

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАУЗЛЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В статье описываются результаты теоретических исследований по распространению заузленной электромагнитной волны

Цель теоретического исследования состоит в том, чтобы, используя топологические свойства расслоения Хопфа сферы  $S^2$  в сферу  $S^3$  [1], вычислить в явном виде функцию, которая описывает движение импульса заузленной электромагнитной волны (ЭМВ) в форме торического узла в стереографической проекции поля (в виде электромагнитного солитона) из  $S^3$  локально на трёхмерное евклидово пространство  $R^3$ . Эти исследования необходимы для создания технических передающих и приёмных антенн, существующих именно в пространстве  $R^3$ .

Теоретический аспект существования заузленного электромагнитного поля состоит новых нетривиальных топологических решениях уравнений Максвелла, записанных во-вторых внешних дифференциальных формах. Именно существование электромагнитного поля, описываемого этими уравнениями, обусловлено явлением расслоения Хопфа [1] в гиперсферу  $S^3$  физического пространства (вакуума), где стереографическая проекция параллелей  $S^3$  в каждой её точке на наше наблюдаемое 3-мерное евклидово пространство имеет форму заузленных 3-х мерных торов. Линии меридианов (окружностей Вилларсо) этих торов задают орбиты группы  $U(1)$  внутренней симметрии электромагнитного поля (т.е. слои главного расслоения). Эти линии в физических размерностях и определяют силовые линии магнитного и ортогонального электрического поля, а связность этого главного расслоения определяет напряжённость физических полей. По сути, эти заузленные торы (или узлы торического многолистника) силовых линий электромагнитного поля и являются указанным выше топологическим решение уравнений Максвелла.

Для того, чтобы вычислить в явном виде функцию, которая описывает движение импульса заузленной электромагнитной волны (ЭМВ), расслоение Хопфа 2-мерной сферы  $S^2$  в 3-х мерную сферу (гиперсферу)  $S^3$  рассматривается в 4-х мерном евклидовом пространстве-времени  $R^4$  с картой (координатами)

$$h=(\phi, \theta) = (\phi(x_1, x_2, x_3, x_4=c \cdot t), \theta(x_1, x_2, x_3, x_4=c \cdot t)) S^3 \rightarrow S^2,$$

где  $c$ -скорость света,  $t$ -время;  $\phi, \theta$ - комплексные ортогональные скалярные функции.

В этом 4-мерном евклидовом пространстве уравнение сферы

$$S^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

а (стерео)проективное 3-х мерное пространство  $R^3 = \{y_1, y_2, y_3\}$ ,

где  $y_i = x_i / (1 - x_4)$ , где  $x_4$ -ось времени  $c \cdot t$  в  $R^4$ .

Обратное преобразование в  $R^4$  из  $R^3$  равно  $x_i = 2y_i / (\rho + 1)$ ,  $x_4 = (\rho - 1) / (\rho + 1)$ ,  $\rho = \sum y_i^2$ . Комплексная плоскость скаляров  $(\phi, \theta)$  отображается этой картой Хопфа в сферу  $S^2$  и другой стереографической проекцией в комплексную плоскость  $C$ :  $S^2 = R^2 \cup \{\infty\} = C \cup \{\infty\}$ .

В результате таких двух компактификаций комплексные скаляры  $\phi$  и  $\theta$  могут быть интерпретированы, в любой момент время, как отображение карт Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ , которые могут быть классифицированы в гомотопических классах, охарактеризованных значением индекса Хопфа  $n$ . Это расслоение Хопфа глобальное. Линии уровня скаляров по построению совпадают с магнитными и электрическими силовыми линиями (в физической размерности), каждая из этих линий помечена постоянной величиной соответствующего скаляра  $\phi = \phi_0$ ,  $\theta = \theta_0$ . Оба скаляра принимают одно и тоже значение на бесконечности, которое эквивалентно компактификации (замыканию) физического 3-пространства  $R^3 \cup \{\infty\}$  в сферу  $S^3$ .

Рассматриваются электромагнитные волны, для которых справедливо скалярное равенство  $B \cdot E = 0$ , где  $B = \mu \cdot H$  - вектор магнитной индукции,  $\mu = 1$  - магнитная проницаемость вакуума,  $E$  - вектор напряжённости электрического поля.

Скалярное равенство  $B \cdot E$  нулю означает ортогональность векторов  $B$  и  $E$ , а значит ортогональность (дуальность) их линий уровня. При этом по построению линия уровня скалярного поля  $\phi$  касательна вектор-функции  $B(\phi)$ , а линия уровня скалярного поля  $\theta$  касательна вектору  $E(\theta)$  для начального момента времени  $t=0$  (аналитическое вычисление этих векторов описано ниже). Таким образом, имеем следующие выражения для векторов:

$$\begin{aligned} B(\phi) &= B(\phi, 0) = -\frac{a}{\pi} \nabla \bar{\phi} \times \nabla \phi, \\ E(\theta) &= E(\theta, 0) = -\frac{a}{\pi} \nabla \theta \times \nabla \bar{\theta}, \end{aligned} \tag{1}$$

где величина  $a$  используется для получения правильных размерностей физических величин индукции магнитного поля  $B$  и напряжённости электрического поля  $E$ . Точкам на сфере  $S^2$  Римана или Блоха, или гомологической сфере Пуанкаре соответствуют в гиперсфере  $S^3$  после стереографической проекции на  $R^3$  замкнутые в окружности Вилларсо линии уровня в виде зацепленных силовых линий (для кручёной ЭМВ), образующие геодезические меридианы 2-х мерного тора слоя в  $S^3$ , а самозацепленные силовые линии образуют заузленный тор в виде торических трилистников, пятилистников, ... , многолистников заузленной ЭМВ. Свойство геометрических линий уровня определять именно силовые линии электромагнитного поле (с точностью до физических размерностей векторов касательных к ним) обусловлено тем важным фактом, что поскольку внешний дифференциал от 2-форм элемента поверхности  $S^2$  равен нулю, т.е.

$$d\omega_\phi = 0, d\omega_\theta = 0, \tag{2}$$

то эти формы замкнуты [2]. Локальное расслоение Хопфа  $F^*: S^3 \rightarrow S^2$  по сути становится для внешних форм операцией оттягивания ("pullback") или в российской нотации – перенесения 2-формы элемента поверхности  $S^2$  и внешнего дифференциала от формы в гиперсферу  $S^3$ .

Двухкомпонентная функция  $F$  для использования в операторе оттягивания

$$\begin{aligned} F_\phi^* : S^3 \rightarrow S^2 \text{ 2-формы } \omega_\phi \text{ функцией } F \text{ равна} \\ F = (F_1, F_2) \text{ согласно (10) с учётом (7) равна} \\ F_\phi = (F_1, F_2) = (\bar{\phi}(x_1, x_2, x_3, x_4), \phi(x_1, x_2, x_3, x_4)), \end{aligned} \tag{3}$$

тогда оттягивание  $F_\phi^* : S^3 \rightarrow S^2$  2-формы  $\omega_\phi$  функцией  $F$  согласно (10) и (13) равно:

$$F_\phi^* \omega_\phi = dF_1 \wedge dF_2 = d\phi \wedge d\bar{\phi} / (2\pi \cdot i \cdot (1 + \bar{\phi} \cdot \phi))^2 = g_\phi \cdot d\phi \wedge d\bar{\phi}, \tag{4}$$

где множитель  $g_\phi$ , нормирующий к единице модуль 2-формы  $dF_1 \wedge dF_2$  и преобразующий её в действительные числа, равен:

$$g_\phi = 1 / (2\pi \cdot i \cdot (1 + \bar{\phi} \cdot \phi))^2$$

При этом внешнее произведение 1-форм в (4), а именно

$$\begin{aligned} d\phi = \partial_\mu \phi dx^\mu \text{ и } d\bar{\phi} = \partial_\mu \bar{\phi} dx^\mu, \text{ равно} \\ d\phi \wedge d\bar{\phi} = g_\phi \cdot \partial_\mu \phi dx^\mu \wedge \partial_\nu \bar{\phi} dx^\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

Согласно свойству коммутативности операции оттягивания  $F^*$ , используя (2) имеем  $F_\phi^* d\omega_\phi = d(F_\phi^* \omega_\phi) = 0$ ,  $F_\theta^* d\omega_\theta = d(F_\theta^* \omega_\theta) = 0$ , то есть

$$d(F_\phi^* \omega_\phi) = 0, d(F_\theta^* \omega_\theta) = 0, \tag{6}$$

так как внешний дифференциал от новых (оттянутых в  $S^3$ ) 2-форм  $\Omega^\phi = F_\phi^* \omega_\phi$  и  $\Omega^\theta = F_\theta^* \omega_\theta$  равен нулю, эти 2-формы замкнуты.

Оттянутые 2-формы  $\Omega^\phi$  и  $\Omega^\theta$  выражаются через карту расслоения Хопфа  $h=(\phi, \theta) = (\phi(x_1, x_2, x_3, x_4=c \cdot t), \theta(x_1, x_2, x_3, x_4=c \cdot t))$  нижеследующим образом.

Из соотношений (4) следует, что

$$\Omega^\phi = dF_1 \wedge dF_2 = g_\phi \cdot \frac{\partial_\mu \bar{\phi} \cdot \partial_\nu \phi - \partial_\nu \bar{\phi} \cdot \partial_\mu \phi}{2\pi \cdot i \cdot (1 + \bar{\phi} \cdot \phi)^2} \cdot (dx_\mu \wedge dx_\nu), \quad (7)$$

где «немое» суммирование проводится только по упорядоченным индексам  $\mu < \nu = 1 \dots 4$ , а в числителе дроби стоят частные производные по координатам  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , тогда координатные компоненты 2-формы  $\Omega^\phi$  равны тензору

$$(\Omega^\phi)_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \bar{\phi} \cdot \partial_\nu \phi - \partial_\nu \bar{\phi} \cdot \partial_\mu \phi}{2\pi \cdot i \cdot (1 + \bar{\phi} \cdot \phi)^2}. \quad (8)$$

В стереопроекции на 3-пространство  $R^3$  форма  $\Omega^\phi$  равна

$$\Omega^\phi = g_\phi \cdot \partial_i \phi dx^i \wedge \partial_k \bar{\phi} dx^k = g_\phi \cdot [(\partial_1 \bar{\phi} \cdot \partial_2 \phi - \partial_2 \bar{\phi} \cdot \partial_1 \phi)(dx^1 \wedge dx^2) + (\partial_1 \bar{\phi} \cdot \partial_3 \phi - \partial_3 \bar{\phi} \cdot \partial_1 \phi)(dx^1 \wedge dx^3) + (\partial_2 \bar{\phi} \cdot \partial_3 \phi - \partial_3 \bar{\phi} \cdot \partial_2 \phi)(dx^2 \wedge dx^3)],$$

(с латинскими индексами  $i, k=1 \div 3$ ) и в дуальном координатном базисе  $(dx^1, dx^2, dx^3)$ , трансформируется оператором  $\star$ -«звезда Ходжи» в поливектор равный векторному произведению градиентов  $(\nabla\phi, \nabla\bar{\phi})$  от координатных функций  $\phi(x_1, x_2, x_3), \bar{\phi}(x_1, x_2, x_3)$  в (8), то есть

$$\begin{aligned} \star\Omega^\phi &= g_\phi \cdot [(\partial_1 \bar{\phi} \cdot \partial_2 \phi - \partial_2 \bar{\phi} \cdot \partial_1 \phi) dx^3 - (\partial_1 \bar{\phi} \cdot \partial_3 \phi - \partial_3 \bar{\phi} \cdot \partial_1 \phi) dx^2 + \\ &\partial_2 \bar{\phi} \cdot \partial_3 \phi - \partial_3 \bar{\phi} \cdot \partial_2 \phi) dx^1] = \\ &= g_\phi \cdot \det \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 \\ \partial_1 \bar{\phi} & \partial_2 \bar{\phi} & \partial_3 \bar{\phi} \\ \partial_1 \phi & \partial_2 \phi & \partial_3 \phi \end{pmatrix} = g_\phi \cdot (\nabla\bar{\phi} \times \nabla\phi) = B(\phi), \end{aligned} \quad (9)$$

где поливектор  $\star\Omega^\phi$  определяет безразмерный геометрический вектор касательный к линиям уровня карты  $\phi(x_1, x_2, x_3)$ , т.е. меридианам Вилларсо на торе Хопфа для этой карты оттягивания. Прделав аналогичные операции для 3-х мерного подпространства для дуально сопряжённой 2-формы по карте  $\theta(x_1, x_2, x_3)$ , получим соотношение дуально-подобное (9)

$$\star\Omega^\theta = g_\theta \cdot \det \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 \\ \partial_1 \theta & \partial_2 \theta & \partial_3 \theta \\ \partial_1 \bar{\theta} & \partial_2 \bar{\theta} & \partial_3 \bar{\theta} \end{pmatrix} = g_\theta \cdot (\nabla\theta \times \nabla\bar{\theta}) = E(\theta), \quad (10)$$

где поливектор  $\star\Omega^\theta$  определяет безразмерный геометрический вектор касательный дуальным линиям уровня карты  $\theta(x_1, x_2, x_3)$ , т.е. меридианам Вилларсо на ортогональном торе Хопфа с картой  $\theta(x_1, x_2, x_3)$  ортогональной к карте  $\phi(x_1, x_2, x_3)$ . Таким образом, векторам напряжённости полей определённым по построению в (1), соответствуют эти же вектора в (9,10) уже определённые аналитически из геометрических представлений с точностью до физических размерностей.

Связь этих полей  $(B, E)$  именно с уравнениями Максвелла устанавливается из свойств замкнутости 2-форм в (28), представимых (согласно лемме Пуанкаре) через дифференциал от точных 1-форм  $\Omega^\phi$  и  $\Omega^\theta$  от некоторых безразмерных векторов, которые определены ниже:

$J^\phi = (J^\phi_0, J^\phi_1, J^\phi_2, J^\phi_3)$  и  $J^\theta = (J^\theta_0, J^\theta_1, J^\theta_2, J^\theta_3)$ ,  
эти 1-формы в 4-х мерном пространстве имеют вид

$$\begin{aligned} J^\phi &= J^\phi_0 \cdot dx_0 + J^\phi_1 \cdot dx_1 + J^\phi_2 \cdot dx_2 + J^\phi_3 \cdot dx_3 \\ J^\theta &= J^\theta_0 \cdot dx_0 + J^\theta_1 \cdot dx_1 + J^\theta_2 \cdot dx_2 + J^\theta_3 \cdot dx_3 \end{aligned}$$

Вектора  $J^\phi$  и  $J^\theta$  в физически размерном виде, умноженные, например, на  $a=(h \cdot f/e)$ , где  $h$  – постоянная Планка,  $f$ -частота электромагнитной волны,  $e$  – заряд электрона, равны

$$\begin{aligned} J^\phi_\mu \cdot (h \cdot f/J) &= A^\phi_\mu, \\ J^\theta_\mu \cdot (h \cdot f/J) &= A^\theta_\mu. \end{aligned}$$

Они определяют классические 4-х мерные векторные электромагнитные потенциалы:

$$A^\phi = (A^\phi_0, A^\phi_1, A^\phi_2, A^\phi_3) \text{ и } A^\theta = (A^\theta_0, A^\theta_1, A^\theta_2, A^\theta_3), \quad (11)$$

1-формы от которых соответственно равны  $A^\phi$  и  $A^\theta$ :

$$\begin{aligned} A^\phi &= A^\phi_0 \cdot dx_0 + A^\phi_1 \cdot dx_1 + A^\phi_2 \cdot dx_2 + A^\phi_3 \cdot dx_3 = A^\phi_\mu \cdot dx^\mu \\ A^\theta &= A^\theta_0 \cdot dx_0 + A^\theta_1 \cdot dx_1 + A^\theta_2 \cdot dx_2 + A^\theta_3 \cdot dx_3 = A^\theta_\mu \cdot dx^\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

Вторые формы от 1-форм  $A^\phi$  и  $A^\theta$  в виде внешних дифференциалов от них равны

$$dA^\phi = (\partial_\mu A^\phi_\nu - \partial_\nu A^\phi_\mu) (dx^\mu \wedge dx^\nu) \quad (13)$$

где коэффициенты этих 2-форм электромагнитного поля являются компонентами тензора электромагнитного поля и имеют вид:

$$\Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu A^\phi_\nu - \partial_\nu A^\phi_\mu, \quad (14)$$

Например в (1) компоненты вектора магнитной индукции в карте  $\phi$

$$B_j = -1/2 \cdot e_{ikj} G_\phi \cdot (\partial_i \bar{\phi} \cdot \partial_k \phi - \partial_k \bar{\phi} \cdot \partial_i \phi), \quad (15)$$

они же, но выраженные через тензор  $\Phi^{ik}$  в дуальной карте  $\theta$  равны

$$B_j(\theta) = -1/2 \cdot e_{ikj} \cdot \Phi^{ik}(\theta) = -(B_1(\theta) \ B_2(\theta) \ B_3(\theta)). \quad (16)$$

Взяв внешний дифференциал от (12) и (13), получим вторые внешние дифференциалы:

$$\begin{aligned} ddA^\phi &= d^2 A^\phi = 0, \\ ddA^\theta &= d^2 A^\theta = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

по свойству второго внешнего дифференциала равного нулю от любой внешней формы.

По сути система внешних форм в (17) и есть уравнения Максвелла во внешних формах. Покомпонентная запись их, выраженная через тензор напряжённости электромагнитного поля в (14), имеет вид: первая пара уравнений Максвелла в координатном виде равна:

$$\begin{aligned} e^{\mu\gamma\delta} \partial_\gamma \Phi_{\gamma\delta}(\phi) &= \partial_\gamma \star \Phi^{\mu\delta}(\theta) = 0, \text{ где } \star \Phi_{\gamma\delta}(\theta) \text{ - дуальный тензор,} \\ e^{\mu\gamma\delta} \partial_\gamma \Phi_{\gamma\delta}(\theta) &= \partial_\gamma \star \Phi^{\mu\delta}(\phi) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

вторая пара уравнений Максвелла равна

$$\begin{aligned} \partial_\gamma \Phi^{g\delta}(\phi) &= 0, \\ \partial_\gamma \Phi^{g\delta}(\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где матрица  $e^{\alpha\beta\mu\nu}$  - абсолютно антисимметричный единичный псевдотензор 4-ранга. Коротко, тензорные уравнения Максвелла (16, 17) во внешних формах имеют вид: первая пара -  $d\star\Phi(\phi)=0$ ,  $d\star\Phi(\theta)=0$ ,

вторая пара -  $d\Phi(\phi)=0$ ,  $d\Phi(\theta)=0$ .

Соотношения (15) и (16) для магнитного поля:

$$G_\phi \cdot (\partial_i \bar{\Phi} \cdot \partial_k \phi - \partial_k \bar{\Phi} \cdot \partial_i \phi) = \Phi^{ik}(\theta), \quad (20)$$

аналогичные (20), но для электрического поля в (1) при смене  $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$ , подставленные в (18, 19), определяют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно неизвестных карт преобразования Хопфа  $\phi$ ,  $\theta$ , решаемым по начальным данным Коши.

Смысл равенств (20) состоит в следующем. Сущность в виде зацепленного и заузленного электромагнитного поля описывается, с одной стороны, наблюдаемым физическим тензором электромагнитного поля, а с другой стороны, - эта же сущность определяет собой геометрический объект в виде градиентов карт преобразования Хопфа в качестве гомотопического отображения сферы  $S^2$ , например Пуанкаре (Блоха), сферы stokсовыx-антистоксовыx параметров поляризации плоского электромагнитного поля, в сферу  $S^3$  неевклидового пространства. Именно это пространство  $S^3$  реально существует, но наблюдается оно в стереографической проекции  $S^3$  на наше евклидово пространство  $R^3$  в форме торов Хопфа (т.е. раздутых широтных окружностей сферы  $S^3$ ). На этих торах меридиан (окружность Вилларсо) совпадает с силовой линией магнитной и электрической компоненты электромагнитного поля. То есть это поле визуализирует (путём оттягивания дифференциальных 2-форм) геометрические слои на торе расслоения Хопфа, а меридианы в физической размерности силовых линий на торе являются физическим слоем расслоения Хопфа, эти же меридианы слоя являются орбитами абелевой группы симметрии  $U(1)$  именно электромагнитного поля. Причём гомотопическая симметрия не тривиального расслоения  $h^* : S^3 \rightarrow S^2$  имеет фундаментальную групп петель  $\pi$ : равную  $\mathbf{Z}$  – бесконечное натуральное число оборотов сферы  $S^3$  вокруг сферы  $S^2$  вдоль указанных орбит (меридианов тора) группы Ли.

Таким образом топология геометрического пространства определила существование физического поля с точностью до физических размерностей.

### **Решение для зацепленного и заузленного электромагнитного поля в расслоенном пространстве Хопфа.**

Поскольку решить систему (18, 19, 20) нелинейных уравнений Хопфа относительно функций карты  $(\phi, \theta)$  в общем виде затруднительно [2], то построено частное решение в виде первого приближения. То есть соотношения (20) рассматривается как система уравнений с известной правой частью для тензора электромагнитного поля в виде возбуждающей синусоидальной функции в пространстве и времени, т.е. в виде бегущей вдоль оси тора  $Z=x_3$  плоской монохроматической волны линейной поляризации с соответствующей stokсовой компонентой на сфере  $S^2$ . Тогда в первом приближении функция карты Хопфа  $\phi(x, t)$  находится из нелинейного уравнения в частных производных первого порядка стандартного типа для движения фронта приходящей и уходящей ( $\pm$ ) неоднородной (тороидально заузленной) и не монохроматической (широкополосной по частоте, - импульсной) волны:

$$\partial_0 \bar{\Phi} \cdot \partial_3 \phi - \partial_3 \bar{\Phi} \cdot \partial_0 \phi = \sin(\omega t \pm kx), \quad (21)$$

то есть правая часть в уравнениях (20, 21) рассматривается как вынуждающая «напряжённость поля» этих динамических уравнений.

Так как  $\phi = \alpha + i\beta$ ,  $\bar{\Phi} = \alpha - i\beta$ , то

$$\partial_0(\alpha - i\beta) \cdot \partial_3(\alpha + i\beta) - \partial_3(\alpha - i\beta) \cdot \partial_0(\alpha + i\beta) = \sin(\omega t \pm kx), \quad (22)$$

Для сокращения записи используем «немое» обозначение частных производных то есть

$$\begin{aligned}\partial_0(\alpha - i\beta) &= (\alpha - i\beta)_{,0} = \alpha_{,0} - i\beta_{,0} \\ \partial_3(\alpha + i\beta) &= (\alpha + i\beta)_{,3} = \alpha_{,3} + i\beta_{,3}.\end{aligned}\quad (23)$$

С учётом (23) вместо (21, 22) имеем

$$\alpha_{,0} \cdot \alpha_{,3} + i\alpha_{,0}\beta_{,3} - i\alpha_{,3}\beta_{,0} + \beta_{,0}\beta_{,3} - \alpha_{,3}\alpha_{,0} - i\alpha_{,3}\beta_{,0} + i\beta_{,3}\alpha_{,0} - \beta_{,3}\beta_{,0} = \sin(\omega t \pm kx) \quad (24)$$

или

$$2i(\alpha_{,0}\beta_{,3} - \alpha_{,3}\beta_{,0}) = \sin(\omega t \pm kx). \quad (25)$$

Используя условия Коши-Римана для комплексных переменных  $\alpha_{,0} = \beta_{,3}$ ,  $\beta_{,0} = -\alpha_{,3}$ , уравнение (25) принимает вид

$$\begin{aligned}2i(\alpha_{,0} \cdot \alpha_{,0} + \alpha_{,3} \cdot \alpha_{,3}) &= \sin(\omega t \pm kx) \text{ или} \\ 2i(\alpha_{,0}^2 + \alpha_{,3}^2) &= \sin(\omega t \pm kx)\end{aligned}\quad (26)$$

Аналогично для  $\beta_{,0}$ ,  $\beta_{,3}$

$$2i(\beta_{,0}^2 + \beta_{,3}^2) = \sin(\omega t \pm kx) \quad (27)$$

С учётом нормирующего множителя в (20) имеем

$$\begin{aligned}(\alpha_{,0}^2 + \alpha_{,3}^2) &= \pi(1 + \bar{\phi} \cdot \phi)^2 \sin(\omega t \pm kx) = \pi(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 \sin(\omega t \pm kx) \\ (\beta_{,0}^2 + \beta_{,3}^2) &= \pi(1 + \bar{\phi} \cdot \phi)^2 \sin(\omega \pm kx) = \pi(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 \sin(\omega t \pm kx),\end{aligned}$$

где множитель физической размерности опущен.

Рассматривается движение волны вблизи начала стереографического проектирования около подполярной точки сферы  $S^3$  при нулевых начальных условиях Коши, поэтому для всех величин малых по сравнению с единицей (радиусом сферы  $S^3$ ) и величины  $\alpha$ ,  $\beta$  малы по сравнению с единицей, т.е.  $\alpha^2 + \beta^2 \sim 0$  и  $\bar{\phi} \cdot \phi \sim 0$  в нормирующем множителе, тогда имеем

$$\begin{aligned}(\alpha_{,0}^2 + \alpha_{,3}^2) &\approx \pi \cdot \sin(\omega t \pm kx) \\ (\beta_{,0}^2 + \beta_{,3}^2) &\approx \pi \cdot \sin(\omega t \pm kx).\end{aligned}\quad (28)$$

Решение уравнений (28) для модулей векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  в (31) стандартное [3] - существует только для положительных полупериодов синуса и имеет вид:

$$\alpha = \beta = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1}{(\omega/c)^2 + k^2} \sin\left(\frac{\omega x_2}{c} \pm kx_3\right)} + C_1 d\left(\frac{\omega x_2}{c} + kx_3\right) + C_2, \quad (29)$$

при нулевых начальных условиях Коши вместо (29) имеем

$$\begin{aligned}\alpha = \beta &= \omega \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1}{(\omega/c)^2 + k^2} \sin(\omega t \pm kx_3)} dt + \\ &k \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1}{(\omega/c)^2 + k^2} \sin(\omega t \pm kx_3)} dx_3,\end{aligned}\quad (30)$$

$$\alpha = \beta = C \cdot \int_0^{x_0} \sqrt{\sin(\omega t \pm kx_3)} dt + \int_0^{x_0} \sqrt{\sin(\omega t \pm kx_3)} dx_3. \quad (31)$$

где круговая частота  $\omega = 2\pi f$ , а длина электромагнитной волны  $\lambda = C/f$  -  $C$ -скорость света в вакууме.

Решение интегралов в (30, 31) существует в виде неполного эллиптического интеграла второго рода, т.е.

$$\alpha = \beta = -4E \left( \frac{1}{4} (\pm 2 kx_3 - 2\omega t + \pi) \right) |2 \quad (32)$$

-это автоморфная квазипериодическая функция с линейно нарастающим слагаемым. Однако вектор магнитной индукции и напряжённости электрического поля определяются градиентами скалярных полей (тензором электромагнитного поля), поэтому (32) имеет лишь познавательное значение, а для прикладных целей необходимы значения градиентов, поэтому для вектора магнитной индукции в (1)

$$\begin{aligned} \partial_0 \alpha = \partial_3 \alpha &= \sqrt{\sin(\omega t \pm kx_3)}, \\ \partial_0 \beta = \partial_3 \beta &= \sqrt{\sin(\omega t \pm kx_3)}, \end{aligned} \quad (33)$$

для вектора напряжённости электрического поля в (1) аналогично (33) вычисляются градиенты комплексного скаляра  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \theta &= \gamma + i\delta, \quad \bar{\theta} = \gamma - i\delta \\ \partial_0 \gamma = \partial_3 \gamma &= \sqrt{\sin(\omega t \pm kx_3)}, \\ \partial_0 \delta = \partial_3 \delta &= \sqrt{\sin(\omega t \pm kx_3)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Именно форма полуволнового по пространству синусоидального напряжения используется в эксперименте для возбуждения заузленных антенн.

Важно отметить, что функция  $\sqrt{\sin(\omega t \pm kx_3)}$  имеет импульсный вид в форме графика модулей векторов  $|\mathbf{B}|$  и  $|\mathbf{E}|$  на рис. 1.

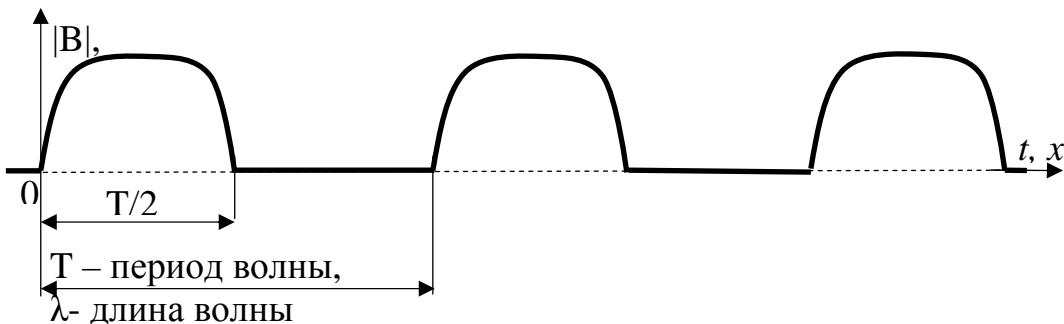


Рис. 1 График сверхширокополосного импульсного распространения заузленной электромагнитной волны в форме фотона-солитона

В соответствии с функцией (34) характер распространения в пространстве и времени представляет собой сверхширокополосную импульсную модуляцию сигнала без заполнения несущей частотой, что и наблюдается в эксперименте. Электромагнитное поле в форме узла сконцентрировано в этом импульсе солитона, не расплывающемся в пространстве-времени. То есть при распространении импульсов в  $S^3$  в стереопроекции на  $R^3$  дисперсия в пространстве и времени сигнала (узла) отсутствует, т.е. он представляет собой фотон-солитон, описываемый нелинейным дифференциальным уравнением (28). Энергия узла сконцентрирована в области топологического солитона, в форме затянутого узла трилистника (без зазоров) силовых линий магнитного и электрического поля.

При движении (качении) импульса в форме заузленного тора вдоль его оси, которое происходит по меридианам гиперсферы  $S^3$  (это прямые линии в стереографической проекции на 3-х мерное евклидово пространство), образуется кручёный луч электромагнитной волны (ЭМВ)

излучения. Этот луч представляет собой касательную развёртку силовых линий торического многолистника в форме топологической косы кручёных лучей (касательных векторов Пойтинга), исходящих от плоскости каждой петли этого многолистника. Плоскости этих петель образуют геликоидальные фронты заузленной волны, а нормали к фронтам образуют спирали геликоид кручёной электромагнитной волны с ненулевым спином и орбитальным моментом. Переплетённые спирали (касательные вектора Пойтинга) и материализуют указанную выше топологическую косу решения уравнения Максвелла.

Для эксперимента было важно то, что в силу описанной геометрии начальные условия Коши уравнений Максвелла расслоенного пространства  $S^3$  в момент времени возбуждения косы заузленной ЭМВ определяются именно на поверхности заузленной антенны, форма и размер петли которой в виде пятилистника должны совпадать с формой и размером петли торического узла заузленной ЭМВ в каждый момент времени (это движение узла определяет феномен течения времени).

Если все петли пятилистника имеют тождественную конфигурацию, то ось косы прямая, в противном случае излучающие петли расфазированы в пространстве-времени и ось косы изгибается в пространстве-времени в форме биений напряжённости полей.

Технологически было сложно создать тождественную конфигурацию петель, поэтому ось излучения (косы) неопределённо изгибалась в пространстве и времени и необходимо было юстировать передающую ФАР и приёмную ФАР путём их линейного и углового взаимного перемещения в пространстве так, чтобы спираль косы излучения ФАР и спирали парциальных излучений петель элементов ФАР максимально совпали в пространстве, тогда наблюдался максимум сигнала для каждой дистанции радиосвязи, что составляло основную трудность эксперимента.

Для реализации указанной цели была создана [3] передающая ФАР и аналогичная приёмная ФАР, а также стенд, на котором размещались эти ФАР в натуральных безэховых условиях.

1. A. F. Ranada, J. L. Trueba Topological electromagnetism with hidden nonlinearity. Сборник: Modern nonlinear optics Part 3. Second Edition Advances in chemical physics. Volume 119. 2001 John Wiley & Sons, Inc. ISBNs: 0-471-38932-3 (Hardback); 0-471-23149-5 (Electronic), p 197.

2. A.F.Ranada. Knotted solutions of the Maxwell equation in vacuum. Journal of Physics A 23, I.815-L.820, 1990.

3. Смелов М.В., Экспериментальное исследование распространения заузленной электромагнитной волны, индуцированной заузленной антенной в натуральных безэховых условиях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.22635, 20.10.2016