно связано с преобразованиями координат по геометрическому алгоритму.

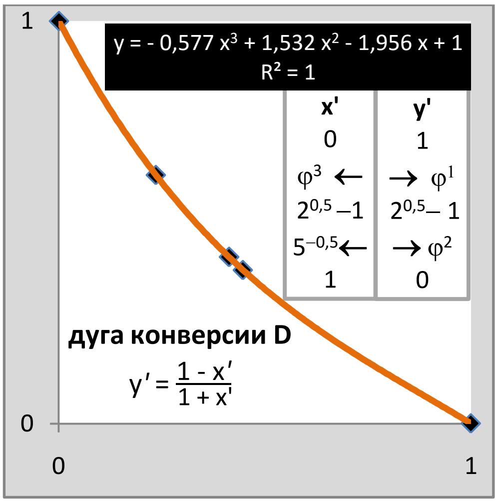
Итак, рамочное обрезание гипербол $y' = \dfrac{1-x'}{1+x'}$, $y = x^{-1}$ и $y = 2x^{-1}$, после которого в кадре остаются их дуги D, D1 и D2, симметричные относительно диагонали (0,0)_(2,2) составного квадрата $2 \times 2$ с ролью системы координат ($x$, $y$), выполнено с условием совмещения вершин дублирующих кривых D1 и D2 в пункте (1,1). При этом дуговые фрагменты D, D1 и D2 вписаны в квадраты $1 \times 1$, $(1 + 2^{-1}) \times (1 + 2^{-1})$ и $(1 + 2^{-0,5}) \times (1 + 2^{-0,5})$ с общей вершиной в пункте (2,2). А образ D2 получается переносом точек дуги конверсии D по лучам с началом в пункте (2,2) на расстояние $a = b\ (a^*/b^*)$, где $b$ – лучевая координата переносимой точки. Например, $b = 5^{0,5}\varphi^2$ для точки $A'(\varphi^3, \varphi)$. Тогда, пользуясь константой $a^*/b^* = 2^{-0,5}$ и зная длину $b$ отрезка (2,2)_A′ как гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами $1 - \varphi^3 = 2\varphi^2$ и $\varphi^2$, можно найти дистанцию $A'C^* = a$ и убедиться в лучевом (диарезисном) подобии дублёра D2 дуге конверсии D.

Геометрия, роль которой в изучении ЗС второстепенна, связывает вершину гиперболы $y = 2x^{-1}$ с декартовыми координатами $x = 2^{0,5}$ и $y = 2^{0,5}$. А из $y = 2x^{-1}$ для пяти известных $y = y' + 1$ можно найти кооординаты $x = 2/y$ бинаров дуги D2. В декартовой системе они совпадают с абсциссами пяти бинаров дуги D после увеличения $x'$ и $y'$ на единицу, Но перенос дуги D2 в положение лучевого подобия дуге D уменьшает значения абсцисс её бинаров, одноуровневых с «золотыми». И в этом смысле дуга D2 является вторым дублёром дуги конверсии D.



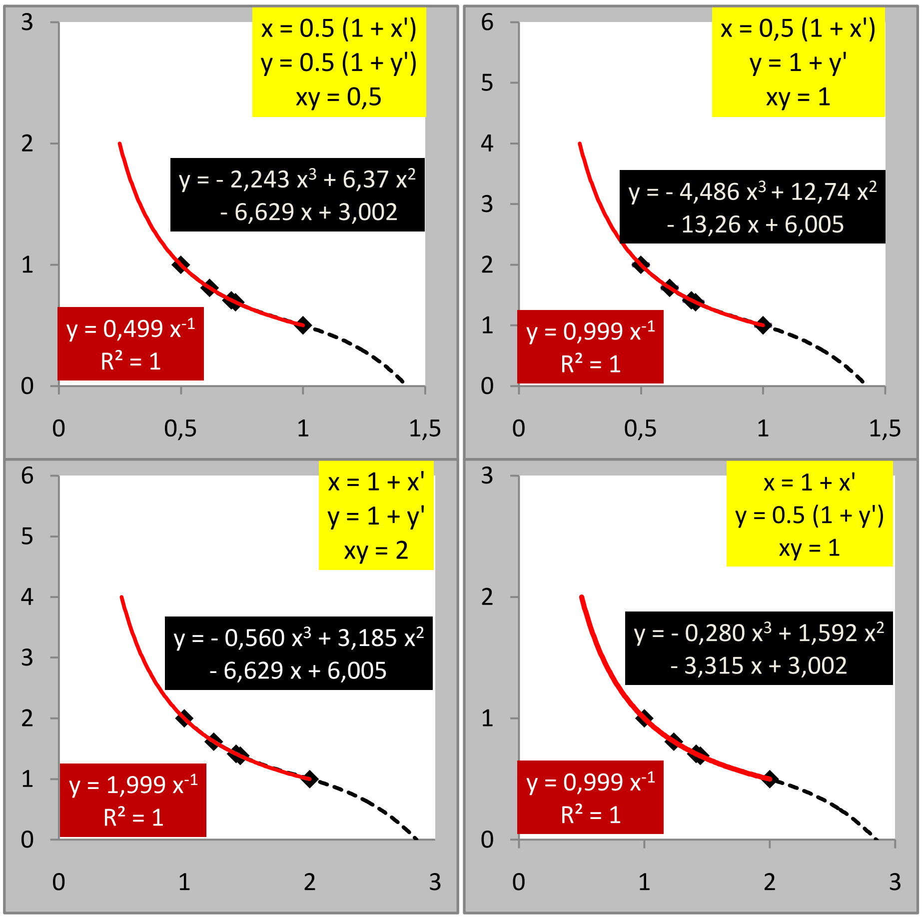




Дугу, постороенную *Excel* по точкам I (1, 2), II ($2^{0,5}$,$2^{0,5}$) и III (2,1) координирующего квадрата $2 \times 2$ с продлением линии тренда за его пределы при стопроцентной достоверности аппроксимации ($R^2 = 1$) моделируют функции $y = 1{,}(9)\ x^{-1}$ и $y = 0{,}709\ x^2 – 3{,}126\ x + 4{,}417$, степенная и полиномиальная. Так что «разряжённая» дуга, отмеченная не пятью, а тремя бинарами I, II и III, является фрагментом двух кривых – гиперболы и параболы, то есть математически биформальна. Но с учётом дублирования дуги D2 с теми же точками I, II и III внутри и по краям координатного квадрата $2 \times 2$ эта дуга выглядит полиформальной. Тем более, что пять бинаров дуги конверсии D, среди которых есть конверсные пары $\varphi^1 \leftrightarrow \varphi^3$ и $\varphi^2 \leftrightarrow 5^{-0,5} = 2 + \varphi^3$, объединяет форма $y =$ $= –0{,}577\ x^3 + 1{,}1532\ x^2 – 1{,}956\ x + 1$ или уравнение кубической параболы, коэффициенты которого, рассчитанные *Excel*, имеют специальные (засисимые от $x'$ и $y'$) значения, отвечающие крайним (0,1) и (1,0), средней P $(2^{0,5}–1, 2^{0,5}– 1)$ и другим точкам $A'(\varphi^3, \varphi)$ и $T(5^{-0,5}, \varphi^2)$ «золотого» созвездия.




Вспомним, что прибавление по единице к «золотым» координатам $x'$ и $y'$ каждой из пяти точек-бинаров дуги D равноценно их переносу в другие координаты, где огибающей перемещённых объектов служит дуга D1 гиперболы с уравнением $y = 0{,}999\, x^{-1}$ и его формальным аналогом $xy = 1$. При этом вновь полученные бинары координированы как точки $(0.5x, y)$, абсциссы которых вполовину меньше $x$-координат точек дуги D. А дуга D2, принятая *Excel* частью гиперболы $y = 1{,}999\, x^{-1}$, предполагает, что форма $0{,}5xy = 1$ одновременно эквивалентна и $xy = 2$ и $xy = 1$ при том, что в первом случае $x = x' + 1$ и $y = y' + 1$, тогда как во втором $x = 0{,}5(x' + 1)$ и $y = y' + 1$.

**АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ДУГИ И КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**




То есть, у пятёрки «звёздных» бинаров дуги D, два из которых отличаются конверсией (↔) координат в поле квадрата 1 × 1, в координатном квадрате 2 × 2 есть отображения, записанные на жёлтом фоне в виде зависимостей $x$ от $x'$ и $y$ от $y'$, реализуемых уравнениями, представленными на красном фоне и предполагающими принадлежность параметров к континууму действительных чисел, где они объединены образами равнобочных гипербол.

Уравнения аппроксимации пяти бинарных точек, выделенные красным цветом, достоверны ($R^2 = 1$) и почти неразличимы, так как их можно представить в виде $xy = 1$, $xy = 2$, $xy = 0{,}5$ и $xy = 1$, округляя предложенные *Excel* коэффициенты 0,(9), 1,(9) и 0,4(9). Но привязанные к дугам ансамбли из пяти бинаров с той же достоверностью ($R^2 = 1$) аппроксимируют уравнения-функции третьей степени, образующие систему

$$\begin{aligned}
y_1 &= -4{,}486\,x^3 + 12{,}74\,x^2 - 13{,}26\,x + 6{,}005\\
y_2 &= -0{,}560\,x^3 + 3{,}185\,x^2 - 6{,}629\,x + 6{,}005\\
y_3 &= -2{,}243\,x^3 + 6{,}370\,x^2 - 6{,}629\,x + 3{,}002\\
y_4 &= -0{,}280\,x^3 + 1{,}592\,x^2 - 3{,}315\,x + 3{,}002,
\end{aligned}$$

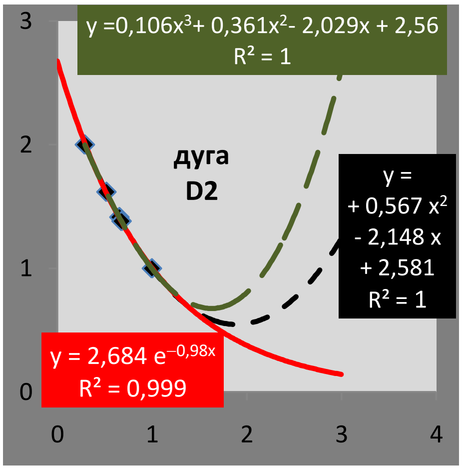
где константы зависят от чисел $x'$ и $y'$, определяющих специальные значения $x$ и $y$ по формулам на жёлтом фоне. И действительно, например, когда переменная $x$ в первом уравнении равняется $0{,}5\,(1 + x')$, а $x'$ имеет значение абсциссы $5^{-0,5}$ «золотой» точки T в квадрате $1 \times 1$, то $y = 1 + \varphi^2 = m^{-1}$, где $\varphi^2 = y'$, что подтверждается расчётом. То есть, пяти специальным значениям $x = 1 + x'$, уменьшенным вдвое, соответствуют пять бинарно обусловленных чисел-уровней $y = 1 + y'$. И это соответствие обеспечивают коэффициенты $a$ при $x^3$, $b$ при $x^2$, $c$ при $x^1$ и $d$ в качестве свободного члена, значения которых определённым образом связаны как по горизонтали (внутри каждого уравнения), так и по вертикали (у членов с одинаковыми степенями $x$).

Итак, на ограниченном участке гиперболы $y' = \dfrac{1 - x'}{1 + x'}$, названном дугой конверсии D, есть пять точек (0,1), $A'(\varphi^3, \varphi^1)$, $P\,(2^{0,5}-1, 2^{0,5}-1)$, $T(5^{-0,5}, \varphi^2)$ и (1,0), представленных парами чисел, заключённых в скобки и интерпретируемых как $x'$- и $y'$-координаты этих точек в поле квадрата $1 \times 1$. И видно, что элементы, названные бинарами, заданы комбинациями из чисел 1, 2 и φ. А присутствие в записях трёх степеней скаляра φ позволяет назвать пятиточечную структуру «золотым» созвездием с гиперболическим распределением условных светил. И подобному распределению подчинены точки-бинары (0.5, 2), $A''(\varphi, \varphi+1)$, $P''(2^{-0,5}, 2^{0,5})$, $T''(0{,}5 \times 5^{-0,5}, \varphi^2+1)$ и (1,1), принадлежащие дуге D1 как фрагменту гиперболы с уравнением $y = x^{-1}$. Очевидно, что числа-координаты второй пятёрки бинаров взаимно обратны, а абсциссы её элементов с ординатами $y = 1 + y'$ первой пятёрки вдвое меньше $x$-координат бинарных точек дуги D. И те же уровни на дуге D2 как фрагменте гиперболы $y = 2x^{-1}$, вершина которой перенесена из пункта $P'\,(2^{0,5}, 2^{0,5})$ обычных декартовых координат в точку (1, 1) координатного квадрата $2 \times 2$, заняты бинарами третьей пятёрки. Но гиперболическая аппроксимация бинаров не единственна. Более того, геометрия всего лишь иллюстрирует арифмометрические связи чисел 1, 2, 5 = $(2 + \varphi^3)$ и φ.

Казалось бы, с точки зрения арифметики между уравнениями $y = \dfrac{2}{x}$ и $y = \dfrac{1}{0{,}5x}$ нет разницы. Однако графики функций в декартовых координатах при переменном $x > 0$ не совпадают, то есть визуально различны. И в виде $xy = 2$ и $0{,}5xy = 1$ данные формы приписаны разным гиперболам, если не считать, что в $(0{,}5x)\,y = 1$ множитель 0,5 означает увеличение в два раза единицы масштабной разметки оси абсцисс без изменения равнобочной конфигурации кривой $xy = 2$. Но с другой стороны аналогичную форму $x(0{,}5y) = 1$ можно понимать как сжатие оси ординат с сокращением в два раза уровневых значений $y = y' + 1$ точек гиперболы $xy = 2$, лишающем её равнобокости.

| $1 = xy \Rightarrow x = (1 + x')/2$ и $y = 1 + y'$ |
|---|
| $Y_1 = -4{,}486\,x^3 + 12{,}74\,x^2 - 13{,}26\,x + 6$ |
| $Y_1^* = -4{,}486\,x^3 + 26{,}2\,x^2 - 38{,}75\,x + 19{,}26$ |
| $1/2 = xy \Rightarrow x = (1 + x')/2$ и $y = (1 + y')/2$ |
| $Y_2 = -2{,}243\,x^3 + 6{,}370\,x^2 - 6{,}629\,x + 3$ |
| $Y_2^* = -2{,}243\,x^3 + 13{,}1\,x^2 - 19{,}37\,x + 9{,}629$ |
| $2 = xy \Rightarrow x = 1 + x'$ и $y = 1 + y'$ |
| $Y_3 = -0{,}560\,x^3 + 3{,}185\,x^2 - 6{,}629\,x + 6$ |
| $Y_3^* = -0{,}560\,x^3 + 4{,}865\,x^2 - 13\,x + 12{,}629$ |
| $1 = xy \Rightarrow x = 1 + x'$ и $y = (1 + y')/2$ |
| $Y_4 = -0{,}280\,x^3 + 1{,}592\,x^2 - 3{,}315\,x + 3$ |
| $Y_4^* = -0{,}280\,x^3 + 2{,}432\,x^2 - 6{,}5\,x + 3$ |

Двойственное истолкование уравнений $y = \dfrac{2}{x}$ и $y = \dfrac{1}{0{,}5x}$, эквивалентных арифметически и неоднозначных геометрически, является противоречием, обязывающим к отказу от координатной привязки бинаров «золотого» созвездия и призывающим к исследованию его свойств на основе понятия числа и только. В этом убеждает построение линий, огибающих точки-бинары дуги D2. Их уровни-ординаты 2, $\varphi^{-1}$, $2^{0{,}5}$, $1 + \varphi^2$ и 1 в квадрате $2 \times 2$ те же, что у бинаров «эолотого» созвездия на дугах D и D1, тогда как абсциссы вычисляемы и равны $1 - 0{,}5 \times 2^{0{,}5} =$ = 0,2939…, 0,5202…, 0,6569…, 0,6799… и 1. При этом пятёрку бинаров дуги D2 кроме сдвинутой гиперболы $y = 2x^{-1}$ огибают кривые $y = 0{,}567x^2 - 2{,}148x + 2{,}581$ и $y = 0{,}106x^3 + 0{,}361x^2 - 2{,}029x + 2{,}56$ второго и третьего порядка и экспонента $y = 2{,}684e^{-0{,}98x}$ с показателем $R^2 = 0{,}999$… Таким образом, полиформизм дуги конверсии надёжно подтверждён, но с точки зрения аналитической геометрии кажется невероятным.




Итак, с помощью *Excel* установлено, что дуга конверсии и её дублёры, являясь фрагментами равнобочных гипербол, одновременно принадлежат кривым, уравнения которых геометризуются как кубические параболы. То есть, точки-бинары гипербол $y' = \dfrac{1 - x'}{1 + x'}$, $y = x^{-1}$ и $y = 2x^{-1}$ огибают кривые, формальные выражения которых допускают те значения $y$, что в паре с $x$-координатами, зависящими от $x'$ так, что $x = (1 + x')/2$ и $x = 1 + x'$ определяют бинары «золотого» созвездия на дугах D, D1 и D2.

Например, подстановка $0{,}5x = (1 + \varphi^3)/2 = \varphi$ в выражение $y_1(x)$ даёт значение $y = 1 + \varphi = \varphi^{-1}$, которое вместе с $x = 2\varphi$ обозначает точку $A''(\varphi, \varphi^{-1})$, полученную переносом по горизонтали бинара A′($\varphi^3$, $\varphi$) с дуги D на линию D1. А у каждого из пяти чисел вида $x = x' + 1$, подставляемых в уравнение $y_3(x)$ под показатели степени 1, 2 и 3, есть пара $y = y' + 1$, где $y'$ принимает значения 1, $\varphi$, $2^{0,5}–1$, $\varphi^2$ и 0 в соответствии с числами 0, $\varphi^3$, $2^{0,5}– 1$, $5^{–0,5}$ и 1. В результате этого появляются бинары (0,1), ($\varphi^3$, $\varphi$), ($2^{0,5}– 1$,$2^{0,5}– 1$), ($5^{–0,5}$, $\varphi^2$) и (1,0), аппроксимированные дугой D со свойством биформизма. Ведь дуга, построенная по пяти точкам, совпадает с определённым участком гиперболы и служит частью кривой линии, известной как кубическая парабола. Четыре таких параболы формализуют уравнения $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$, константы которых вычислены *Excel*. А их значения коррелируют так, что числовые коэффициенты при одинаковых степенях $x$ уравнений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ отличаются вдвое, как и аналогичные константы в уравнениях $y_3(x)$ и $y_4(x)$. То есть, представляя уравнения $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ в общем виде как $y_i(x) = a_ix^3 + b_ix^2 + c_ix + d_i$, где $i = 1,2,3,4$, имеем $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = 2$ и $\frac{a_3}{a_4} = \frac{b_3}{b_4} = \frac{c_3}{c_4} = \frac{d_3}{d_4} = 2$.

А теперь из шестнадцати констант четырёх системных уравнений выберем наименьшую по абсолютному значению. Очевидно, что это коэффициент-множитель 0,28 перед третьей степенью аргумента $x$ в уравнении $y_4(x)$. Назовём его нормиратором и обозначим как $a_Н$. Ясно, что перед косой чертой в строках с символами * стоят константы, готовые к нормировке делителем $a_Н$, возрастающим от уравнения к уравнению кратно степеням двойки. А до нормировки константы имеют значения, о которых нельзя сказать вычислены они точно или округлены *Excel* до трёх знаков после запятой. Поэтому в целях расширения базы данных, четыре кубических уравнения дополнены четырьмя уравнениями $y_1^*$, $y_2^*$, $y_3^*$ и $y_4^*$, полученными приравниванием первых производных функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ самим функциям, что не должно сказываться на отношениях между числовыми коэффициентами основных и добавочных уравнений. При этом число перед косой чертой \ это коэффициент-множитель соответствующего члена исходного уравнения тренда, а число после звёздочки принадлежит слагаемому дополнительного.

| НОРМИРОВАННЫЕ КОНСТАНТЫ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (ОСНОВНЫХ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ) | | | |
|---|---|---|---|
| a при $x^3$ | b при $x^2$ | c при $x^1$ | d |
| $a_4 = 0,28 = a_Н$ | 1,595 * 2,43 | 3,315 * 6,5 | 3 * 3 |
| Норм по $a_Н$ → | 5,696(285714)<br>8,67(857142) | 11,839(285714)<br>23,2(142857) | 10,(714285)<br>10,(714285) |
| $0,56 = 2a_Н$ | 3,185 * 4,865 | 6,63 * 13 | 6 * 12,63 |
| Норм по $2a_Н$ → | 5,6875<br>8,6875 | 11,839(285714)<br>23,2(142857) | 10,( 714285)<br>22,553(571428) |
| $2,24 = 8a_Н$ | 6,37 * 6,37 | 6,63 * 13,1 | 3 * 19,37 |
| Норм по $8a_Н$ → | 2,84375<br>2,84375 | 2,95982(142857)<br>5,8482(142857) | 1,339(285714)<br>8,64732(142857) |
| $4,48 = 16a_Н$ | 12,74 * 26,2 | 13,26 * 38,75 | 6 * 19,26 |
| Норм по $16a_Н$ → | 2,84375<br>5,8482(142857) | 2,95982(142857)<br>8,6495535(714285) | 1,339(285714)<br>4,29910(714285) |

И действительно, итогами нормировок $a_i$, $b_i$, $c_i$ и $d_i$ числом 0,28 являются десятичные дроби, шестичленные периоды которых выделены разными цветами и равны (142857) = $\alpha$, (285714) = $\beta$, (571428) = $\delta$, (714285) = $\varepsilon$, (857142) = $\xi$. Как видно, наборы $\alpha$, $\beta$, $\delta$, $\varepsilon$ и $\xi$ содержат одни и те же цифры (1, 2, 4, 5, 7, 8), но отличаются их расстановкой и объединены кратностью значений: $\beta = 2\alpha$, $\delta = 4\alpha$, $\varepsilon = 5\alpha$, $\xi = 6\alpha$. Причём последнее свойство предполагает существование ещё одного (шестого) периода $\gamma = 3\alpha = (428571)$ с набором тех же цифр. В результате сумма $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \xi$ равна $21(\alpha)$, что даёт число 2,(9), приближённое к скаляру 3. И крайние приближения есть у единицы ($\alpha + \beta + \delta = \gamma + \delta = \alpha + \xi = \beta + \varepsilon = \alpha + \xi = 7(\alpha) = 0,(9)$). Есть они и у двойки ($\alpha + \beta + \varepsilon + \xi = \gamma + \varepsilon + \xi = 14(\alpha) = 1,(9)$), и у тройки и у всех натуральных чисел без исключения. При этом $1 - 0,(9) = 2 - 1,(9) = 3 - 2,(9) = \ldots = 10^{-N}$, где разность между двумя рациональными числами - целым и приближенным – минимальна при данном N и неоценима в плане её значения при $N = \infty$. То есть, разность между натуральным числом и приближённым не может быть нулевой. Тем самым нуль и бесконечность отрицают друг друга и их следует исключить из арифметики, где целые 2 и 1 представлены не по-отдельности, а в отношении 1: 2, степени ±1 и ±2 которого дают $\varphi^{-1} = (1{:}\,2)^{+1} + [1 + (1{:}\,2)^{+2}]^{1:\,2}$ и $\varphi^{-3} = (1{:}\,2)^{-1} + [1 + (1{:}\,2)^{-2}]^{1:\,2}$.

Таким образом, простейшим выражением для скаляров, обратных $\varphi^1$ и $\varphi^3$, служит форма $\varrho^{\pm1} + (1 + \varrho^{\pm2})^{\varrho}$, где $\varrho$ – не число, а символ отношения единицы к двойке, тогда как «+» и «–» не знаки арифметических действий, а сигнатурные признаки первоосновного элемента $\varrho = 1{:}\,2$, меняющего значение на обратное при перемене знака показателя степени. И та же формула, что при одинаковых знаках показателей 1 и 2 демонстрирует связи числа Фидия с целыми $2 = \varphi^{-1} + \varphi^2$ и $2^2 = \varphi^{-3} - \varphi^3$, при $\varrho^{-1} + (1 + \varrho^{+2})^{\varrho}$ даёт 3,1180339887..., что близко к числу $\pi = 3,1415926535\ldots$, тогда как из $\varrho^{+1} + (1 + \varrho^{-2})^{\varrho}$ выходит 2,736067977499…, что на 0.017786149040… больше числа Непера $e = 2,718281828459\ldots$Таким образом, константы $\pi$ и $e$ элементарной математики имеют приближения в виде иррациональных чисел, получаемых из прформы $\varrho^{?1} + (1 + \varrho^{¿2})^{\varrho}$ с символом $\varrho$ на трёх позициях, принимающей значения $\varphi^{-1}$, $\varphi^{-3}$, $\approx\pi$ и $\approx e$ в соответствии со знаками «+» или «–» на месте символов ? и ¿ у показателей степени 1 или 2.

Для достоверной организации фактов в математическую систему из чисел и операций, где натуральных элементов только два (1 и 2), а другие целые даны приближениями с числом 9 в периоде, не будем считать их дробями. При этом целые в записи числа (например, 3.(142857)) останутся на прежнем месте перед точкой. Но число, дробная часть которого представлена каким-нибудь периодом из ряда $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\xi$, будем называть экстра-рациональным.

Пятый урок особенный. Если прежде шёл показ фактов с помощью тождественных преобразований и в корзину с ними упал геометро-тригонометрический парадокс, то пятый урок – это постановка задачи, которая при попытке её решения оказывается проблемой. Заняться ею может каждый, кого заинтересовали экстра-рациональные дроби, обнаруженные в связи с числом Фидия $\varphi$, играющим наравне с постоянными $e$ и $\pi$ заметную роль в теоретической математике.