УДК 510:004.22

ЛИНЕЙНОЕ ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ ЭНЦИКЛОПЕДИИ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ OEIS, НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО И ЕГО КОДИРОВАНИЕ

Ткаченко Иван Семенович,
д.э.н., профессор кафедры финансов, банковского дела и страхования
Хмельницкого Национального университета
29016, Украина, ул. Институтская, 11,
e-mail: ivan.tkachenko@gmail.com

Ткаченко Мирослав Иванович,
к.э.н., доцент, докторант кафедры
автоматизированных систем и моделирования в экономике
Хмельницкого Национального университета
29016, Украина, ул. Институтская, 11,
e-mail: myroslav.tkachenko@gmail.com

Аннотация. В статье рассмотрен результат исследования как решение линейного диофантового уравнения с коэффициентами из энциклопедии числовых последовательностей может быть использовано для кодирования натурального числа.

Ключевые слова: диофантово уравнение, энциклопедия OEIS, кодирование, натуральное число.

Abstract: The article describes the results of research how the solution of linear diophantine equation with coefficients from the encyclopedia of numerical sequences can be used to encode a natural number.

Keywords: Diophantine equation, OEIS encyclopedia, coding, integer number.

Актуальность. Растущее количество хакерских атак на различные базы данных требуют повышения качества защиты от этих атак, а для этого необходимо искать новые подходы к обеспечению надежности как самих данных, так и информационных систем в целом от несанкционированного вмешательства.

Одним из таких подходов, по нашему мнению, может быть следующая постановка задачи и ее решение, что возникло благодаря поиску вариантов доказательства десятой проблемы Д.Гильберта.

Постановка задачи. Линейное диофантово уравнение [1]

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + a_{n-2} x_{n-2} + \ldots + a_3 x_3 + a_2 x_2 + a_1 x_1 = N\,, \qquad (1)$$

где коэффициентами a_n есть числа последовательностей из энциклопедии OEIS $\{a_n\}$ (по данным Википедии содержит более четверти миллиона числовых последовательностей) [2], имеет решение $\{x_n\}$, которое позволяет представить натуральное число N в виде некоторого разложения.

Решение задачи. Алгоритм определения значений неизвестных $\{x_n\}$ уравнения (1) реализуем с использованием операции нахождения частного от деления натурального числа N на старший коэффициент a_n уравнения (1) и вычисления остатка от вычитания $a_n{\cdot}x_n$ из N, последовательно до тех пор, пока последний остаток не будет равен нулю, то есть это выглядит следующим образом:

$$x_n = [\tfrac{N}{a_n}]\,,$$

$$N_1 = N - a_n x_n\,,$$

$$x_{n-1} = [\tfrac{N_1}{a_{n-1}}],$$

$$N_2 = N_1 - a_{n-1}x_{n-1},$$

$$x_{n-2} = [\tfrac{N_2}{a_{n-2}}],$$

$$N_3 = N_2 - a_{n-2}x_{n-2},$$

$$\ldots$$

$$x_2 = [\tfrac{N_{n-2}}{a_2}]$$

$$N_{n-1} = N_{n-2} - a_2x_2$$

$$x_1 = [\tfrac{N_{n-1}}{a_1}].$$

Замечание. При этом предположительно выполнение условия $N > 2a_n$, но если выполняется только равенство $N = 2a_n$, тогда $x_n = 2$ и остальные неизвестные $x_n = 0$.

Этот алгоритм некоторым образом напоминает процедуру перевода числа из одной системы счисления в другую до получения остатка равного нулю, например, десятичного числа в двоичную систему счисления.

Уравнение (1) может быть представлено и в таком варианте:

$$a^n x_n + a^{n-1}x_{n-1} + a^{n-2}x_{n-2} + \ldots + a^3x_3 + a^2x_2 + ax_1 = N. \quad (2)$$

Замечание. Должно выполняться условие $N > a^n$, но если выполняется только равенство $N = a_n$, тогда $x_n = 1$ и остальные неизвестные $x_n = 0$.

Пример. Из энциклопедии числовых последовательностей OEIS [2] выберем:

1) последовательность чисел Фибоначчи A000045, ограничившись $n = 18$ членами:

$$\{F_{18}\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597;$$

$$\text{и } N = 2016.$$

В этом случае уравнение (1) примет вид

$$F_{18}x_{18} + F_{17}x_{17} + F_{16}x_{16} + \ldots + F_3x_3 + F_2x_2 + F_1x_1 = N\,,$$

или точнее с числовыми коэффициентами

$$1597x_{18} + 987x_{17} + 610x_{16} + \ldots + 1\cdot x_3 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_1 = 2016\,,$$

решением которого есть $x_{18}, x_{17}, x_{16}, \ldots, x_3, x_2, x_1$, вычисленные согласно предложенному нами алгоритму следующим образом:

$$x_{18} = [\tfrac{2016}{1597}] = 1;\ 2016 - 1\cdot 1597 = 419\,;$$

$$x_{17} = [\tfrac{419}{987}] = 0;\ 419 - 0\cdot 987 = 419\,;$$

$$x_{16} = [\tfrac{419}{610}] = 0;\ 419 - 0\cdot 610 = 419\,;$$

$$x_{15} = [\tfrac{419}{377}] = 1;\ 419 - 1\cdot 377 = 42\,;$$

$$x_{14} = [\tfrac{42}{233}] = 0;\ 42 - 0\cdot 233 = 42\,;$$

$$x_{13} = [\tfrac{42}{144}] = 0;\ 42 - 0\cdot 144 = 42\,;$$

$$x_{12} = [\tfrac{42}{89}] = 0;\ 42 - 0\cdot 89 = 42\,;$$

$$x_{11} = [\tfrac{42}{55}] = 0;\ 42 - 0\cdot 55 = 42\,;$$

$$x_{10} = [\tfrac{42}{34}] = 1;\ 42 - 1\cdot 34 = 8\,;$$

$$x_9 = [\tfrac{8}{21}] = 0;\ 8 - 0\cdot 21 = 8\,;$$

$$x_8 = [\tfrac{8}{13}] = 0;\ 8 - 0\cdot 13 = 8\,;$$

$$x_7 = [\tfrac{8}{8}] = 1;\ 8 - 1\cdot 8 = 0\,,$$

на этом этапе, в принципе, алгоритм завершен, и остальные значения неизвестных будут равны нулю:

$$x_6 = [\tfrac{0}{5}] = 0;\ 0 - 0\cdot 5 = 0\,;$$

$$x_5 = [\tfrac{0}{3}] = 0;\ 0 - 0\cdot 3 = 0\,;$$

$$x_4 = [\tfrac{0}{2}] = 0;\ 0 - 0\cdot 2 = 0\,;$$

$$x_3 = [\tfrac{0}{1}] = 0;\ 0 - 0\cdot 1 = 0\,;$$

$$x_2 = [\tfrac{0}{1}] = 0;\ 0 - 0\cdot 1 = 0\,;$$

$$x_1 = 0\,.$$

Таким образом, получим, что натуральное число $N = 2016$ представлено как разложение в виде суммы чисел Фибоначчи:

$$2016 = 1597\cdot1 + 987\cdot0 + 610\cdot0 + 377\cdot1 + 233\cdot0 + 144\cdot0 + 89\cdot0 + 55\cdot0 + 34\cdot1 + 21\cdot0 + 13\cdot0 +$$

.

Или десятичное число в представлении как код Фибоначчи:

$$2016_{10} = 100100001001000000_{F_n}.$$

2) Последовательность чисел Пелля A000123, ограничившись $n = 9$ членами:

$$\{P_9\} = 0, 1, 2, 5, 29, 70, 169, 408, 985, \text{ и } N = 2016.$$

В этом случае уравнение (1) примет вид:

$$985x_9 + 408x_8 + 169x_7 + 70x_6 + 29x_5 + 5x_4 + 2x_3 + 1x_2 + 0x_1 = 2016,$$

а его решением будут значения $x_9, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$, которые вычислим в соответствии с предложенным алгоритмом:

$$x_9 = [\tfrac{2016}{985}] = 2;\ 2016 - 2\cdot985 = 36;$$

$$x_8 = [\tfrac{36}{408}] = 0;\ 36 - 0\cdot408 = 36;$$

$$x_7 = [\tfrac{36}{169}] = 0;\ 36 - 0\cdot169 = 36;$$

$$x_6 = [\tfrac{36}{70}] = 0;\ 36 - 0\cdot70 = 36;$$

$$x_5 = [\tfrac{36}{29}] = 1;\ 36 - 1\cdot29 = 7;$$

$$x_4 = [\tfrac{7}{5}] = 1;\ 7 - 1\cdot5 = 2;$$

$$x_3 = [\tfrac{2}{2}] = 1;\ 2 - 1\cdot2 = 0;$$

$$x_2 = [\tfrac{0}{1}] = 0;\ 0 - 0\cdot1 = 0;$$

$$x_1 = 0,$$

следовательно, получим, что натуральное число $N = 2016$ представлено как разложение в виде суммы чисел Пелля:

$$2016 = 985\cdot2 + 408\cdot0 + 169\cdot0 + 70\cdot0 + 29\cdot1 + 5\cdot1 + 2\cdot1 + 1\cdot0 + 0\cdot0,$$

или десятичное число в представлении как код Пелля

$$2016_{10} = 200011100_{P_n},$$

3) Что касается уравнения (2), то пример может быть следующим:

Пусть $a = 2$, $n = 10$ и $N = 2016$, тогда получим

$$2^{10}x_{10} + 2^9x_9 + 2^8x_8 + \ldots + 2^3x_3 + 2^2x_2 + 2x_1 = 2016, \quad (3)$$

или конкретно для этого варианта уравнения

$$1024x_{10} + 512x_9 + 256x_8 + 128x_7 + 64x_6 + 32x_5 + 16x_4 + 8x_3 + 4x_2 + 2x_1 = 2016$$

применим предложенный нами алгоритм

$$x_{10} = [\tfrac{2016}{1024}] = 1; 2016 - 1024 = 992;$$

$$x_9 = [\tfrac{992}{512}] = 1; 992 - 512 = 480;$$

$$x_8 = [\tfrac{480}{256}] = 1; 480 - 256 = 224;$$

$$x_7 = [\tfrac{224}{128}] = 1; 224 - 128 = 96;$$

$$x_6 = [\tfrac{96}{64}] = 1; 96 - 64 = 32;$$

$$x_5 = [\tfrac{32}{32}] = 1; 32 - 32 = 0.$$

Остаток равен нулю, следовательно, остальные значения неизвестных будут равны нулю: $x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$ и получим значение десятичного числа в двоичном коде

$$2016_{10} = 1111110000_2.$$

Можно привести и еще несколько примеров, но их суть для всех числовых последовательностей энциклопедии OEIS одинакова, и она достаточно понятна, чтобы выполнять другие преобразования самостоятельно.

Вывод. Приведенный нами алгоритм решения линейного диофантового уравнения открывает некоторые новые возможности для формирования защитных кодов от несанкционированного вмешательства к базам данных и информационным системам в целом.

Литература.

1. Диофантово уравнение [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Диофантово_уравнение (дата обращения: 11.11.16).

2. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей [Электронный ресурс]. URL: http://oeis.org/ (дата обращения: 11.11.16).