Триадная пропорционально-симметричная реконструкция деления целого пополам

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Проанализированы пропорциональные разбиения целого на триады. Они основаны на симметричных записях составных пропорций, включающих равенство трех отношений, и приводят к ряду характерных моделей. В теории разностных уравнений им соответствуют четыре двучленно-аддитивных рекурсии с коэффициентами 1 и 2. Включая известную модель золотого сечения, отображаемую предельным отношением чисел Фибоначчи. Геометрическая интерпретация отдельных решений воспроизводит правильные многоугольники: треугольник, квадрат, пятиугольник (десятиугольник) и шестиугольник. Данные фигуры нашли широкое распространение и служат повторяющимися модулями-паттернами многих образований в живой и неживой природе: кристаллы, вирусы, пчелиные соты, снежинки и др. Первые три составляют основу платоновых тел.

Оглавление

Изменяя порции, меняем и пропорции...

Житейский колорит

Деление пополам подразумевает членение целого на две равные половины.

Абсолютно равные части.

Но не так как однажды объясняла детям учительница: «Две половины целого всегда равны между собой. Не бывает большей или меньшей половины. Я уже столько раз вам это твержу. Но *большая половина класса* (?) до сих пор этого не понимает».

Аналогичное разделение целого на три части ассоциируется, как правило, с неизменным суждением о трех равных долях. Наподобие ритма вальса: раз-два-три…

Число три уникально. О его проявлениях можно говорить бесконечно [1].

Неистощимый предмет для исследований.

Одно из самых популярных чисел-эмблем в символике, религиозной мысли, мифологии, фольклоре, литературе... В различных явлениях культуры [2].

Тройка символизирует синтез двух противоположностей: тезиса и антитезиса.

Она олицетворяет разрешение конфликта, порождаемого двоичными системами, отражает гармонию дуального.

Триада – есть число целого, ибо содержит начало, середину и конец (Аристотель).

Русская традиция с точки зрения числовой символики насквозь троична.

Достаточно вспомнит русскую тройку или обратиться к волшебным сказкам [3].

Даже подзабыв прочитанные в детстве книги, уголками сознания мы легко цепляемся за триады, которые навеяны такими нетленными образами как три богатыря, треглавый змей, три желания или попытки и т.д., оставаясь с нами на всю оставшуюся жизнь.

Заблудиться в трех соснах, обещанного три года ждут, плакать в три ручья, согнуться в три погибели, наврать с три короба, от горшка три вершка... – Подобные словесные формы-выражения не теряют своей популярности в народе и сегодня.

В советской традиции и фольклоре подобному действу отвечал известный образ <сообразить> "на троих". Короткий, емкий сленг. Высвечивает особенности национальной жизни и целый пласт наследия. Не требует специального научного исследования. Одновременно ориентирует на справедливость.

К сожалению, в результате тотального злоупотребления, по данным органов здравоохранения, до сих пор приводит к более трети от всех смертей. Такая нерадостная оборотная сторона модели-медали «одна треть». То есть, каждый третий из равновеликого "на троих" – потенциально-преждевременный усопший. Хотя мог бы ещё здравствовать.

Это не вердикт или упрек, а скорее призыв к здоровому образу жизни, как нравственной основе человеческого бытия.

Тройка стала неизменным спутником многовековой культуры как дань уважения христианской религии. Хотя лично нам никогда не была внятно-понятной фраза «Бог любит троицу». – Вроде как он любит сам себя, и остальное его не волнует.

Элементарная логика показывает несообразность привычного клише с возможным переводом на более точный образ. Например: «Бог любится (любим) в троице».

С вполне ясной и правильной адресацией-ориентацией на людей.

Формализованные объекты

Деление на части относится к классу пропорциональных отношений.

Их разнообразие весьма широкое. Множество вариантов пропорции с дополнительным использованием различных коэффициентов в общем случае становится необозримым.

Круг существенно сужается, если применять некоторые рациональные ограничения.

Не произвольные условия. Но естественным образом выражающие тенденции.

Отдельные условия-ограничения подходят под такие категории, как гармония, согласованность, порядок и даже красота, призванная спасти мир.

В формализованном аспекте допустимо рассматривать соответствующие математические объекты: равенства, пропорции, симметрии, топологию и др.

Возвращаясь к нашему эпиграфу-афоризму, можно сказать, что действо созвучия-гармонии глубоко свойственно и красоте мысли. Включая, оригинальные запоминающиеся изречения в текстовой форме.

Как сказал некто: «афоризм – это маленькая порция в хорошей пропорции».

Напомним, пропорция (лат. *pro* для + *portio* часть, порция) – соразмерность, согласованность, отношение частей между собою и целым; равенство отношений в математике. Добротная *пропорция – отношение нужных порций* (частей, элементов).

Пропорциональный триадром

Мы уже неоднократно обращались к теме формализованного отображения триады.

Так, в статье [4] исследованы абстрактно-математические модели троичной структуризации на основе единичных образований.

Данное направление развивается далее [5] с расширением троичного структурирования в виде формализованных неединичных конструкций.

В работе [6] проанализированы алгебраические уравнения, в основе которых лежит пропорциональное деление целого на три аддитивно-составные части. Неравные, но пропорциональные.

Некоторые из таких структур зиждутся на константе золотого сечения.

В целом модели расширяют идею синтеза математических "золотых" зависимостей, как простейших пропорциональных отношений, на троичные образования.

Все эти формализованные построения можно назвать полем-площадкой проявления триад или *триадромом*. (греч. δρόμος – дорога, улица).

С некоторой ассоциацией на конструкцию самолета с его фюзеляжем и двумя крыльями, напоминающими симметричную триаду.

Именно так. Ибо равновеликое разбиение, так или иначе, предполагает взаимную симметрию частей относительно друг друга.

Чтобы всё как-то объединить и воплотить в исследовательской дорожной карте, пришла идея рассматривать комбинированную (комплексную, составную) пропорцию.

Данный термин для пропорций используется нами для характеристики и сравнения объединенных отношений, содержащих более одного знака равенства, общего вида:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots$$

В симметрично-пропорциональном триадроме берется не любая составная пропорция.

Допустимая область ограничивается рассмотрением только симметричных записей пропорции. Исходя из гипотезы: правильные формы порождают верные содержания. Как главные компоненты любого процесса или предмета.

В частности, изучение целого, составленного из трех последовательных сопряженных частей $a+b+c=1$, в конечном счете, приводит к равенству крайних долей $o=a=c$ и $b=1-2a$. По сути, речь идет о делении на три части, две из которых равны между собой.

Сама составная пропорция ограничивается приравниванием трех отношений

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

где a_1/b_1, a_3/b_3 – крайние или концевые отношения, a_2/b_2 – среднее отношение.

Половина и модель "одна треть"

1. Простейшая модель разбиения состоит в членении целого $a+b+c=1$ на три равные величины согласно комбинированной пропорции

$$x = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \quad \to \quad a = b = c = \frac{1}{3} \approx 0{,}33333\ldots$$

Сюда же относится и более сложная составная пропорция: сумма крайней и средней частей $a+b$ так относится к крайней части a, как сумма крайних $a+c=2o$ – к средней b

$$\frac{a+b}{a} = \frac{o+o}{b} = \frac{b+c}{c}.$$

Она также приводит к равенству трех частей и знаковому отношению – *одной трети*.

После половинного деления $1:2$ и золотого сечения, это, пожалуй, наиболее значимый вид пропорции с богатым философским и численным содержанием. Хотя довольно простой, на первый взгляд.

Половина 0,5 и одна треть 0,333…, а между ними золотое сечение с числом $1-\phi=\phi^2\approx 0{,}382$, – как переходная дорожка от бинарного представления к тринарному многообразию, $\phi=(\sqrt{5}-1)/2$.

Как связующий мостик между бисекцией (дихотомией) и триномиальностью (троичностью), – в длинах меньшей части единичного отрезка [7]:

$$\frac{1}{2} \ - \ \text{ЗС} \ - \ \frac{1}{3}.$$

Есть и отчетливая математическая подоснова: от пропорции – к характеристическому квадратному уравнению (триному)

$$\lambda^2=\lambda+2$$

с эквивалентной рекуррентной формой

$$x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}.$$

Аттрактор этих уравнений, как предельное отношение соседних элементов последовательности, подобно числу золотого сечения, легко представляется в виде бесконечной цепной (непрерывной) дроби

$$\lambda = 1+\frac{2}{\lambda} = 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\dots}}} = 2.$$

Таким образом, квадрат малой константы золотого сечения $\phi^2=1-\phi=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}382$ занимает промежуточное положение между половиной и одной третью – самыми простыми дробями.

К тому же (2, 3) – единственная пара соседних простых чисел, которые образуют «чёт–нечет».

Равенство крайних отношений для элементов

Следующие три составные пропорции характеризуются равенством крайних отношений, составленных из целого и его отдельных частей-элементов.

2. В начальной транскрипции средний элемент пропорции является отношением неравных частей: целое так относится к крайней части $a=c=o$, как она – к средней b

$$\frac{1}{a} = \frac{o}{b} = \frac{1}{c},$$

$$a^2+2a-1=0, \qquad a=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41421; \qquad b=3-2\sqrt{2}\approx 0{,}17157.$$

Имеет место реальное созвучие данной пропорции с золотым сечением целого на две аддитивные части: целое так относится к большему, как оно – к меньшему.

3. В другом случае средний элемент пропорции представляется отношением суммы двух равных частей к третьей части: целое так относится к крайней части $a = c$, как сумма крайних частей $a + c$ относится к средней b

$$\frac{1}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{1}{c},$$

$$2a^2 + 2a - 1 = 0,$$

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}36603 \ ; \qquad b = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}26795 \ .$$

4. Если средний элемент пропорции принять как обратное отношение третьей части к сумме двух равных частей

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{a+c} = \frac{1}{c},$$

то $b = 2$ (?). Следовательно, решения в области вещественных чисел нет, ибо часть не может быть больше целого.

Модификация золотого сечения

Следующая составная пропорция непосредственно соотносится с известным золотым сечением, но в несколько видоизмененной форме.

5. В основу расчета снова берутся три аддитивных элемента.

Составляется такая пропорция: целое так относится к сумме крайней и средней частей, как крайняя – к средней

$$\frac{1}{a+b} = \frac{o}{b} = \frac{1}{b+c},$$

$$a^2 - 3a + 1 = 0,$$

$$a = c = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \phi^2 \approx 0{,}38197; \qquad b = \sqrt{5} - 2 = \phi^3 \approx 0{,}23607,$$

где $\phi = \Phi^{-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}61803$ – малая константа золотого сечения.

Квадратный корень из пяти в классическом золотом сечении целого на две части образуется через радикал из суммы квадратов единицы и двойки $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$.

В нашем случае прослеживается похожая, но всё-таки иная связь: радикал из разности квадратов тройки и двойки $\sqrt{5} = \sqrt{3^2 - 2^2}$ согласно формуле $a = \dfrac{3}{2} - \sqrt{\dfrac{3^2 - 2^2}{2^2}}$.

То есть имеет место дуальное представление пятерки через сумму и разность квадратов двух натуральных чисел $5 = 1^2 + 2^2 = 3^2 - 2^2$.

Равенство крайних отношений для сумм

Следующие две составные пропорции характеризуются равенством крайних отношений, допускающих суммирование элементов целого.

6. Средний элемент пропорции выражает отношение неравных частей: целое так относится к средней части b, как сумма крайней и средней частей – к крайней

$$\frac{a+b}{a} = \frac{1}{b} = \frac{b+c}{c} .$$

Концевые отношения дают равенство $1+\frac{b}{a} = \frac{b}{c}+1$.

С учетом данного соотношения получаем решение:

$$b^2 + 2b - 1 = 0 ,$$

$$b = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41421; \quad a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}29289.$$

Примечательно, что такой же результат дает другая составная пропорция: целое так относится к сумме крайней и средней частей, как средняя – к крайней (подобно вышеописанному золотому сечению, только с перевернутым средним отношением)

$$\frac{1}{a+b} = \frac{b}{o} = \frac{1}{b+c} .$$

$$a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 0 ,$$

$$a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}29289; \quad b = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41421.$$

7. Средний элемент пропорции – отношение целого к сумме равных частей: целое так относится к сумме крайних частей, как сумма крайней и средней частей – к крайней

$$\frac{a+b}{a} = \frac{1}{a+c} = \frac{b+c}{c} .$$

Данная комплексная пропорция приводит к обычному делению пополам.

$$a = c = 0{,}5 ; \qquad b = 0 .$$

Пожалуй, и весь набор разрешимых составных пропорций, подразумевающих рассмотрение только её симметричных записей при делении целого на три части.

Не считая более сложные формульные объединения-суммирования, в том числе с применением коэффициентов.

Объединение результатов

Сводная таблица показывает (табл. 1), что возможные иррациональные решения содержат три квадратных корня: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Так или иначе, но это является следствием деления на три части, из которых две равны между собой, – в симметричном толковании составной пропорции.

Таблица 1

Пропорционально-симметричные модели деления целого на три части

№ п/п	Пропорция	Параметры			
		$a = c$	b	a / b	λ
1.	$\lambda = \frac{a+b}{a} = \frac{o+o}{b} = \frac{b+c}{c}$ $\lambda = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	2 3
2.	$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{o}{b} = \frac{1}{c}$	$\sqrt{2}-1$ 0,41421	$3-2\sqrt{2}$ 0,17157	$1+\sqrt{2}$ 2,41421	$1+\sqrt{2}$ 2,41421
3.	$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{1}{c}$	$(\sqrt{3}-1)/2$ 0,36603	$2-\sqrt{3}$ 0,26795	$(1+\sqrt{3})/2$ 1,36603	$1+\sqrt{3}$ 2,73205
4.	$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{b}{a+c} = \frac{1}{c}$	–	–	–	–
5.	$\lambda = \frac{1}{a+b} = \frac{o}{b} = \frac{1}{b+c}$	$(3-\sqrt{5})/2$ 0,38197	$\sqrt{5}-2$ 0,23607	$(1+\sqrt{5})/2$ 1,61803	$(1+\sqrt{5})/2$ 1,61803
6.	$\lambda = \frac{a+b}{a} = \frac{1}{b} = \frac{b+c}{c}$ $\lambda = \frac{1}{a+b} = \frac{b}{o} = \frac{1}{b+c}$	$1-1/\sqrt{2}$ 0,29289	$\sqrt{2}-1$ 0,41421	$1/\sqrt{2}$ 0,70711	$1+\sqrt{2}$ 2,41421
7.	$\lambda = \frac{a+b}{a} = \frac{1}{a+c} = \frac{b+c}{c}$	0,5	0	0,5	1

Внимательное рассмотрение симметрично-пропорционального деления единичного отрезка на три части (рис. 1) дает основание считать образуемые составные пропорции как приемлемую альтернативу делению пополам и классическому золотому сечению.

Достаточно мысленно объединить две части $b + c$.

Главное отличие состоит в самой пропорции.

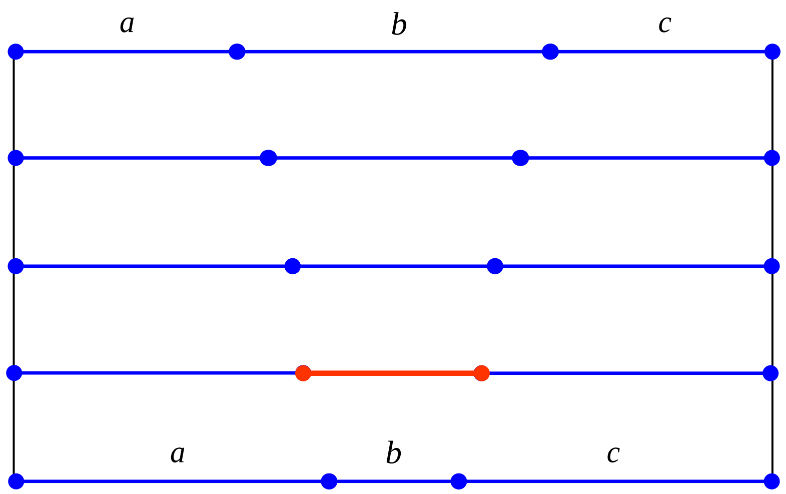
Золотое сечение со своим зеркальным отображением (путем взаимного перемещения двух аддитивных элементов) на самом деле является ассиметричным.

В частности, это хорошо различимо на альтернативных формах записи составной пропорции золотого сечения

$$\frac{1}{o+b} = \frac{a+b}{c} = \frac{1}{b+o};$$

$$\frac{1}{o+b} = \frac{c+b}{a} = \frac{1}{b+o}.$$

Как видно, средние отношения нарушают симметрию в записи составной пропорции.



$$\frac{a+b}{a}=\frac{1}{b}=\frac{b+c}{c}=1+\sqrt{2}$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{o+o}{b}=\frac{b+c}{c}=2$$

$$\frac{1}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{1}{c}=1+\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{o}{b}=\frac{1}{b+c}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi$$

$$\frac{1}{a}=\frac{o}{b}=\frac{1}{c}=1+\sqrt{2}$$

Рис. 1. Примеры симметрично-пропорционального деления единичного отрезка на три части $a+b+c=1$, $o=a=c$; предпоследнее разбиение – золотое сечение на отрезки $a+b$ и c

Геометрические интерпретации

Перейдем от линейного представления к плоскостному отображению.

Мысленно приподнимем вверх крайние точки (на рис. 1) до их совпадения.

В итоге получим вполне закономерные геометрические интерпретации пропорционально-симметричного деления единичного целого на три части в виде совокупности из пяти равнобедренных треугольников (рис. 2) с основанием b и боковыми сторонами $a = c$.

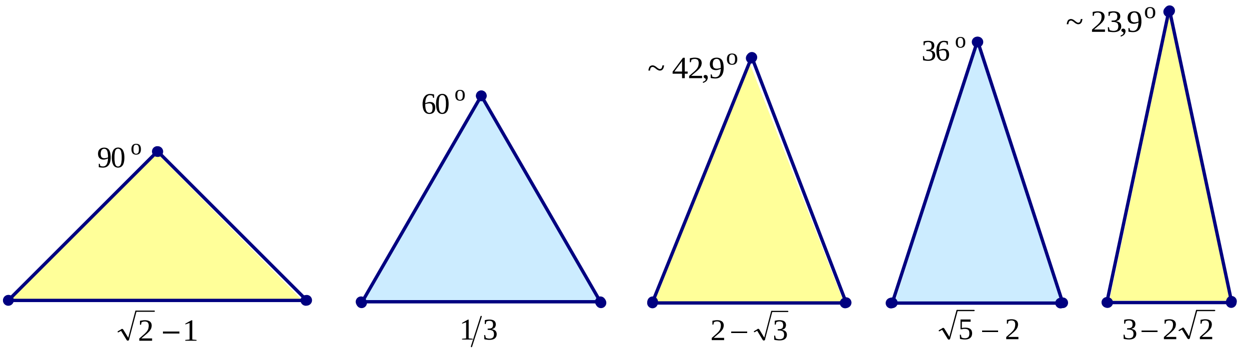


Рис. 3. Равнобедренные треугольники, как геометрическая интерпретация пропорционально-симметричного деления единичного целого на три части

Начинают и замыкают этот геометрический ряд две модели, в основе которых лежит квадратный корень из двух.

Золотой треугольник (остроугольная часть пентаграммы) с углом в вершине 36^{o} представлен здесь как «равный среди равных».

Хотя, возможно, кому-то более приятно на слух латинское изречение: *primus inter pares* – «первый среди равных».

Не столь существенно.

Главное, – среди равных.

Возвратные уравнения

1) Рассмотрим вторую и шестую пропорции.
Они имеют общее решение в части λ-отношения составной пропорции:

$\frac{1}{a} = \frac{o}{b} = \frac{1}{c}$	$\frac{a+b}{a} = \frac{1}{b} = \frac{b+c}{c}$
$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{a}{1-2a} = \frac{1}{1/a-2} = \frac{1}{\lambda-2}$	$\lambda = \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{1+b}{1-b} = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$
$\lambda^2-2\lambda-1=0, \qquad \lambda=1+\sqrt{2}$	

Величину $1+\sqrt{2}$ иногда называют серебряным сечением [7, 8].

Оно возникает при анализе пропорционального деления целого на две части: сумма меньшей и удвоенной большей части так относится к большей, как она – к меньшей.

Непосредственно из записи квадратного уравнения $\lambda^2 = 2\lambda+1$ следуют два примечательных математических объекта:

– цепная (непрерывная) дробь

$$\lambda = 2+\frac{1}{\lambda} = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{\lambda}} = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ddots}}};$$

– бесконечный встроенный радикал

$$\lambda = \sqrt{1+2\lambda} = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\lambda}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

Эквивалентное представление в виде возвратного уравнения дает рекуррентную форму

$$p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}.$$

Для заданной пары начальных условий она генерирует последовательность (**0**, **1)**, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860… – замечательные числа Пелли с многочисленными свойствами [9; 10, *A000129*]:

$$p_n = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_n^{2k+1}\, 2^k = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_{n-k}^{k}\, 2^{n-2k},$$

где $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ или наибольшее целое, не превосходящее ξ;

$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k, равное биномиальному коэффициенту.

$p_n = \sim \left(1+\sqrt{2}\right)^n$ – приближение к ближайшему целому;

$p_{m+n} = p_m p_{n+1} + p_{m-1} p_n$;

$p_{kn} = p_k p_{k(n-1)+1} + p_{k-1} p_{k(n-1)}$;

$$p_n p_{n+1} = 2\sum\nolimits_{k=0}^{n} p_k^2 \ ;$$

$$p_n^2 + p_{n+1}^2 = p_{2n+1};$$

$p_n = F_n + \sum\nolimits_{k=1}^{n} F_k p_{n-k}$ (S. Ralf, 2014), где F_n – числа Фибоначчи;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ p_n & p_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$p_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}.$$

Кроме того, числа Пелли присутствуют в качестве знаменателя в бесконечной последовательности подходящих дробей для квадратного корня из двух.

Числовая модель Пели $p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$ с начальными условиями $\delta = (0\ 1)^{\mathrm{T}}$ устанавливает количество композиций – упорядоченных разбиений натуральных чисел на части $\{1, \underline{1}, 2\}$, то есть единицы двух сортов (цветов) и обычные двойки.

Наличие дуальной единицы как раз и определяется коэффициентом 2.

Например, число 3 имеет 12 композиций:

$$111,\ 11\underline{1},\ 1\underline{1}1,\ 1\underline{11},\ \underline{1}11,\ \underline{1}1\underline{1},\ \underline{11}1,\ \underline{111},\ 12,\ 21,\ \underline{1}2,\ 2\underline{1}.$$

Изменение начальных условий дает последовательность q_n Пели–Люка (**2**, **2)**, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726, 16238, 39202… [10, *A002203*].

Данному ряду свойственно замечательное свойство – простота явной аналитической формы представления элементов в зависимости от порядкового номера

$$q_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

Имеется также устойчивая связь с треугольником Паскаля [11].

Произвольная степень квадратной матрицы, умноженная на новые начальные условия $\delta = (2\ \ 2)^{\mathrm{T}}$, задает ритмику-динамику для новой последовательности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n \\ q_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Модель золотого сечения с характерной рекуррентной формой $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ можно условно рассматривать в транскрипции: «завтра = сегодня + вчера».

Продолжая аналогию, числа Пелли допустимо "облачить в форму": «завтра = дважды сегодня + вчера».

То есть влияние настоящего в будущем здесь существенно превалирует перед воздействием на него прошлого.

Следует напомнить, что квадратный корень из двух $\sqrt{2}$, как математический объект, занимает человеческий ум ещё с древности.

Он не давал покоя и до сих пор не дает [12, 13] в связи с несоизмеримостью единичной стороны квадрата с его диагональю.

В отличие, скажем, от прямоугольного египетского треугольника со сторонами $3:4:5$, когда $3^2+4^2=5^2$.

В результате многовековых поисков постепенно пришли к изучению иррациональных чисел, которые не выражаются отношением целых чисел.

Любопытно, но квадратный корень из двух фигурирует также в предельном приближении трансцендентного числа π:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{корней}}} = \pi .$$

Данное соотношение связано с формулой Виета.

2) Третья составная пропорция $\lambda = \dfrac{1}{a} = \dfrac{a+c}{b} = \dfrac{1}{c}$ имеет решение:

$$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{2a}{1-2a} = \frac{2}{1/a-2} = \frac{2}{\lambda-2};$$

$$\lambda^2-2\lambda-2=0, \qquad \lambda=1+\sqrt{3}.$$

Переход к эквивалентному возвратному уравнению

$$x_{n+1}=2x_n+2x_{n-1}$$

и применение рекурсии с априори заданными начальными условиями формирует последовательности четных чисел:

(**0**, **1**), 2, 6, 16, 44, 120, 328, 896, 2448, 6688, 18272… [10, *A002605*];

(**2**, **2**), 8, 20, 56, 152, 416, 1136, 3104, 8480, 23168… [10, *A080040*].

Первый ряд представим в виде комбинаторной суммы, содержащей как степени двойки, так и тройки:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_{n-k}^{k} \cdot 2^{n-k};$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} \cdot 3^k .$$

Вторая числовая модель допускает простую аналитическую форму

$$x'_n = \left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n .$$

Плюс к этому она формально является удвоением последовательности с начальными условиями $\delta = (1\ \ 1)^{\mathrm{T}}$:

$$x'_n = 2\sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} \cdot 3^k .$$

Форма записи квадратного уравнения $\lambda^2=2\lambda+2$ непосредственно образует примечательные "двоичные" математические объекты:

– цепная (непрерывная) дробь

$$\lambda \;=\; 2+\frac{2}{\lambda} \;=\; 2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\lambda}} \;=\; 2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}\,;$$

– бесконечный встроенный радикал

$$\lambda \;=\; \sqrt{2+2\lambda} \;=\; \sqrt{2+2\sqrt{2+2\lambda}} \;=\; \sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{2+\cdots}}}}\;.$$

То есть, имеет место полная идентичность с известным представлением константы золотого сечения Φ при замене единиц на двойки.

Числовая модель $x_{n+1}=2x_n+2x_{n-1}$ с начальными условиями $\delta=(0\;\;1)^{\mathrm{T}}$ устанавливает количество композиций – упорядоченных разбиений натуральных чисел на части $\{1, \underline{1}, 2, \underline{2}\}$, то есть единицы двух сортов (цветов) и двойки двух сортов.

Например, число 3 имеет 16 композиций:

$$111,\ 11\underline{1},\ 1\underline{1}1,\ 1\underline{11},\ \underline{1}11,\ \underline{1}1\underline{1},\ \underline{11}1,\ \underline{111},\ 12,\ 21,\ \underline{1}2,\ 2\underline{1},\ 1\underline{2},\ \underline{2}1,\ \underline{12},\ \underline{21}.$$

Другими словами, получаем количество способов составления-укладки дорожки длиной n с использованием желтых и синих плиток длиной-размером один и два.

Модель с начальными условиями $\delta=(1\;\;1)^{\mathrm{T}}$ определяет количество композиций натурального числа n из единиц (одного типа) и трех типов других целых положительных чисел [10, *A026150*].

Единение моделей и свойств

Таким образом, довольно неожиданно мы получили любопытное развитие темы разбиения целого на части.

Оказывается, пропорциональное деление целого на триады, основанное на симметричных записях составных пропорций, приводит к рекурсивным двучленно-аддитивным равенствам, которые содержат коэффициент 2 во всех возможных вариантах, включая модель золотого сечения:

$x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$, $\quad\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$ – золотое сечение;

$x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}$, $\quad\lambda=2$ – модель "одна треть";

$x_{n+1}=2x_n+x_{n-1}$, $\quad\lambda=1+\sqrt{2}\approx 2{,}414$ – иногда называют серебряным сечением;

$x_{n+1}=2x_n+2x_{n-1}$, $\quad\lambda=1+\sqrt{3}\approx 2{,}732$.

Достаточно необычный результат. Если учесть изначально принятый подход и изложенный порядок решения на основе симметричных записей составных пропорций.

Первые три математических объекта фигурировали также в модельных структурах пропорционального роста [14].

По сравнению с золотым сечением аддитивные «модели будущего» усиливаются в той или иной комбинации за счет неединичных коэффициентов.

Усиление "вчера" $2x_{n-1}$ дает небольшое усиление "завтра" x_{n+1} (модель "одна треть").

Приумножение "сегодня" $2x_n$ дает большее усиление "завтра" x_{n+1}.

Это вполне закономерно и понятно на интуитивно-рациональном уровне для аддитивной конструкции.

Настоящее x_n уже содержит в себе прошлое x_{n-1}. Поэтому его приумножение вносит более существенный вклад в будущее.

«Жить настоящим» в данной модели совсем не плохо.

Ведь, так или иначе, настоящее перманентно входит в будущее. Можно сказать, не успевая ни подумать, ни понять.

Настоящее – катализатор и непосредственный источник и "формовщик" будущего.

Классическая модель золотого сечения по своей природе абсолютно ассиметрична. Равно как и пропорция, его порождающая.

Но любые манипуляции в алгебраической записи этой модели с изменением единичных коэффициентов на двойки приводит к трем симметричным составным пропорциям.

Если к этому присовокупить симметричную запись самой золотоносной пропорции (она возможна!), то приходим к четырем моделям (табл. 2), объединенным своей общностью в части симметричной записи составной пропорции.

Таблица 2

Пропорциональное деление целого на три части (крайние части равны между собой)

Характеристика	Золотое сечение	Модель "одна треть"	"Серебряное" сечение	Треугольный сектор
Составная пропорция	$\frac{1}{a+b}=\frac{o}{b}=\frac{1}{b+c}$	$\frac{a+b}{a}=\frac{o+o}{b}=\frac{b+c}{c}$	$\frac{1}{a}=\frac{o}{b}=\frac{1}{c}$ $\frac{a+b}{a}=\frac{1}{b}=\frac{b+c}{c}$	$\frac{1}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{1}{c}$
Алгебраическое уравнение	$\lambda^2=\lambda+1$	$\lambda^2=\lambda+2$	$\lambda^2=2\lambda+1$	$\lambda^2=2\lambda+2$
Разностное уравнение	$x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$	$x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}$	$x_{n+1}=2x_n+x_{n-1}$	$x_{n+1}=2x_n+2x_{n-1}$
Непрерывная дробь	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$	$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\ddots}}}$	$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$	$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}$
Встроенный радикал	$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$	$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\cdots}}}$	$\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{2+\cdots}}}$
Аттрактор, λ	$\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ 1,618	2	$1+\sqrt{2}$ 2,414	$1+\sqrt{3}$ 2,732

Первая из них – модель «одна треть» равновеликого деления целого на три части.

Две другие порождают решения, содержащие корни квадратные из двух и трех.

Удивительно и другое: все четыре формы объединяются в одной общей функциональной конструкции

$$f(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right)} = 1 + \cos\frac{2\pi}{n},$$

а именно: $f(5) = \Phi$, $f(6) = 2$, $f(8) = 1+\sqrt{2}$, $f(12) = 1+\sqrt{3}$,

где $\Gamma(z) = \int_{x=0}^{\infty} t^{z-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция, расширяющая понятие факториала на поле комплексных чисел.

Выделенные величины $f(n)$ определяются для аргумента косинуса в угловой мере 72, 60, 45 и 30 градусов соответственно.

Если построить равнобедренные треугольники с данными углами у основания и боковыми единичными сторонами, то длины основания вместе с боковой единичной стороной будут в точности равны нашим четырем аттракторам (рис. 3).

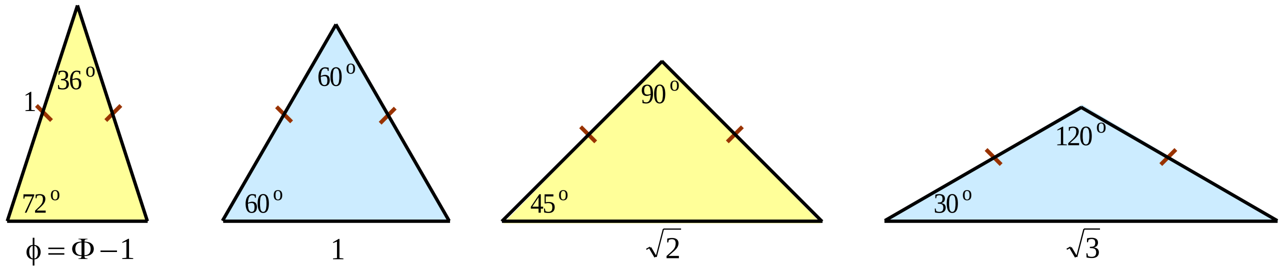


Рис. 3. Равнобедренные треугольники с характерными углами:
формируют аттракторы пропорционально-симметричного разбиения целого на триады

Первый треугольник – золотой [15], второй – равносторонний, третий – прямоугольный, четвертый – одна треть равностороннего треугольника со стороной $\sqrt{3}$.

Кроме прочего, это части правильных n-угольников, вписанных в окружность единичного радиуса, соответственно: 1 – десятиугольника, 2 – шестиугольника, 3 – квадрата, 4 – треугольника (рис. 4).

Они служат повторяющимися модулями-паттернами многих образований живой и неживой природы: кристаллы, вирусы, пчелиные соты, снежинки и др.

Стороны-основания равны $a_n = 2\sin \pi/n$.

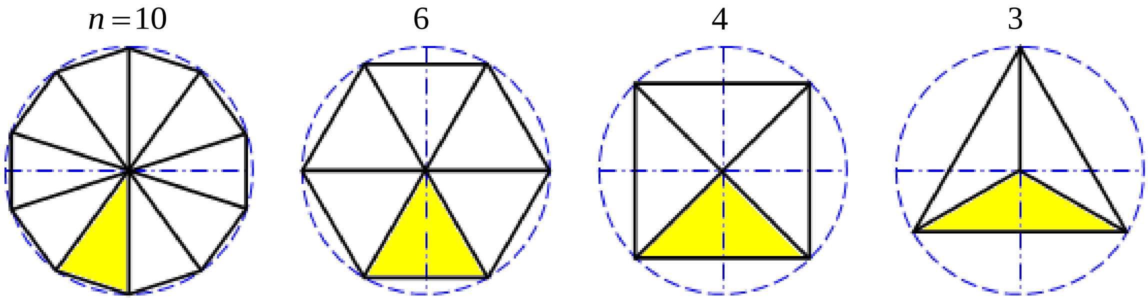


Рис. 4. Равнобедренные треугольники как секторальные части правильных многоугольников

Мир правильных форм

Можно доподлинно утверждать, что своим рождением и развитием математика во многом обязана изучению симметричных равносторонних и/или равноугольных форм.

«Симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство», и «означает тот вид согласованности отдельных частей <объекта>, который объединяет их в единое целое» [16, с. 35–37].

Примечательно и другое: «древние греки никогда не употребляли слово "симметричный" в его современном смысле. В обычном использовании слово συμμετρος означало *соразмерный*, пропорциональный, а у Евклида оно было эквивалентно нашему слову *соизмеримый*» [16, с. 101].

Из планиметрии известно, что количество правильных многоугольников бесконечно, и теоретически можно построить любой правильный n-угольник – выпуклый многоугольник, у которого все стороны между собой равны

Правда здесь есть некоторые ограничения. Так, по теореме Гаусса–Ванцеля правильный n-угольник строится с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$, где p_i – простые числа Ферма (3, 5, 17, 257, 65537) [17].

Циркуль и линейка ещё с античных времен считаются идеальными инструментами.

В частности: у линейки нет делений, и она имеет только одну сторону бесконечной длины, циркуль может иметь сколь угодно большой или малый раствор.

А вот, например, правильный семиугольник строится уже с помощью циркуля и *размеченной линейки*, на которой можно делать отметки (засечки) и с помощью которой можно проводить прямые, проходящие через какую-нибудь точку. Причем отмеченные на линейке точки будут принадлежать данным линиям (прямым или окружностям) [18].

Заметим, что перечень инструментов и набор разрешенных операций в значительной степени обусловлен главным образом историческими причинами и, вообще говоря, мог быть другим.

Но это больше относится к философии математики [19]. Хотя условность вычерчивания того же правильного семиугольника приводила к неверному толкованию его применения в архитектуре [20], якобы из-за сложности построения.

Тем удивительным представляется положение, когда в трехмерном пространстве имеется *только пять* правильных выпуклых многогранников. «Их часто называют платоновыми телами, так как они играют большую роль в натурфилософии Платона» [16, с. 100].

В общем случае N-мерной евклидовой геометрии имеется 6 правильных 4-мерных многогранников, а для $N \geq 5$ размерностей существует по 3 многогранника: симплекс, гиперкуб и гипероктаэдр.

Правильные многогранники

Правильные многогранники (Платоновы тела) – это выпуклые многогранники с максимально возможной симметрией.

Многогранник является правильным, если: он выпуклый, все его грани являются правильными многоугольниками, все вершины лежат на сфере, а в каждой из вершин сходится одинаковое число ребер.

Факт наличия только пяти правильных выпуклых многогранников хорошо известен.

Теорему о том, что платоновских тел ровно пять, и не больше, доказывал ещё Лука Пачоли в своем послании «О божественной пропорции» (1509).

Позволим себе некоторое уточнение-повторение знакомых тез.

Пусть пара целых чисел $\{p,\ q\}$ характеризует односвязное платоново тело, в котором к каждой вершине примыкают q граней в виде правильных p-угольников с внутренними углами $180 \cdot (1 - 2/p)$ градусов.

Из выпуклости многогранника следует, что сумма всех внутренних углов по граням, примыкающим к любой из его вершин, меньше 360°. Следовательно, должно выполняться неравенство $180 \cdot (1 - 2/p)q < 360$, которое равносильно $q(p-2) < 2p$ или $p(q-2) < 2q$.

Отсюда вытекает, что $p,\ q > 2$, а возможные решения определяются простым перебором

p – число углов на грани	***q*** – число граней у вершины	Многогранники **{*p, q*}**
3	3, 4, 5	{3, 3}, {3, 4}, {3, 5}
4	3	{4, 3}
5	3	{5, 3}
> 5	решения нет	–

Значит, других правильных многогранников, кроме пяти тел Платона, не существует.

Так или иначе, но наличие всего пяти правильных многогранников остается довольно необычной математической интригой в абстрактной мозаике-картине геометрических пространств, особенно на фоне счетного множества правильных многоугольников.

К пяти многогранникам можно условно добавить и шестое тело – шар (сферу), как наиболее совершенную объемную фигуру и предельный многогранник с бесконечным числом граней, тем более что общей мерой их длины является радиус описанной сферы.

Платоновы тела в триадной реконструкции

Пять платоновых тел в своей основе имеют три правильные плоские фигуры: треугольник – в тетраэдре, октаэдре и икосаэдре; квадрат – в гексаэдре (кубе); пятиугольник – в додекаэдре.

Как показано выше, эти геометрические фигуры полностью вписываются в рассмотренную нами триадную пропорционально-симметричную реконструкцию деления целого пополам.

Кроме того, имеем цельное совпадение структурных параметров: триада отношений составной пропорции, три правильных многоугольника, трехмерное пространство.

Наличествует также максимально возможная симметрия, как в правильных многогранниках, так и в проанализированных составных пропорциях.

Связи очевидны.

Кто-то скажет, что пифагорейско-платоновская концепция о математическом устройстве Вселенной, включая гипотезу о правильных многогранниках, лежащих в основе устройства мира, якобы устарела и старомодна.

Возможно.

Полемизировать неразумно…

Напомним только слова самого Платона: бог всегда остается геометром.

Знаменитый оксфордский математик Р. Пенроуз выделяет три разных "мира" – мир ментальных образов или сознательного восприятия, физический мир реальностей и платоновский мир математических форм, который не менее реален, чем первые два [21].

Именно там обнаруживаются натуральные числа, все формы и теоремы евклидовой геометрии, законы движения Ньютона, теория струн, теория катастроф и математические модели, поведение фондовых рынков и т.д.

Как отмечал В. Гейзенберг – один из основателей квантовой механики, Платон не так уж и ошибался, когда закладывал в основу элементов мироздания те или иные симметричные структуры.

К. Гёдель – один из самых влиятельных логиков всех времен – показал, что «никакая формальная система, состоящая из конечного множества аксиом и правил, по которым делаются выводы, никогда не сможет охватить всю совокупность математических истин» [22, гл. 7]. Одновременно он полагал, что платоновское представление о математической истине и рационально-математическом характере устройства мира, всё же существует.

«Несмотря на четкие различия между идеальным платоновским миром математических форм и физической реальностью, большинство ученых считали объекты евклидовой геометрии просто дистиллированными абстрактными соответствиями реальных физических предметов» [22, гл. 6].

Знаменитый английский математик и философ А. Уайтхед точно заметил, что «самое надежное обобщение, которое можно сделать при изучении истории западной философии, – что вся она представляет собой примечания к Платону» [23]. – Ни много, ни мало.

Платоновы тела продолжают свой размеренный ход по тропинкам-весям Вселенной.

А предложенная выше структура триадных пропорционально-симметричных моделей позволяет увязать эти правильные многогранники в одно целое с помощью тройственной симметрично-составной пропорции!

Обобщенное "златобайство"

Наряду с правильными многогранниками в античные времена появился прообраз золотого сечения.

В своих "Началах" Евклид увязывал его главным образом с геометрическим построением правильного пятиугольника, а также правильных тел: икосаэдра и додекаэдра, имеющих возле каждой вершины соответственно по 5 3-угольных и 3 5-угольных граней.

То есть, формообразующей подосновой здесь выступает число 5, которое в свою очередь воссоздается прямоугольным треугольником с соотношением катетов $1:2$, так как $1^2+2^2=5$. Именно поэтому данная фигура обычно берется в основу геометрических построений золотого сечения [24].

В подмножествах структур, которые подобны рассмотренным выше симметричным триадным моделям, некоторые авторы склонны считать золотое сечение базовым, а остальные – интерпретировать как обобщение ЗС с наделением "золоченой" терминологии.

Вопреки здравому смыслу. Наперекор логике обобщения.

Придется их разочаровать.

В исследуемых нами моделях нет никакого обобщения или ксерокопирования золотой константы.

Все решения относительно самостоятельны и одновременно равноправны.

Навязчивое стремление к искусственному терминологическому золочению – есть подмена реалий субститутом в виде понятийно-надуманного суррогата «обобщенных золотых сечений (пропорций)» (А. Стахов, Э. Сорока, Г. Аракелян, В. Шенягин …).

Или раздувание очередного, так сказать, "златобайства".

Квадратные уравнения с произвольными коэффициентами, точно как и полиномы общего вида, не имеют ничего общего с золотым сечением, кроме совместной принадлежности к бесконечному множеству алгебраических уравнений.

Золотое сечение уникально и единственно, не считая своего зеркального отражения.

Кроме того, «золотое сечение» – это математическая константа. Но константы, как известно, не обобщаются!

Придуманные словесные уловки-зацепки, вроде как обобщается не число, а принцип его образования (модель), нисколько не изменяет положение. Поскольку фактически идет расширение квадратного уравнения до уровня алгебраического полинома общего вида n-го порядка. Ну, и хорошо. – Только причем здесь ЗС и давно сложившаяся терминология?

К примеру, какое отношение к ЗС имеют аттракторы $1+\sqrt{2}$ или $1+\sqrt{3}$? – Ровным счетом никакого.

Если хочется их как-то объединять-группировать, то следует выполнять в рамках иных понятийных структур. Со своими терминами-определениями.

Без искусственного притягивания-навязывания "золотых масок и красок".

Несообразность терминологического золочения произвольных алгебраических полиномов настолько очевидна, что, по нашему мнению, сродни вирулентной «золотоносной инфекции».

Как детская болезнь "золотизны" в формализованной гармонии.

Платон в "Тимее" писал о додекаэдре: «В запасе оставалось еще пятое многогранное построение, его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему в качестве образца».

То есть золотоносный додекаэдр отражает Вселенную в целом. И к нему, образно говоря, сходятся все остальные ниточки. Но не расходятся, как это хотят представить отдельные авторы своими липовыми расширениями-обобщениями-золочениями.

Достаточно ещё раз хорошенько присмотреться к бесконечной цепной дроби для золотой константы Ф, состоящей из одних единиц-монад.

Это «есмь Альфа и Омега, начало и конец».

Как общая форма-формула абсолюта и верховного властителя мира.

Не случайно максимальная упаковка реального трехмерного пространства (всё остальное – удобные для анализа абстракции) образуется 12 одинаковыми конусами, исходящими из одного центра, каждый из которых касается 5 таких же конусов [25].

Эти конусы вписаны в грани додекаэдра и "стреляют" в двенадцать (6×2 = 12) направлений, которые попарно симметричны относительно центра – начала координат.

Наибольшая плотность конусной упаковки пространства ρ соответствует додекаэдру и выражается через константу золотой пропорции: $\rho = 6\cdot(1-\sin\operatorname{arctg}\Phi) \approx 89{,}6\ \%$.

Вместо заключения

Итак, имеем семейство четырех симметричных разбиений целого на три части, две из которых равны между собой.

Они принципиально различимы, но одновременно едины в своем построении на основе составной пропорции из трех отношений в её разных симметричных представлениях.

Им соответствует линейное однородное разностное (возвратное) уравнение второго порядка $x_{n+1} = px_n + qx_{n-1}$ с коэффициентами $p, q = \{1,\ 2\}$. Включая "золотую" рекурсию $p = q = 1$, которая генерирует последовательности и числа Фибоначчи $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Единение правильных многогранников евклидового пространства в одной пропорционально-симметричной конструкции образуется по троично-составной пропорции.

Это позволяет легитимировать и развить платоновскую концепцию о рационально-математическом характере устройства мира. В том числе с участием кирпичиков-элементов мироздания, в основе которых лежат симметричные структуры – платоновы тела.

Среди них особое место отводится додекаэдру, насквозь "пропитанному" золотой пропорцией.

Возможным развитием данной работы представляется обобщение пропорционально-симметричного деления целого на четыре-пять и большее количество частей.

Данное направление может стать предметом дальнейших исследований для поиска общих закономерностей в структурировании целого.

Несложных, но весьма показательных.

Главное – правильно и непротиворечиво составить, а затем решить соответствующие составные пропорции.

Их очень много. Поэтому нужны дополнительные условия-критерии "фильтрации".

Что из этого получится, пока не знаем.

Qui vivra verra. Поживем – увидим…

Литература:

1. Василенко С.Л. Тринитарная символика: идентификация и толкование // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17576, 13.07.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261110.htm.
2. Александров Н.Н. Троичность и ее выражение в различных явлениях культуры. – 2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/00/0051-00.htm.
3. Магнитов С.Н. Тринитаризм в русских волшебных сказках // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.10208, 27.01.2003. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0205/001a/02050005.htm.
4. Василенко С.Л. Абстрактные модели троичной структуризации: формально-единичные конструкции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17601, 31.07.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261112.htm.
5. Василенко С.Л. Формальные неединичные конструкции троичной структуризации // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17606, 04.08.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261113.htm.
6. Василенко С.Л. Модель золотого сечения в проекции трех частей // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 02.07.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13907.html.
7. Василенко С.Л. Серебрение в числовой гармонии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.05.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=67&sm=2.
8. Silver ratio // Wikipedia, the free encyclopedia. – URL: en.wikipedia.org/wiki/Silver_ratio.
9. Pell number // Wikipedia, the free encyclopedia. – URL: en.wikipedia.org/wiki/Pell_number.
10. The on-line encyclopedia of integer sequences (OEIS). – URL: http://oeis.org/.
11. Koshy T. Fibonacci, Lucas, and Pell Numbers, and Pascal's Triangle // Math. Spectrum, 2011, Vol. 43, Issue 3, p. 125–132. – URL: ms.appliedprobability.org/data/files/feature%20articles/43-3-6.pdf.
12. Василенко С.Л. От шедевра до абсурда один шаг // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17079, 10.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322069.htm.
13. Василенко С.Л. Неподдающийся корень из двух // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17141, 24.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161911.htm.
14. Василенко С.Л., Никитин А.В. Модельные структуры пропорционального роста. Часть 1. Синтез // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=107&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 22.09.2013. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13091.html.
15. Weisstein E.W. Golden Triangle // From MathWorld. A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html.
16. Вейль Г. Симметрия: Пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 192 с. – URL: ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/weyl-symmetry.htm.
17. Гейлер В.А. Неразрешимые задачи на построение // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 12. – С. 115–118. – URL: pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9912_115.pdf.

18. Правильный семиугольник / Словари и энциклопедии на Академике. – URL: dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/154015.

19. Успенский В.А. Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый мир. – 2007. – № 11. – URL: magazines.russ.ru/novyi_mi/2007/11/us10.html.

20. Зубов В.П. Рецензия на книгу М. Гика "Эстетика пропорций в природе и искусстве" // Архитектура СССР. – 1937. – № 5. – С. 66–67. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=12&sm=2.

21. Penrose R. The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe. – London: Jonathan Cape, 2004.

22. Марио Ливио. Был ли Бог математиком? Галопом по божественной Вселенной с калькулятором, штангенциркулем и таблицами Брадиса. Пер. с англ. – М.: Изд-во АСТ, 2013.

23. Whitehead A.N. Process and Reality: An Essay in Cosmology. – New York: Free Press, 1978.

24. Василенко С.Л. Новый взгляд на систематику «Фибоначчи – золотое сечение» // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16189, 01.12.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161734.htm.

25. Василенко С.Л. Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.07.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=31&sm=2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 17.07.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11225.html.

Харьков, Украина

Фото любезно прислал Андрей Радзюкевич
(РФ, Новосибирск)

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html