Олег Черепанов

АРИФМОМЕТРИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Урок первый: нашел факт – дай имя!
Инверсия и реверс, контр-симметрия и конверсия, секстетный элемент.

Тому, кто не чувствует разницы между выражениями «преподать урок» и «задать урок» сообщаю, что Урок первый является попыткой сформулировать домашнее задание любителям разгадывать шарады. Но здесь загадками выступают математические факты, каковых хватит на несколько уроков. Их интерпретацией может заняться каждый, кто не уверен в достаточной обоснованности знаний, называемых естественно-научными.

Гораздо труднее увидеть проблему, чем найти её решение.

Дж. Бернал

Проблема состоит в том, что мы не знаем, в чём она состоит.

А. Кетлер

Последовательности I) 0,5; **0,618…= φ^1**; 0,682…; 0,724…; s_N; … и II) **0,618…= φ^1**; **0,414…** = $\sqrt{2}-1$; 0,302…; **0,236… = φ^3**; …; m_N; … дробных скаляров похожи тем, что ряды I*) 2; **1,618… = φ^{-1}**; 1,465…; 1,380…; S_N; … и II*) **1,618… = φ^{-1}**; **1,414…**= $\sqrt{2}$; 2,302…; **3,236… = $\varphi^{-3}-1$**; …; M_N; …, состоящие из чисел S_N и M_N, обратных s_N и m_N, содержат члены $\varphi^{\pm1}$ и $\varphi^{\pm3}$ с «золотой» константой и иррациональным скаляром $\sqrt{2}$. При этом s_N и S_N являются действительными корнями уравнений $x+x^N=1$ и $y-y^{1-N}=1$, которые при N = 1 имеют единственные решения (x_1 = 0,5 и y_1 = 2 соответственно), а при N = 2 корни $+\varphi^{+1}$ и $-\varphi^{-1}$ первого и решения $+\varphi^{-1}$ и $-\varphi^{+1}$ второго отличаются сигнатурой в четырёх сочетаниях.

Как видно, «золотые» решения объединены записью $\pm\varphi^{\pm1}$, где смена знака у единицы в показателе степени означает инверсию основания, а символы «+» и «–» приобретают смысл арифметических действий, когда числа s < 1 и S > 1 входят в $s^1+s^N = S^1-s^{N-1} = S^N-S^{N-1} = 1$. Однако в известных исследованиях «золотых» отношений отрицательные корни $-\varphi^{-1}$ и $-\varphi^{+1}$ проигнорированы, что привело к потере информации.

Очевидно, что скаляры s_N и S_N, как первые корни уравнений $x+x^N=1$ и $y^N-y^{N-1}=1$, заданы натуральным числом N в показателе степени, которое одновременно обозначает их место или номер (№ = N) в соответствующем ряду. Это значит, что «большие» (> 1) и «малые» (< 1) корни, как взаимно обратные числа, имеют один адрес и образуют систему, позволяюшую по значению «малого» корня находить «большой» и наоборот. Но это не строго математически.

Системные s-числа для N от 1 до 7

N	1	**2**	3	4	5	6	7	…	∞
s	0,5	φ^{+1}	0,682…	0,724…	0,778…	0,796…	0,811…	…	<u>1</u>
S	2	φ^{-1}	1,465…	1,380…	1,324…	1,285…	1,255…	…	<u>1</u>

Считая смену сигнатуры единичного показателя степени у $\pm\varphi^{\pm 1}$ действием, обычно называемым инверсией, введём в арифметику понятие реверса как операции, учитывающей не только положительные, но и отрицательные значения парных корней уравнений 1) $x + x^{N} = 1$ и 2) $y - y^{1-N} = 1$ при N = 2. Этого требует необъективность формулы $\Phi^{-1} = \varphi$, не учитывающей сигнатурные признаки решений $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 \pm (2+\varphi^3)}{2}$ и $y_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{+1 \pm (2+\varphi^3)}{2}$ квадратных уравнений, по сути эквивалентных, поскольку из $y^{+1} - y^{-1} = 1$ следует $y^{+2} - y^{+1} = 1$, что отвечает $x + x^2 = 1$. Но недостаточность инверсии для описания «золотой» арифметики порождает сомнение в её достоверности и обязывает к поиску нетривиальных сочетаний остепенённых чисел Φ и φ, меняющих знак при переходе от одного бинарного выражения к другому.

Для начала возьмём тождество $2 = \varphi^{-1} + \varphi^{+2}$, которое инверсией первого слагаемого превратим в $1 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2}$. А отсюда $-\varphi^{-1} + \varphi^{+2} = -2\varphi^{+1}$ при обратной инверсии с учётом реверса у первого из слагаемых. При этом инверсно-реверсная процедура замены всей сигнатуры не изменяет тождества $\varphi^{-1} - \varphi^{+1} = 1$, а полная смена знаков в равенстве $\varphi^{+1} + \varphi^{+2} = 1$ даёт $-(2^2 + \varphi^{+3})$ на месте единицы, откуда $2^2 + \varphi^{+3} = \varphi^{-1} + \varphi^{-2}$. А из тождества $2\varphi^{-1} = 3 + \varphi^{+3}$ после инверсии первой и третьей степеней числа φ, дополняемой реверсом, следует $-2\varphi^{+1} = -(1 + \varphi^{+3})$. Кроме того, полное преобразование сигнатуры скаляра φ не изменит тождества $2^2 = \varphi^{-3} - \varphi^{+3}$ и не затронет равенств $\varphi^{-1} + \varphi^{+1} = \sqrt{5}$ и $\varphi^{-2} - \varphi^{+2} = \sqrt{5}$, где $\sqrt{5} = 2 + \varphi^3$, тогда как смена верхнего (инверсного) и нижнего (реверсного) знаков у одного из двух слагаемых даёт $2\varphi^{-1} = 3 + \varphi^{+3}$ и $2\varphi^{-2} = 5 + \varphi^{+3}$, откуда $\varphi^{+1} = \frac{2}{3+\varphi^{+3}} = \frac{2}{2+2\varphi^{+1}} = \frac{1}{1+\varphi^{+1}}$ и $\varphi^{+2} = \frac{2}{5+\varphi^{+3}} = \frac{2}{2^2+2\varphi^{+1}} = \frac{1}{2+\varphi^{+1}}$.

Таким образом, инверсно-реверсные процедуры, как аналоги арифметических действий, обнажают существенные связи степеней ±1, ±2 и ±3 основания φ, вычисляя его операциями с участием единицы и двойки. То есть, скаляры 1 и 2 без участия каких либо других чисел определяют странные числа $\varphi^{-1} = (1:2)^{+1} + [1 + (1:2)^{+2}]^{1:2} = 1{,}618\ldots$ и $\varphi^{-3} = (1:2)^{-1} + [1 + (1:2)^{-2}]^{1:2} = 4{,}236\ldots = 2^2 + \varphi^3$ операционно. При этом первая и третья степени «золотого» основания являются членами последовательности m-скаляров, которую рассмотрим ниже, а пока для наглядности представим её начальные члены в ячейках таблицы.

Системные m-числа для N от 1 до 7

N	**1**	**2**	3	**4**	5	6	7	…
m	$\boldsymbol{\varphi^{+1}}$	$\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$	0,302…	$\boldsymbol{\varphi^{+3}}$	0,192…	0,162…	0,140…	…
M	$\boldsymbol{\varphi^{-1}}$	$\boldsymbol{\sqrt{2}+1}$	3,302…	$\boldsymbol{\varphi^{-3}}$	5,192…	6,162…	7,140…	…

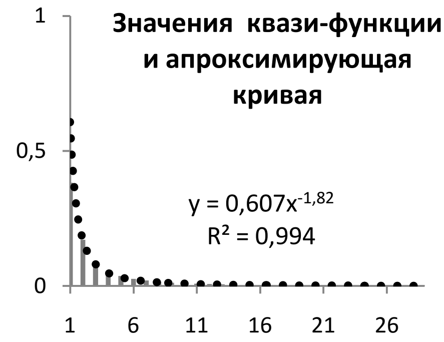
Очевидно, что системные скаляры s_N и S_N при $N \to \infty$ приближаются к единице соответственно снизу и сверху. Но если ряды $\{s_N\}$ и $\{S_N\}$ дополнить конечным элементом $\underline{1}$, то при N = ∞ равенства $s^1 + s^N = 1^1$, $S^1 - s^{N-1} = 1^1$ и $S^N - S^{N-1} = 1^1$ сохраняют арифметический смысл только при удвоении определенных членов, что является бифуркацией на бесконечности. При этом дихотомии $1^1 = 0{,}5 + 0{,}5$ и $\underline{1} + \underline{1} = 2$ задают единицы 1^1 и $\underline{1}$, формально отличающиеся вдвое: $\underline{1} = 2 \cdot 1^1$. А при $N = 2$ уравнения $x + x^N = 1$ и $y - y^{1-N} = 1$ имеют «золотые» корни, не только инверсные (взаимно обратные), но и разные по знаку. Поэтому запись $\varphi^{-1} = \Phi$, означая инверсию, не отражает всей полноты связей парных корней данных уравнений. И этот недостаток теории «золотых» отношений требуется устранить.

Как известно, ряды $\{s_N\}$ и $\{S_N\}$ с нумерацией парных элементов натуральными числами $N = 1, 2, \ldots$ называют «золотыми» *s*- и *p*-пропорциями [1,2]. Но теперь надо отказаться от понимания последовательностей $\{s_N\}$ и $\{S_N\}$ как *s*- и *p*-рядов, которые из-за незнания всех свойств неосторожно считают обобщением «золотого» сечения. При этом известны так называемые «металлические» пропорции [3], члены которых также взаимно обратны, а во главе рядов с элементами, вычисляемыми по формулам $m_N = 0{,}5(\sqrt{2^2 + N^2} - N)$ и $M_N = 0{,}5(\sqrt{2^2 + N^2} + N)$, где $M_N = |\, m_N \,|^{-1}$, стоят числа Фидия $\varphi = 0{,}618\ldots$ и $\Phi = 1{,}618\ldots$ И из таблицы $M - m = N$.

Заметим, что члены $\{m_N\}$ и $\{M_N\}$ с номером N являются парными корнями квадратного уравнения 3) $z^2 - Nz = 1$. Причём значение «малого» корня m отрицательно и, значит, инверсию «большого» корня M следует дополнить реверсом. То есть, равенство $m = M^{-1}$ верно с точностью до знака скаляра слева.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N	$2^2 + N^2$	$[B]^{0,5}$	[C] - N	m_N	[C] + N	$M_N = 1/m_N$	M - m = N	$M^2 - 1 = MN = N^2 + N/M$	M/N = 1 + 1/MN
1	5	2,236068	1,236068	0,618034	3,236068	1,61803	1	1,618034	1,61803
2	8	2,828427	0,828427	0,414214	4,828427	2,41421	2	4,828427	1,20711
3	13	3,605551	0,605551	0,302776	6,605551	3,30278	3	9,908327	1,10093
4	20	4,472136	0,472136	0,236068	8,472136	4,23607	4	16,94427	1,05902
5	29	5,385165	0,385165	0,192582	10,38516	5,19258	5	25,96291	1,03852
6	40	6,324555	0,324555	0,162278	12,32456	6,16228	6	36,97367	1,02705
7	53	7,28011	0,28011	0,140055	14,28011	7,14005	7	49,98038	1,02001
8	68	8,246211	0,246211	0,123106	16,24621	8,12311	8	64,98485	1,01539
9	85	9,219544	0,219544	0,109772	18,21954	9,10977	9	81,98795	1,01220
10	104	10,19804	0,198039	0,09902	20,19804	10,09902	10	100,9902	1,00990
11	125	11,18034	0,18034	0,09017	22,18034	11,09017	11	121,9919	1,00820
12	148	12,16553	0,165525	0,082763	24,16553	12,08276	12	144,9932	1,00690
13	173	13,15295	0,152946	0,076473	26,15295	13,07647	13	169,9942	1,00588
14	200	14,14214	0,142136	0,071068	28,14214	14,07107	14	196,9949	1,00508
15	229	15,13275	0,132746	0,066373	30,13275	15,06637	15	225,9956	1,00442
16	260	16,12452	0,124515	0,062258	32,12452	16,06226	16	256,9961	1,00389
17	293	17,11724	0,117243	0,058621	34,11724	17,05862	17	289,9966	1,00345
18	328	18,11077	0,11077	0,055385	36,11077	18,05539	18	324,9969	1,00308
19	365	19,10497	0,104973	0,052487	38,10497	19,05249	19	361,9972	1,00276
20	404	20,09975	0,099751	0,049876	40,09975	20,04988	20	400,9975	1,00249
21	445	21,09502	0,095023	0,047512	42,09502	21,04751	21	441,9977	1,00226
22	488	22,09072	0,090722	0,045361	44,09072	22,04536	22	484,9979	1,00206
23	533	23,08679	0,086793	0,043396	46,08679	23,04340	23	529,9981	1,00189
24	580	24,08319	0,083189	0,041595	48,08319	24,04159	24	576,9983	1,00173
25	629	25,07987	0,079872	0,039936	50,07987	25,03994	25	625,9984	1,00160
26	680	26,07681	0,07681	0,038405	52,07681	26,03840	26	676,9985	1,00148
27	733	27,07397	0,073973	0,036986	54,07397	27,03699	27	729,9986	1,00137
28	788	28,07134	0,071338	0,035669	56,07134	28,03567	28	784,9987	1,00127
29	845	29,06888	0,068884	0,034442	58,06888	29,03444	29	841,9988	1,00119

В стобцах E и G таблицы *Excel* представлены результаты вычисления 29 элементов $(m,M)_N$ общих для последовательностей {m} и {M}. При этом скаляры $\dfrac{m_N}{M_N}=\dfrac{[C]-N}{[C]+N}=\dfrac{1-N/[C]}{1+N/[C]}=m^2$, как отношения чисел из стобцов D и F образуют последовательность $\{m^2\}$ квадратичных элементов, представленных гистограммой с линией тренда, построенной *Excel* по 29 значениям N и $[C] = (2^2 + N^2)^{0,5}$. Но *Excel* ошибается, неверно определяя огибающую гистограммы степенной функцией, тогда как отношение «малых» и «больших» корней уравнений 3) $z^2 + N z = 1$ с достоверностью $R^2 = 1$ дискретно изменяется по дробно-линейному или гиперболическому правилу. Это позволяет назвать дроби $\dfrac{1-N/[C]}{1+N/[C]}=m^2$ с контр-симметричными (по отношению к числу 1) числителем и знаменателем гипер-дробями и опираться на это несложное понятие в дальнейших изысканиях.



Изучение парных решений квадратных уравнений (3) обнаруживает связь $M_N^2 - Nm_N = Z$, где Z – целое число вида $N^2 + 1$. Поэтому $M^2 - N^2 = N\,m + 1$, откуда $1 - (N\,m)^2 = N\,m^3 + m^2$ или $1 = m^2(N^2 + 1) - N\,m^3$, что верно только после подстановки $-m$ вместо m с учётом степени «малого» корня. При этом тождества, связывающие «большой» корень M с его номером № = N, записаны в столбцах I и J таблицы белыми буквами на чёрном фоне.

Приведём равенство $M^2 - N^2 = 1 + N/M$ к виду $\dfrac{1-N/M}{1+N/M}=M^{-2}(1+N/M)^{-1}$ и будем считать, что квази-функция $\dfrac{1-k}{1+k}=K$, где $k=N/M$, своими значениями $K=\dfrac{m^2}{1+k}$ привязывает точки $(k, K)_N$ к дуге виртуальной гиперболы с началом в пункте $(k = \varphi^{+1}, K = \varphi^{+3})_1$. А её второй пункт $(k, K)_2$ координируют скаляры $k_2=\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ и $K_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+3}$ со свойством взаимозамены $\dfrac{1-k}{1+k}=K \leftrightarrow k=\dfrac{1-K}{1+K}$, общим для любой пары $(k, K)_N$. Это свойство назовём конверсией и обозначим её как $(- \leftrightarrow -)$. Ясно, что конверсия $(\varphi^{+1} \leftrightarrow \varphi^{+3})$ связывает гипер-дроби $\varphi^{+1}=\dfrac{1-\varphi^{+3}}{1+\varphi^{+3}}$ и $\varphi^{+3}=\dfrac{1-\varphi^{+1}}{1+\varphi^{+1}}$ с числом Фидия в степени 1 и 3. Причём инверсию дробей φ^{+1} и φ^{+3} сопровождает реверс знаков «+» и «–» в числителе и знаменателе, эквивалентный смене сигнатуры единиц.

Итак, гипер-дроби $\dfrac{1-k}{1+k}=K$ и $k=\dfrac{1-K}{1+K}$, числители и знаменатели которых контр-симметричны относительно единицы, сопряжены конверсией, как и переменные элементы гипер-дроби $\dfrac{1-N/[C]}{1+N/[C]}=m^2$, где $\dfrac{N}{[C]}=\dfrac{N}{\sqrt{2^2+N^2}}=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}=\omega$. Ясно, что $(m^2 \leftrightarrow \omega)$.

Очевидно, что отношение $\left(\frac{m}{M}\right)_N$ равняется m^2 и имеет вид $m^2 = \frac{1-\sqrt{1+(2/N)^2}}{1+\sqrt{1+(2/N)^2}} = \frac{1-\omega_N}{1+\omega_N}$,

откуда $\omega_N = \frac{1-m^2}{1+m^2}$. При этом $\omega_N \to 1$, если $N \to \infty$. А когда $\omega_1 = 5^{-0,5} = (2 + \varphi^3)^{-1}$ при $N = 1$, то

$m_1^2 = \frac{1-\omega_1}{1+\omega_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \varphi^2$. Кроме того, при $N = 1$ будет $1 = 2\varphi^2 + \varphi^3$, откуда $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ или $5 = 2\varphi^2 + \varphi^{-3} = 2\varphi^{-2} - \varphi^3$ после поочерёдной смены знаков показателей степени и реверса сигнатуры второго слагаемого. Но если $m_2^2 = \frac{1-\omega_2}{1+\omega_2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \lambda_2$ при $N = 2$, а $\omega_2 = 2^{-0,5}$, то

$\lambda_2 + \lambda_2^{-1} = 6$. То есть, $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 6 = 1+2+3 = 1\cdot 2\cdot 3$. И что любопытно, равенство $\frac{2\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pm 1} = \sqrt{2}$ из единиц и двоек безразлично к смене знака «+» на «–» в числителе и знаменателе и не изменяется при перемножении дробей с разными знаками.

Похоже, что числовые ряды из «малых» корней уравнений 1) $x + x^N = 1$ и 3) $z^2 + Nz = 1$, где $N = 1, 2, \ldots$, структурно одинаковы, так как

а) значение «малого» корня (s или m) задано его номером в соответствующей последовательности;

б) последовательностям $\{s_N\}$ и $\{m_N\}$ сопутствуют ряды $\{S_N\}$ и $\{M_N\}$ из обратных чисел, элементы которых в отношении дают квадратное число, а при перемножении - единицу;

в) N-й член последовательности ($\{s\}$ или $\{m^2\}$) имеет число-антипод ($\underline{s}$ или ω) и составляет с ним

пару-бинар ($(s,\underline{s})_N$ или $(m^2,\omega)_N$), где $\underline{s} = \frac{1-s^N}{1+s^N} = \frac{s^{+1}}{1+s^N}$ и $\omega = \frac{1-m^{+2}}{1+m^{+2}} = \frac{Nm}{1+m^{+2}}$;

г) бинары $(s,\underline{s})_N$ и $(m^2,\omega)_N$, как двухмерные точки, распределены по дуге гиперболы, поскольку их конверсивные ($(s \leftrightarrow \underline{s})$ и $(m^2 \leftrightarrow \omega)$) члены связаны как x и y в дробно-линейной функции $y = \frac{1-x}{1+x}$.

Сходство рядов из парных решений уравнений (1), (2) и (3) по признакам а, б, в и г определённо говорит о единстве их структурного устройства. Но бинары системных уравнений, построенные из «малых» корней и их антиподов, распределены по гиперболе дискретно, тогда как в геометрии эта линия непрерывна.

Итак, зная, что $s^{+1} + s^N = 1$ и $s^{-N} - s^{1-N} = 1$ и приравнивая левые части равенств, получим $(1-s^{2N})s^{-N} = (1+s^N)s^{+1}$, откуда $\frac{1-s^N}{1+s^N} = \frac{s^{+1}}{1+s^N}$. Ясно, что скаляры $1 - s^N = a$ и $1 + s^N = b$ контрсимметричны ($a + b = 2$), а числа-антиподы $\frac{s^{+1}}{1+s^N} = c$ и $s^N = d$ конверсивны. При этом дроби $c < 1$ и $d < 1$ вместе с $a < 1$ и $b > 1$ при совместном изменении в рамках гипотезы континуума удерживают связи $b(1 + c) = (1 + c)(1 + d) = 2$ и $a(1 + c^{-1}) = (1 + c^{-1})(1 - d) = 2$ с целыми 1 и 2 как инвариантами процесса, согласующими частные значения a, b, c и d, обусловленные «малыми» корнями s_N = 0,5; 0,618…; … уравнения $x + x^N = 1$. То есть, $\left(1+\frac{s^{+1}}{1+s^N}\right)(1+s^N)=2$ и $\left(1+s^{-1}+s^{N-1}\right)(1-s^N)=2$.

А теперь представим факты, обосновывающие арифметику системных скаляров, свободную от нуля и от бесконечности при формальном различии остепененных единиц 1^1 и 1^2.

Определим понятие секстетной структуры множества действительных чисел от 0 до 2, представляя двойку как $2 = a + b$, где слагаемые $a = 1 - d$ и $b = 1 + d$ связаны отношением порядка $0<a\le b<2$ и либо равны единице каждый, либо контрсимметричны относительно нее с разницей $\mp d=\frac{b-a}{2}$, именуемой числом-отклонением. При этом антипод $c=\frac{a}{b}$ скаляра d назовём числом-отношением. И в результате получим три разных представления системной двойки: как A) $2 = a + b$, как B) $2 = a\,(1 + c^{-1}) = (1 - d)\,(1 + c^{-1})$ и как C) $2 = b\,(1 + c) = (1 + d)\,(1 + c)$.

В итоге дробные скаляры $a\in(1,0)$, $b\in(1,2)$, $c\in(1,0)$ и $d\in(0,1)$ вместе с целыми 1 и 2 образуют математический элемент, члены которого связаны арифметическими операциями – адицией, субстракцией, мультипликацией и дивизией. При этом числа a и b контрсимметричны, а скаляры c и d конверсивны, то есть взаимозаменимы в рамках гипер-дроби $c=\frac{1-d}{1+d}$.

Ясно, что шести-членные образования ✧1 \ a \ b \ c \ d \ 2✧ или скалярные секстеты общего вида \ ✧ \ не могут состоять из так называемых вещественных чисел, включающих
1) целые (положительные и отрицательные);
2) рациональные с теми же знаками, одновременно обозначающие арифметические действия;
3) иррациональные, не сводимые к отношению целых.

Выражения (B) и (C) представим в виде $1=\frac{2}{1+d}-c^{+1}$ и $1=\frac{2}{1-d}-c^{-1}$, откуда сразу следует двойственность числа 1: при $d = 0$ оно определено разностью $1 = 2 - 1$, а при $d \to 1$, когда $a \to 0$ и $b \to 2$, единица $\underline{1} = \infty - \infty$ из (C) сингулярна.

Сосуществование в одной математической системе двух неэквивалентных единиц является отличительным признаком арифмометрии, в рамках которой натуральные числа, как аргументы квази-функций, одновременно являются номерами её значений. Например, элементы числовой последовательности $\{s_N\}$ условием $s + s^N = 1$ связаны с единицей и определены числом N как номером позиции скаляра s_N в соответствующем ряду.

С с ы л к и

1. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. – М., «Радио и связь», 1984.

2. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009.

3. Стахов А.П. Металлические Пропорции – новые математические константы Природы. (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm)