Золотое сечение в зазеркалье:
размышления о книге Г.Б. Аракеляна «Математика и история золотого сечения» (2014)

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Математический образ золотого сечения (ЗС) соотношения целого и его аддитивных частей воистину уникален. В равной степени достаточно простой в своем понимании. Именно этот аспект делает его весьма доступным предметом для исследований людьми с разными профессиональными устремлениями. Одновременно происходит искусственное внедрение ЗС во многие, не свойственные ему процессы и объекты. В основной массе без должных проработок и доказательств. Феномен ЗС в итоге часто подвержен девальвации и превращению в бессистемную и неорганизованную смесь малосодержательных текстов-образов, которые искажают или затуманивают суть золотого сечения, либо приписывают ему мнимые смыслы и значения. На этом фоне свежо и по-новому выделяется объемистое описание "золотоносной" проблематики, выполненное армянским доктором философии Г.Б. Аракеляном. Есть, конечно, в книге отдельные спорные и даже противоречивые моменты, которые вызывают вопросы и могут быть неоднозначно оценены при применении. А где их не бывает? – Так или иначе, любая книга – понятие уникальное. И своего читателя всегда найдет. Мы же поделимся собственными размышлениями...

Лучшее – враг хорошего...

Оглавление

Введение

Мысль приведенного эпиграфа встречается в разных интонациях-вариациях у Джованни Боккаччо, Уильяма Шекспира, Вольтера и других писателей-просветителей.

Чаще всего как ироническое предупреждение в контексте того, что в своем стремлении к лучшему мы часто портим хорошее.

"Лучшее" можно и не достичь, но при этом вполне реально потерять уже достигнутое "хорошее".

Людям свойственно постоянно что-то изобретать и придумывать. Но, как часто бывает, и это не выглядит оптимистично, иные выдумки способны представлять новые положения (устройства) только хуже. Так же как «нет предела совершенству»...

Озвученное имеет к нашей теме непосредственное отношение.

В последние годы феномен золотого сечения (ЗС) как снежный ком стремительно обрастал и продолжает обволакиваться разного рода раскрасками, добавлениями-фантазиями и просто измышлениями, весьма далекими от научного представления.

«Есть немало профессионально написанных работ, но ещё больше любительской экзотики, чрезмерной восторженности, некритических оценок и недостоверных данных, выдающих желаемое за действительное. Вопреки распространенному мнению, достаточно надежные факты применения принципа ЗС за пределами математики можно сосчитать на пальцах. История ЗС полна заблуждений, спорных гипотез и "притянутых за уши" фактов, основанных на сомнительных измерениях» [1, с. 5].

На этом фоне риторики-разноголосицы, часто псевдонаучной, заметно и по-новому выделяется скрупулезное описание "золотоносной" проблематики [1], которое прилежно выполнил армянский ученый Грант Бабкенович Аракелян – доктор философских наук, с.н.с. отдела социологии Института философии, социологии и права НАН РА.

В книге удачно сочетаются теоретическая подоснова и использование обширного конкретно-исторического материала. Безусловным достоинством является хороший стиль изложения, простой и лаконичный язык. Читается легко. Много интересных иллюстраций.

Монография будет интересна и полезна, прежде всего, научному сообществу, которое интересуется вопросами гармонии в сочетании с золотой пропорцией.

Объемистые проработки Г. Аракеляна способствуют положительной динамике в поиске новых взаимосвязей золотого сечения с объектами окружающего мира.

Автор наверняка приободрил часть читательской аудитории. Артикулировал их мысли и ожидания в направлении архиважной значимости пусть даже небольшой по составу подборки математических свойств ЗС. Особенно вдохновил ревностных адептов и приверженцев "золотой" вездесущности на новые исследования-свершения в направлении расширения «радужного спектра» (по Ньютону) "золотоносной" темы.

Это очень важный аспект. Равно как и вклад в популяризацию известной темы.

К сожалению, по нашему мнению, не обошлось без ложных посылов и принципиально ошибочных положений. По ряду позиций они являются, можно сказать, типичными для большинства публикаций в затрагиваемой области.

Поэтому есть смысл остановиться на них подробнее. Подразумевая, что главным объектом дискуссионных обсуждений остается упомянутая книга. Чего в ней больше: правды или заблуждений, пользы или отсутствия оной, – судить читателю.

Прошло достаточно времени после издания монографии. Можно подвести некоторые итоги, поделиться впечатлениями, проанализировать противоречивые суждения.

Наш анализ предлагается не ради критики так таковой, а с целью совместного поиска-приближения истины. Ибо без критики нет взаимного понимания, а, следовательно, и нет объединения (Ф. Энгельс, Сочинения, 1955, т. 4, с. 384). Ничего личного.

Разумеется, наши оценки субъективны, а потому допускают несовпадение мнений.

Надуманность проблемы золотого сечения

Сначала остановимся вкратце на общих положениях.

Монография подчеркнуто изобилует такими понятийными образами как *проблема*, *математика* и *теория* золотого сечения. Тем самым воссоздается некий величавый столп пространного объекта, сложного для изучения-исследования. Уделом историчности становится воскрешение-реставрирование особого ореола древности, на фоне чего полагаемые новшества должны выглядеть особенно представительно и колоритно.

На наш взгляд, подобные искусственно-высокопарные настройки не свойственны золотому сечению:

- *проблема* ЗС, – так таковой проблемы нет;
- *математика* ЗС, – какая-то особая собственная математика отсутствует, можно говорить о золотом сечении в математике, что, конечно, не одно и то же;
- *теория* ЗС, – преувеличение, высокопарный слог и не более того...

Напомним, что проблема – сложный теоретический или практический вопрос, требующий изучения, разрешения (URL: ru.wikipedia.org/?oldid=75257660).

В науке проблема – противоречивая ситуация, выступающая в виде противоположных позиций в объяснении каких-либо явлений, объектов, процессов и требующая адекватной теории для её разрешения.

Ни один из этих устанавливающих посылов не имеет для ЗС смысловой нагрузки.

В то же время «неверно поставленная проблема, или псевдопроблема, уводят в сторону от разрешения подлинных проблем» (БСЭ, 1969–1978).

Например, одно из самых востребованных в науке чисел π входит во многие математические, физические и технические формулы, в том числе не имеющие непосредственного отношения к площади круга или длине окружности. Тем не менее, никогда не имело собственной математической теории. Хотя известны обширные монографии: «Число Пи. История, длиною в 4000 лет» (С. Шумихин, 2011), «Вездесущее число Пи» (Жуков, 2007) и др.

Так и в области золотого сечения вполне приемлемым становится исследование совокупности возможных вопросов, взаимосвязанных с объектом рассмотрения, которое называется *проблематикой*.

Проблема как раз состоит в отсутствии проблемы де-юре и её искусственной гиперболизации де-факто. Как образец исподволь навязываемых мыслей.

То есть предмет проблемы отсутствует.

В подобных случаях ученые говорят: если у вас проблема, решите её; если не можете решить, то не делайте из этого проблему...

Допустимо и правильнее говорить о понятии, принципе и/или правиле ЗС.

В частности, потребность в законченной теории ЗС автор увязывает с развитием последних исследований чисел Фибоначчи, Люка и Пели. – Типичное смешение понятийно-предметной области, которое ни на йоту не способствует обретению новых знаний в области собственной золотоносной тематики.

"Золотоискатели" часто затуманивают образ ЗС, набрасывая на него ауру некой таинственности и глубокой архаики. Ветераны "золотоносного движения" могут припомнить международную конференцию в аграрном университете «Проблемы гармонии, симметрии и золотого сечения в природе, науке и искусстве» (Винница, Украина, 22–25 окт. 2003).

В чём, к примеру, состоит *проблема ЗС в искусстве*? – Не было её никогда, и нет!

Иногда упоминается «интерес к проблеме "золотого сечения" в архитектуре и искусстве» [2]. То есть в центр рассмотрения ставят не проблему золотого сечения как такового, а его прикладное значение-приложение.

В этой связи вспоминается С. Ясинский: «Сплошь и рядом встречаются взрослые люди, остающиеся в душевном плане детьми и трудно отличающие реальность проявлений законов бытия от красивых сказок. Подобного рода "детская наивность" по своей сути безвредна и может быть отнесена к разряду проявлений крайнего максимализма» [3].

Вместе с тем «золотая пропорция – понятие математическое, и её изучение – это, прежде всего, задача науки. Но она же является критерием гармонии и красоты, а это уже категория искусства и эстетики» [4]. – Видимо, так. Но настолько, насколько сама математика является частью искусства и архитектуры. В том числе как инструментарий для производства чарующих творений-конструкций и форм прекрасного.

Иначе обязательно возникает *golden numberism* или золотой числизм – склонность к бездоказательным обобщениям на основании чисел, как опасная дискуссионная стратегия [5, с. 50]. Так, если на фасаде афинского Парфенона исключить из расчета фронтон, то отношение ширины к высоте сооружения составит целое число 3. – Без всякого намека на приближение к ЗС, о чём так любят неустанно повторять адепты всеобщности "золотоносного" начала в формах человеческих творений.

В сущности, имеем типичный пример ситуации – по-английски *wishful thinking*, когда желаемое выдают за действительное. Пожалуй, на этой ноте наивной безвредности можно поставить точку и подвести черту под надуманной проблемой ЗС, которая, кстати, так и осталась в книге не сформулированной.

Шаг вперед, два шага назад

Отправная работа [1] преимущественно содержит синтез-подборку известных знаний в авторской интерпретации. Имеются позитивные положения. Их дополняют оригинальные философские размышления. Когда дело доходит до математических описаний – предмета проведенных исследований, к сожалению, возникают некоторые нестыковки и нескладности.

Вроде тональность изложения верно задана. Слова подобраны правильно.

Однако всё равно не покидает ощущение, будто вас пытаются затянуть в некое "золотое зазеркалье" ненастоящего виртуального действа.

Понятно, любое упрощение спорных и противоречивых моментов не позволяет раскрыть конкретику возникающих несообразностей.

С другой стороны, детальная проработка – утомительное и малопродуктивное занятие.

Да и особого смысла в этом нет. Хотя бы потому, что совместное прочтение работ является маловероятным событием и остается уделом небольшого сообщества исследователей данной тематики, которым по силам во всём разобраться самим.

Проанализируем только принципиальные моменты. Тем более что отдельные вопросы уже поднимались ранее в наших статьях [6, 7].

1. Как отмечает автор в самом начале, это его «вторая монография, целиком посвященная золотому сечению и комплексу связанных с ним проблем (?)». – Хотя, если посмотреть в корень, глубоко вникнув в суть дела, никаких особых проблем вокруг ЗС нет. Тем более в математике, для которой здесь всё ясно давным-давно. Практически без белых пятен. Хотя время от времени появляются отдельные работы, расширяющие горизонты восприятия тематики. Собственно и всё. – *No golden problem*!

2. «Рассматривается математическая теория золотого сечения и её возможные расширения». – Это также, на наш взгляд, неверный исходный посыл. Нет никакой математической теории ЗС. Если прикладную теорию золотого сечения ещё можно как-то создавать и выстраивать, обустраивать, развивать и совершенствовать, то собственной «математической теории золотого сечения» никогда не было, и нет. За ненадобностью.

Существует небольшое поле-пространство достаточно простых общеизвестных математических средств, с помощью которых отображаются те или иные свойства ЗС. Понятие собственной математики для ЗС, как таковое, отсутствует.

Более того, автор вообще не считает "золотой" корень ϕ математической константой, разделяя «числа, в особенности фундаментальные математические константы, и такие величины как "золотое" число ϕ» [1, с. 11]. – Трудно согласиться. Ибо ЗС имеет большое значение в теории непрерывных (цепных) дробей [8], приближении действительных чисел рациональными дробями [9], построении многогранников и др. В частности, главная особенность константы ЗС состоит в том, что среди всех иррациональных чисел она хуже всего поддается аппроксимации рациональными дробями [10].

3. Иногда вклинивается произвольная терминология, в частности, «методы числовой математики» [1, с. 12], каковых в науке нет. Есть теория чисел [11] – своего рода высшая арифметика, изучающая целые числа и сходные объекты.

Известны методы вычислительной математики или вычислительные (численные) методы и алгоритмы приближенного решения математических задач в численном виде [12]. Как отдельная область математики с её применением во многих прикладных направлениях. Обычно с использованием персональных компьютеров и другой вычислительной техники.

4. Рассматривая числовое выражение золотой константы $\Phi = \phi^{-1} = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, автор неточно выстраивает причинно-следственную связь и утверждает: «*наличие радикала* означает, что Φ является числом иррациональным, но не трансцендентным» [1, с. 12].

Число Ф – действительно не трансцендентное. Но совсем не по такой логике.

Напомним, радикал (лат. *radix* корень) – символ-знак извлечения арифметического корня √ (измененная латинская буква *r*), а также число или выражение – результат извлечения корня.

Каждое трансцендентное число иррационально. Но оно не является алгебраическим. То есть не служит корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Наличие радикала (по Г. Аракеляну) здесь не становится определяющим. Например, число с радикалом $2^{\sqrt{2}}$ трансцендентно, что в свое время доказал А.О. Гельфонд (1934). Или в общем виде, как решенная им седьмая проблема Гильберта [13]: если $a \neq 1$ – положительное алгебраическое число, b – иррациональное алгебраическое число, то a^b – есть число трансцендентное. Здесь a может быть рациональным, поскольку все рациональные числа – алгебраические.

В честь этого, число e^{π} впоследствии было названо постоянной Гельфонда.

Это первостепенные концептуальные положения.

В частности, отсюда следует, что золотая алгебраическая константа Φ и традиционные трансцендентные числа e, π – разного поля ягоды-жемчужины, которые принципиально нельзя связать конечным аналитико-числовым выражением. Что пытается сделать автор.

Строго говоря, формальное наличие в записи знака радикала также не является достаточным условием иррациональности. Например, $1/\sqrt{25}$, $\left(2\sqrt{5}\right)^2$ – рациональные числа.

5. «Запись на языке математики классической формулировки: *целое* (x) *относится к большей части* (взятой равной 1) *как большая часть к меньшей* (x – 1): а) $x^2 - x - 1 = 0$» [1, с. 71]. – Ещё одно, характерное для книги, отражение ЗС в зазеркалье.

В классической постановке золотого сечения целое никогда не выражалось неизвестным аргументом x. В философии тем более, где целое обычно представляется единичной монадой.

Само квадратное уравнение в общепринятом понимании относится к делению единичного целого на части a и $1-a$, где x означает отношение

$$x = \frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} = \frac{1}{1/a - 1}.$$

Обратное выражение $z = \frac{1}{x} = \frac{a}{1}$ преобразуется в уравнение $z^2 + z - 1 = 0$ и выражает отношение меньшей части к большей или абсолютное значение большей части $z = \phi$.

6. Приводятся различные представления [1, с. 72] непрерывных (цепных) дробей для степеней золотого сечения: положительных и отрицательных, четных и нечетных.

Однако за "лесом" правильных формул не видно главного объединяющего выражения.

А оно есть!

Используя теорему Виета, выражающую коэффициенты квадратного уравнения через сумму и произведение его корней, аналитическое представление аддитивных чисел Люка $L_k = \Phi^k + (-\phi)^k$ и "единичное" свойство корней-сомножителей $\Phi^k(-\phi)^k = (-1)^k$, мы приходим к общему квадратному уравнению степеней золотой константы [14]

$$x^2 - L_k x + (-1)^k = 0.$$

С учетом расширения чисел Люка в область отрицательных значений по формуле $L_{-k} = (-1)^k L_k$ окончательно имеем для любого целого k:

$$\Phi^k = L_k - \frac{(-1)^k}{\Phi^k} = L_k - \cfrac{(-1)^k}{L_k - \cfrac{(-1)^k}{L_k - \dots}} = L_k + \cfrac{(-1)^{k+1}}{L_k + \cfrac{(-1)^{k+1}}{L_k + \dots}}.$$

Более того, само по себе «квадратное уравнение – непосредственный продуцент цепной дроби, о существовании которой можно заранее и не знать» [6].

7. «Величина $1/\sqrt{5}$ выступает как граница между *бесконечным счетным и конечным множествами рациональных чисел* (теорема Гурвица, см. Бухштаб, 235)» [1, с. 12]. – Здесь, на наш взгляд, прослеживается нарушение причинно-следственных отношений с неверной расстановкой акцентов. В том-то и суть теоремы № 248 [9, с. 233], что для любого действительного числа α существует *бесконечное* (!) множество рациональных чисел (БМРЦ) – дробей a/b, таких, что $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c}{b^2}$, где $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Иррациональная константа золотого сечения, которая в своем разложении в цепную дробь содержит только единицы, способна передвинуть данный "водораздел" c в сторону уменьшения, обеспечив бóльшую строгость неравенства.

Теорема № 249. При любом положительном $\lambda < \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ существует только конечное число рациональных чисел $\frac{a}{b}$ таких, что $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{\lambda}{b^2}$. – Но это говорит лишь о том, что константа $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ в предыдущей теореме Гурвица – наилучшая.

Более того, русский математик А. Марков обобщил и показал, что если из множества действительных чисел исключить числа, эквивалентные золотому сечению $\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, вида $\frac{A\alpha_0 + B}{C\alpha_0 + D}$, где $AD - BC = \pm 1$, $\{A, B, C, D\}$ – целые, то для оставшихся действительных чисел α неравенство

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{c}{b^2} \qquad (1)$$

осуществляется при $c = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ для БМРЦ.

Теперь это новое значение c становится наилучшим.

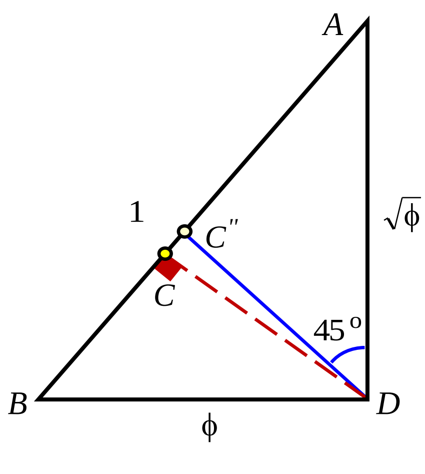
Исключив затем все числа эквивалентные $\alpha_1 = \sqrt{2}$, получаем бесконечное множество действительных чисел α, в котором неравенство (1) удовлетворяется для БМРЦ при $c = \frac{5}{\sqrt{221}} = \frac{5}{\sqrt{13 \cdot 17}}$, и так далее.

8. "Золотая кривая" или "золотая парабола" $f(x) = x^2 - x - 1$ с её фокусами и директрисами [1, с. 44-47] – пример терминологически-излишнего наслоения.

Парабола на графике соотносится с ЗС лишь в местах пересечения с осью абсцисс! Остальные точки линии не имеют никакой связи с ЗС и золотой раскраской линии.

Например, $f(\pm 5) = (19,\ 29)$. – Ну, и что с того? Кроме того, через точки $(-\phi, \Phi)$ проходят миллиарды парабол $k(x^2 - x - 1)$ и других кривых 2-го порядка. Их тоже следует за это называть золотыми <обобщенными>? – Впрочем, и сам автор в конце отмечает [1, с. 47]: «Парабола, в отличие от пентаграммы, не может считаться золотой фигурой»!

9. Автор демонстрирует [1, с. 40, 42] построение точки C'', которая иногда называется "вторым" золотым сечением (рис. 1), а далее отдельно представляет прямоугольный треугольник Кеплера с соотношением сторон $\Phi : \sqrt{\Phi} : 1$ или $1 : \sqrt{\phi} : \phi$ – в геометрической прогрессии. Хотя это один и тот же геометрический объект.



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD^2}{BD^2} = \Phi \approx 1{,}618\,; \quad AC = BD;$$

$$\frac{AC''}{C''B} = \frac{AD}{BD} = \sqrt{\Phi} \approx 1{,}272\,;$$

$$\frac{BA}{DA} = \frac{DA}{DB} = \sqrt{\Phi}$$

Рис. 1. Построение классического и "второго" золотого сечения на гипотенузе единичной длины в прямоугольном треугольнике Кеплера со сторонами $1 : \sqrt{\phi} : \phi$

Проводя из прямого угла перпендикуляр на гипотенузу и биссектрису, получаем соответственно классическое ЗС и "второе" ЗС.

При этом имеем отрезки $AC'' = \left(1+\sqrt{\phi}\right)^{-1} \approx 0{,}560$ и $AC = BD = \phi \approx 0{,}616$.

Таким образом, соотношение сторон в треугольнике Кеплера $\sqrt{\Phi}$ путем проведения биссектрисы прямого угла переносится и на гипотенузу.

Действительно, в прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит гипотенузу в таком отношении, в каком находятся квадраты катетов. Биссектриса треугольника делит третью сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

10. Автор рассматривает золотую константу как величину, непосредственно связанную с проявлением фундаментальных принципов минимума, оптимума и простоты. Кстати, себе же противоречит (см. п. 2). Сама модель принадлежит к вполне определенной категории математических структур с неким качественным уровнем "золочения".

Далее следует неожиданный вывод: «квадратное уравнение ЗС является простейшим среди всех квадратных уравнений» [1, с. 48]. – Вряд ли это так, даже при большой симпатии к феномену ЗС.

Наиболее простыми, на наш взгляд, являются всё-таки неполные квадратные уравнения вида $x^2 - q = 0$.

В частности $x^2 = 1$, с единичными корнями ± 1 – основами всего и вся в математике. Перед этими числами меркнет-тускнеет даже золотое сечение.

Или уравнение $x^2 = 2$ – для диагонали квадрата с единичной стороной 1.

Его корень $x = \sqrt{2}$ известен ещё по Вавилонской глиняной табличке ~ 1800 до н. э.

Уместно заметить, что исторически знаменитый "флагман" иррациональных чисел – квадратный корень из двух – можно увязать с золотой константой $\Phi = \phi^{-1}$:

$$\sqrt{2} \;=\; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}} \;=\; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}\,;$$

$$\sqrt{2} \;=\; \Phi\sqrt{3-\Phi-\phi} \;=\; \phi\sqrt{3+\Phi+\phi}\,.$$

В определенном смысле это вполне ожидаемо, поскольку само число Φ образуется за счет квадратного корня из пяти с его интерпретацией по теореме Пифагора $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$.

11. «Золотые фракталы» [1, с. 59] с искусственным внедрением ЗС в размерность Хаусдорфа – другой пример, когда нечто настойчиво "впихивают в не впихиваемое".

К сожалению, а скорее к счастью, золотое сечение не привносит во фракталы никаких отличительных особенностей.

В большом множестве фрактальных структур золотое сечение особым образом себя не проявляет и не дает каких-либо преференций в наблюдаемых графических построениях [15]. Сдается, что это малопродуктивный путь поиска общностей в связке "фракталы – ЗС".

Не это является приоритетом "золотоносности" фракталов.

Равно как нет особой необходимости специально внедрять ЗС во фракталы. Золотое сечение и фракталы без этого достаточно близкие структуры.

Нужно искать не возможные проявления числа Φ во фракталах, а сходные позиции и единство свойств на общетеоретическом уровне, что гораздо существеннее и весомее.

Например, та же *рекурсия или непрерывная цепь самоподобна, как фрактал*.

С какого бы места не начали отсчет, всё время будем приходить к числу Φ.

Это и есть действительное совпадение целого с частью себя самого.

То есть формирование числа золотого сечения уже фрактально подобно!

12. Долго, но не очень убедительно показывается [1, с. 73], что предельный аттрактор двучленно-аддитивной рекурсии $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ не зависит от пары начальных значений числовой последовательности.

Хотя здесь всё достаточно тривиально и следует из эквивалентного представления алгебраического характеристического уравнения и рекурсии (возвратного уравнения)

$$x = \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{f_n / f_{n-1}} \overset{n \to \infty}{\Rightarrow} x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = x + 1,$$

Как видим, преобразование не зависит от начальных условий (f_0, f_1). К ним предъявляется единственное очевидное требование: не быть равными одновременно нулю.

В противном случае суммирующая рекурсия не получит развитие.

Математик современности В. Арнольд подчеркивал: «Математика едина. Её нельзя разделить на алгебру, геометрию и т.п.» [16]. Так и в нашем случае отсутствует водораздел между цепными дробями и алгебраическими уравнениями.

Но есть непосредственная связь за счет простых преобразований.

13. Автор приводит интегральное представление золотой константы

$$\Phi = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} \right) dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx . \tag{2}$$

С особым восхищением именует как «поистине золотой и позолоченный интеграл» (?) [1, с. 74]. Словно установка на избирательную способность золотого сечения отражаться в интегральном поле-зеркале.

Что же имеется "в сухом остатке"? – Некоторая линия-функция, которая огибает на единичном отрезке площадь, равную $1 \times \Phi$ квадратным единицам.

Подобных функций существует бесконечное множество. Простых и сложных аналогов, похожих на золотую константу и не очень. Самые элементарные фигуры: прямоугольник $\Phi = \int_0^1 \Phi \, dx$ или прямоугольный треугольник $\Phi = \int_0^1 \left(1 + \sqrt{5}\right) x \, dx$. – Сдается, слишком очевидно. Однако не больше и не меньше чем в подынтегральном выражении (2), где закамуфлирован квадратный корень из пяти $\sqrt{x^2+4}\,\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ – предтеча ЗС.

С таким же успехом можно примерить принципиально иные функциональные "маски", например, $\sqrt{x+4}\,\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{4x^2+1}\,\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{1}$, $\sqrt{(x-1)^2+4}\,\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и многие другие:

$$\phi = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{x+4}} \right) dx ; \qquad \boxed{\phi = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}} dx} ;$$

$$\Phi = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + \frac{1-x}{2\sqrt{(1-x)^2+4}} \right) dx ;$$

$$\Phi = \frac{3\pi}{5} \int_0^1 \cos\frac{3\pi}{10} x \, dx ; \qquad \Phi = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{\pi}{5} \sin\frac{\pi}{5} x\right) dx \ldots$$

Представляется, что наиболее выразительной здесь является подынтегральная функция

$$f(x) = 2x\big/\sqrt{4x^2+1}.$$

Она также делит площадь единичного квадрата 1×1 золотым сечением $\phi^2 + \phi = 1$ (рис. 2), но намного эффектнее интеграла (2). Хотя бы потому, что форма имеет простую запись и обращается в нуль при нулевом аргументе.

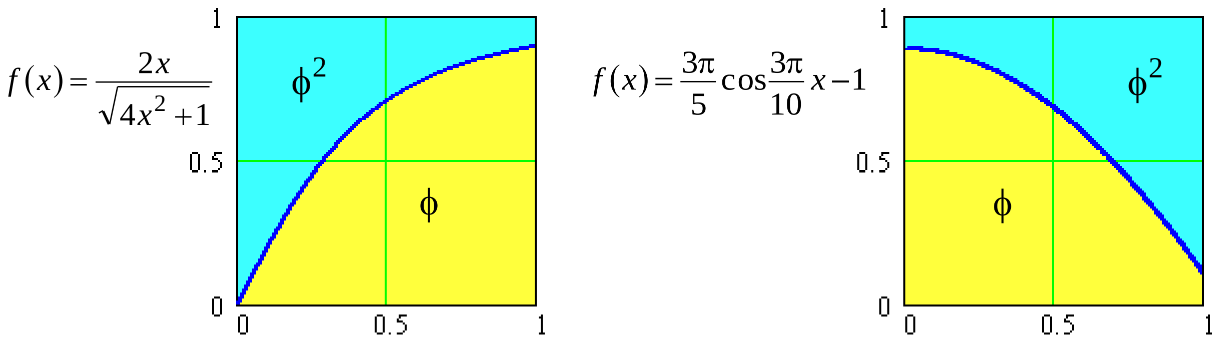


Рис. 2. Золотое сечение площади квадрата разными функциями

14. Далее [1, с. 74] анализируется бесконечный ряд $\Phi = \dfrac{13}{8} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{4n+6}} \dfrac{(2n+1)!}{n!(n+2)!}$.

Формула взята из работы [17], где получена для величины $\Phi = [1 + f(x)]/2$ путем разложения квадратного корня из пяти $f(x) = \sqrt{5}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 4$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Но автору не нравится присутствие в равенстве "диссонирующей" дроби $13/8$.

Выполняются многочисленные, но несущественные преобразования, которые всё равно не приводят к нужному результату.

В то же время имеется простое альтернативное решение. А именно стандартное разложение квадратного корня $\sqrt{1+x}$, $|x| \le 1$ в ряд Тейлора [18] в точке $x = 1/4$.

Такой подход позволяет уйти от дроби 13/8 и выразить пару золотых констант красивой формулой с использованием коэффициентов, равных единице и двойке:

$$(\Phi,\ \phi) = \pm\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{\left(2^2\right)^{2n} (n!)^2 (1-2n)} = \pm\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{1-2n}.$$

где
$$\psi_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{\left(2^2\right)^{2n} (n!)^2}. \qquad (3)$$

Мы не придаем этой форме повышенной значимости, как и подобным аналогам:

$$\ln^2\Phi = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot C_{2n}^{n}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - \ln^2\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 \cdot C_{4n}^{2n}}.$$

Разве что фиксируем наличие-присутствие ещё одной разновидности аналитического выражения для золотого сечения.

Одновременно отмечаем эстетичный аспект в гармоничности представления.

А это свидетельствует о полезности форм, ибо «хорошая математика всегда красива» (Д. Коэн, американский математик).

Кроме того, востребованной остается дискретная функция ψ_n, – смотри ниже.

15. По мере дальнейшего чтения работы, всё более заметной становится тенденция явного отклонения от золотоносной тематики.

Взять хотя бы закон Бенфорда или феномен начальной цифры в представлении чисел вообще и чисел Фибоначчи в частности [1, с. 117–123].

Как это соотносится с ЗС? – Ровным счетом никак!

С другой стороны, есть другое замечательное свойство-проявление, о котором полезно вспомнить, если исследуется повторяемость тех или иных цифр.

Согласно теореме Кузьмина [16, с. 13] вероятность появления в цепных (непрерывных) дробях $[a_0; a_1, a_2, ...]$ среди чисел-элементов a_i натурального числа k задается эффективной, но весьма не простой в доказательстве [8, § 15], формулой (рис. 3)

$$p_k = \lg_2\left[1+\frac{1}{k(k+2)}\right] = \lg_2\left(\frac{k+1}{k}\Big/\frac{k+2}{k+1}\right).$$

То есть в цепных дробях совокупного множества вещественных чисел наиболее часто встречающимся числом является единица с вероятностью появления $p_1 = \lg_2 4/3 \approx 0{,}415$.

А уже потом – двойки, тройки и т.д.

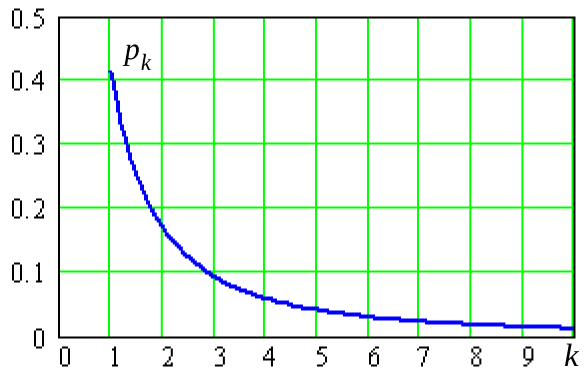


Рис. 3. Вероятности появления
целых чисел k в цепных дробях

Весьма символичной является запись аргумента логарифма в виде отношения двух дробей, в каждой из которых числитель на единицу больше знаменателя.

На этом фоне с преимущественным доминированием единиц особо выделяется уникальное иррационально-золотое число с бесконечной цепной (непрерывной) дробью, состоящей только из единиц (!)

$$\Phi = 1+\frac{1}{\Phi} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}} = [1;\ (1)].$$

Это действительно важно и знаменательно для ЗС.

Но не многостраничные авторские подсчеты-описания цифр, из которых слагаются числа Фибоначчи, что даже косвенно не относится к феномену ЗС.

В частности, не без основания принято считать, что при разложении в непрерывную дробь иррациональное число Ф золотого сечения имеет самую медленную сходимость среди всех других иррациональных и трансцендентных чисел [19]. Если исходить из абсолютного значения числа Ф. В качестве аргумента при этом обычно приводят его представление в виде упомянутой цепной дроби.

Действительно, «в отношении ошибок при приближенном вычислении иррациональных чисел с помощью подходящих дробей и их разложений в непрерывные дроби число Ф представляет собой наихудший случай» [10, с. 86] в смысле скорости сходимости.

16. Автор подробно описывает, как советский математик Ю. Матиясевич завершил доказательство алгоритмической неразрешимости десятой проблемы Гильберта с использованием свойств чисел Фибоначчи:

отношение $(F_k/F_l)^2$ будет целым числом только в том случае, если отношение k/l выражается неким числом Фибоначчи F_m.

Замечательно! Слава ленинградской школе!

Только причем здесь золотое сечение, которому посвящена книга?

На этом стоит остановиться несколько подробнее.

Числа Фибоначчи и золотое сечение

Принято считать, проводя параллели с известным комическим дуэтом народных артистов Украины, что «числа Фибоначчи – это не только ценный мех кроликов средневековья, но и 3–4 килограмма легкоусвояемого золотого сечения».

Похожие настроения наблюдаются в цитируемой книге. Когда, за отсутствием изобилия "золотоносной" конкретики достойной пробы, непомерно повышенное внимание уделяется числам Фибоначчи. В той или иной мере по тексту прослеживается практическая идентичность ЗС и чисел Фибоначчи.

Если разобраться по существу, главным для ЗС являются не сами числа, а рекуррентная двухчленно-аддитивная процедура их получения, как таковая.

При любых не нулевых начальных условиях рекурсия приводит к аттрактору – предельному отношению соседних членов ряда, равному константе золотого сечения.

«Числа Фибоначчи и Люка с константой Ф – поистине "райский уголок" для всех любителей числовой математики, включая профессиональных математиков, имеющих свой специализированный журнал *The Fibonacci Quarterly*... Трудно, даже просто перечислить основные свойства указанных числовых последовательностей, основные типы их связей с различными математическими конструктами» [1, с. 366]. – Действительно, так. Только никакого отношения к тематике ЗС не имеет.

Это давно уже самостоятельная область математики, которая исторически началась с чисел Фибоначчи. Вышло в свет более 200 номеров журнала [20].

Числа Фибоначчи – «легендарная численная последовательность всея математики» [5, с. 44] – всего лишь частный ряд-приближение к золотому аттрактору. Одна из миллиардов возможных.

Уделять ей повышенный интерес в области ЗС совсем не обязательно. Достаточно упоминания. В том числе в историческом аспекте. Больше, как дань неподдельного уважения великим математикам-подвижникам средневековья.

Например, даже научно-популярное структурирование математических теорий [21] разделяет числа Фибоначчи (с. 24) и золотое сечение (с. 98).

Есть, конечно, связь чисел Фибоначчи с константой ЗС в виде формулы Бине $F_n = \dfrac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$. Или более компактная форма для чисел Люка $L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}$.

Но подобные связи существуют практически для всех последовательностей Фибоначчи общего вида, с корнями соответствующих алгебраических (характеристических) уравнений.

В целом раздел о числах Фибоначчи, их многочисленных свойствах имеет к ЗС отдаленное отношение. Дело ведь не в числах так таковых. Смысл в рекурсии (!) с произвольными начальными условиями и любыми дополнительными слагаемыми, которые растут не быстрее чем Φ^n [22], что характеризует устойчивость синтезируемой системы к внешним аддитивным факторам-воздействиям [23].

Например, числовая последовательность с комплексно-трансцендентными "затравочными" числами и совершенно "безумными" дополнительными слагаемыми

$$f_0 = 3 + 2i, \quad f_1 = -e + \pi\, i, \quad \boxed{f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1{,}5^n + 1000n + n^5 \operatorname{tg} n}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi,$$

также имеет аттрактор – Ф-число золотого сечения; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $n = 2, 3, 4, \ldots$

Именно такая методологическая установка составляет базис золотой константы с её способностью становиться предельным аттрактором разнохарактерных последовательностей аддитивной направленности.

Исследуя тему ЗС, можно даже не знать о существовании чисел Фибоначчи как таковых. – За ненадобностью для "золотого" феномена.

То есть золотое сечение вполне самодостаточно и без этих чисел.

Не числа Фибоначчи предопределяют образование-существование ЗС, а наоборот принцип формирования золотой пропорции дает этим числам путевку в жизнь, как и безграничному множеству других числовых последовательностей.

Задача профессионального философа – исследователя ЗС как раз состоит в раскрытии сути множества "чудотворных" ручейков, воссоздающих безбрежный "золотой океан". Вместо прилежного переписывания сотен хорошо известных формул для чисел Фибоначчи.

Математические константы

Ещё одна "золотоносная" стезя-дорога связана с неукротимым стремлением непременно "породнить" ЗС с другими фундаментальными математическими константами.

Помнится [24], профессор д.т.н. А. Стахов – неутомимый приверженец «гармонизации математики» – утверждал о генетической связи константы золотой пропорции $\Phi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ с числом π через формальное соотношение [25, с. 70] $\Phi = 2\cos 36^{\text{o}} = 2\cos\dfrac{\pi}{5}$. Конечно, никакой существенной связи между константами здесь нет. Чисто условное выражение угловой (градусной) меры посредством числа π.

Функционально-числовое отношение отсутствует. Конечномерной аналитической связи не существует в принципе. Хотя бы потому, что Ф – число алгебраическое, π – число трансцендентное. У них совершенно разные онтологические корни.

Нет такого конечного числового тождества, способного их уравнять!

За исключением некоторых бесконечных разложений [26], в частности, предложенных индийским математиком-самородком С. Рамануджаном.

На самом деле запись $2\cos(\pi/5) = \Phi$ подразумевает одно и то же математическое свойство, выраженное двумя эквивалентными способами.

Или, проще говоря, выражение разными буковками.

Здесь нет буквального соотнесения с числом π, ибо косинус $\cos(\pi/5)$ – не есть самостоятельное число. Ведь всё равно понадобится обратная функция *arccos*.

При этом устанавливается опосредованное взаимоотношение, которое возникло искусственно вследствие условного, и как потом оказалось удобного принятия полного кругового оборота в 360 градусов через 2π.

Известны десятки случаев точного числового представления тригонометрических функций разных углов, в том числе через радикалы: $1 = 2\sin\frac{\pi}{6} = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$ и т.п. Однако, вне всякого сомнения, это совсем не означает установления непосредственной взаимосвязи и точного определения величины π через эти числа, типа $\pi = 6\cdot\arcsin 1/2$ или $\pi = 4\cdot\mathrm{arctg}1$.

То же самое касается приближенных соотношений.

«Получаемые эмпирические формулы не имеют особого смысла в научном понимании. Это обычная подгонка результата опытным путем на основе метода проб и ошибок.

В итоге получается приближенное выражение "будь чего" через "будь что"» [15].

Например, имеем хорошее приближение $\Phi \approx \frac{7\pi}{5e} + 0{,}0000157$. Но не точное равенство.

Говоря о какой-либо связи "ЗС – экспоненты", следует упомянуть ещё одно наглядно-простое приближенное выражение $\phi \approx e^{-1}$ с определенным толкованием [5, с. 27]: если большая компания людей разбирает наугад шляпы, не глядя, то вероятность того, что хотя бы один человек окажется в собственной шляпе, составляет $1 - e^{-1} \approx 63{,}2$ %, чуть больше ЗС.

Не будем особо повторяться.

Базовые соотношения подробно представлены в работах [26, 27].

Так, используя функцию Гудермана $\mathrm{gd}(x)$, которая связывает тригонометрические и гиперболические функции без привлечения комплексных чисел [28], $\mathrm{gd}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cosh(t)}\,dt$, константу ЗС можно представить в экзотическом виде [7] с одновременным присутствием констант $(\pi,\ e,\ \Phi)$.

$$\Phi = \mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{gd}(\mathrm{arsh}\,1/2)}{2}\right].$$

Однако конкретным <u>аналитическим представлением для взаимного переопределения чисел</u> здесь и не пахнет.

Исходя из выражения $\Phi = 2\cos\pi/5$ и разложения функции $\cos x = \sum_n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ в ряд Тейлора – популярного инструмента в математическом анализе, можно представить другую бесконечную сумму [29, с. 140]

$$\Phi = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n}\frac{(-1)^2}{(2n)!}.$$

Или известная формула Госпера [29, с. 156] обратной связи чисел Φ, π:

$$\pi = \frac{5\sqrt{\Phi+2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{\Phi^{2n+1}(2n+1)!}.$$

К слову, площадь поверхности золотого кубоида $\Phi\times1\times\phi$ относится к площади сферы, описанной около него, как Φ/π [29, с. 102; 30].

С античных времен в математике широко известны и продолжают изучаться гармонические числа [31, с. 303] или частичные суммы гармонического ряда – обратных величин первых n последовательных чисел натурального ряда $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

При этом специальные значения гармонических чисел H_α для аргументов $0<\alpha<1$ задаются интегралом

$$H_\alpha=\int_0^1\frac{1-x^\alpha}{1-x}dx.$$

Так, величина $H_{1/5}$ равна

$$H_{\frac{1}{5}}=5-\frac{5\ln5}{4}-\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{2}{\Phi+\phi}}-\frac{\Phi+\phi}{2}\ln\Phi,$$

где одновременно участвуют иррациональные числа $\left(\pi,\ e,\ \Phi=\phi^{-1}\right)$.

Ну, и что с того? – Если всё равно нельзя определить одно число через другое.

Мантиссы чисел

Мантиссы чисел – это особый момент работы [1]. Можно сказать авторский "конёк", призванный выделить из алгебраического уравнения общего вида n-го порядка только малую толику эксклюзивных корней полиномов с равными мантиссами.

Предлагаемое автором «правило сохранения мантиссы» – своего рода «детектор золотоносной лжи» или индикатор принадлежности к семейству моделей, произвольно назначенных решением и претендующих на высокое звание "обобщителя ЗС".

При этом деление на «свои и чужие структуры» странным образом фокусируется на исключительный раритет – антиквар квадратного уравнения – собственного сочинения-изготовления. Как завуалированная настройка на желаемый результат.

Но сначала два слова о неоднозначности используемого понятия.

Например, действительные числа с плавающей запятой в нормализованной научной форме экспоненциальной записи (в виде мантиссы и порядка) $1{,}2345\cdot10^3$ и $1{,}2345\cdot10^2$ имеют одинаковые мантиссы.

Однако разность самих чисел 1234,5 – 123,45 не является целым числом.

Различают также мантиссу как дробную часть десятичного логарифма положительного числа. Для отрицательных чисел дробная часть неоднозначно зависит от исходного определения целой части [31, с. 88]: до ближайшего целого в меньшую (антье, "пол") $\lfloor-\Phi\rfloor=-2$ и большую ("потолок") $\lceil-\Phi\rceil=-1$ сторону.

Не случайно англичане терминологически различают: *significant, mantissa, fraction* – дробная часть, что не есть мантисса, хотя и близка к ней.

Для квадратного уравнения $x^2-px-1=0 \ \rightarrow\ x-x^{-1}=p$ Г. Аракелян привносит «правило мантисс», как своего рода "индульгенцию" на право вхождения в «узкий контекст числовой структуры, объединяющей величины на основе общих признаков» [1, с. 138].

В продолжение подобной логики с таким же успехом работает другая модель $x^2-x=q$, в которой число и его квадрат имеют одинаковые дробные части.

Это свойство-правило ничем не хуже, а с точки зрения степенных полиномов даже лучше сравнения числа с его обратной величиной.

Кроме того, уравнение $x^2 - x = q$ допускает целые решения $k \geq 2$ при $q = k(k-1)$.

Или в общем виде $x^u - x^v = q$ две степени с равными дробными частями мантиссами.

Наделение модели $x - x^{-1} = p$ некими «высшими силами-способностями» – простое манипулирование с будущим прицелом (подгонкой) под логарифмическое тождество $\Phi \equiv e^{\ln\Phi} = e^{\operatorname{arsh}(0,5)}$, известное со школьной скамьи.

«Выбор нами правила сохранения мантиссы отнюдь не случаен. Ведь если вдуматься, ПСМ связано с понятием обратной величины, относящимся к числу основных в корневой структуре теории чисел, необходимым, прежде всего, для сведения операции деления к умножению на обратную величину. Именно благодаря этому условию константы Φ_m во всем схожи с первенцем и наиболее важным членом золотого семейства, константой Ф. Ещё раз при этом отметим, что речь идет не *об обобщении константы* Ф, а об обобщении *принципа*, связанного с её характерными особенностями. Подобное обобщение приводит к отысканию членов семейства, объединяемых, образно говоря, узами кровного родства...

Существование семейства констант, родственных с золотой константой, скорее подчеркивает, чем принижает её значимость, поскольку Ф является первенцем, а потому и уникумом этой бесконечной последовательности чисел» [1, с. 140].

«Совсем непросто найти нечто равнозначное правилу сохранения мантиссы», – утверждает автор [1, с. 176].

Да он собственно ничего больше и не ищет.

Сдается, данная манипуляция полностью устраивает, отвечая логарифмическому тождеству, которое странным образом возводится в ранг нового светоча для ЗС.

Несмотря на очевидную запись $\Phi \equiv e^{\ln\Phi}$, в которой на место константы золотого сечения Φ можно поставить любое положительное число!

Тут же приводятся малоубедительные доводы-мотивы: «Но можно, по идее, не останавливаться и на этом, используя в качестве первоначала более общий тип квадратного уравнения, или даже уравнений более высоких степеней, более сложный тип экспоненты с комплексным показателем степени, рекуррентные последовательности, строящиеся по правилу не третьего, а четвертого, пятого, *n*-го члена, или вообще нелинейные рекурсии и тому подобное. Пределы возможных обобщений трудно даже обозначить, но здесь уже встают вопросы методологического характера и мировоззренческой значимости, которые неизбежны всегда, когда дело доходит до оснований теории» [1, с. 179].

Автор также подробно описывает так называемые «золотые *p*-сечения» (по А. Стахову) или триномы старших степеней [32] $x^{p+1} - x^p - 1$..

Но сразу их отсекает своим правилом мантисс... С использованием придуманного словосочетания "родовых признаков" [1, с. 138], которому больше подходит метафорическая замена-производная "роковых призраков" [33].

Ибо существует необозримое множество структур-вариантов с равенством мантисс.

Никакой особенной отличительно-смысловой нагрузки они не несут. Разве что в фантазиях одного исследователя.

Подобные идентичности заложены генетически в большинстве абстрактных математических конструкций в виде равенств с целочисленной правой частью.

Например, $e^x - x = p$, где для $p = 10$ имеем $e^{2,5279632202..} = 12,5279632202$.

Стоит ли впадать в транс от подобных численных совпадений, вознося руки к небесам и прославляя космического "творца".

Но и здесь находится оправдание "золотому детектору лжи":

«Мы видим, что цепочка последовательных обобщений посредством моделей, соединяемых методологическим принципом соответствия и генетической связью с исходной константой Ф, ведет к достаточно сложным разделам математики.

Сюда относятся алгебраические уравнения степени *n*, линейные и нелинейные рекуррентные соотношения высокой степени и необязательно с действительными множителями, экспонента и логарифм с действительными и комплексными переменными, производные от них прямые и обратные тригонометрические и гиперболические функции, интегралы, бесконечные ряды и произведения, матрицы, дифференциальные уравнению и так далее» [1, с. 179].

Манипулирование оттачивается

Линия числовых мантисс в книге очерчивается настолько филигранно, что к ней стоит обратиться более подробно.

Для константы золотого сечения автор приводит некую *шестую форму* определения золотого сечения (ЗС) через константу e:

$$\Phi = e^{\operatorname{arsh}\ 1/2}.$$

Это, пожалуй, главная "фишка" математической части монографии. Именно вокруг неё завязана новизна основного содержания.

На самом деле имеет место быть заурядная перезапись двух тождественных равенств и фактическое жонглирование буковками, выдаваемое за новшество.

Де-факто, формально соединились такие тождества-определения [7, 24]:

- $x \equiv e^{\ln x}$ – равенство, вытекающее из определения логарифма с любым основанием, в данном случае в виде натурального логарифма e, то есть

$$x \equiv 2^{\lg_2 x} \equiv \pi^{\lg_\pi x} \equiv \Phi^{\lg_\Phi x};$$

- $\operatorname{sh} x \equiv \left(e^x - e^{-x}\right)/2$ – обозначение функции гиперболического синуса с обратной функцией – гиперболическим арксинусом (ареасинусом) $\operatorname{arsh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Связывая два тождества при $x = 1/2$, получаем

$$\Phi = e^{\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = e^{\operatorname{arsh} 1/2}.$$

«В этой формуле содержится новая информация о золотом сечении», – утверждает её автор. – Да, нет же. Увы. Здесь нет никакой новой информации о ЗС.

Можно сказать, занятный и увлекательный пример для факультатива школьников.

Хотя и называется как наиболее простое соотношение, полученное собственноручно автором, которое «сегодня фактически является основным (?), наряду с радикалом и цепной дробью, формой явного аналитического представления золотой константы» [1, с. 78].

Ну, как не вспомнить здесь легенду о Нарциссе? – Мы же не станем говорить о совершенно новом определении числа π через значение экспоненты $\pi = e^{\ln \pi}$?

Либо о вновь выявленных сведениях, которые ранее были неизвестны.

Что же тогда удивительного находится в записи $\Phi = e^{\ln \Phi}$? – Где на место константы Ф допустимо поставить любое положительное вещественное число.

Можно рассуждать об измененной адекватно-эквивалентной записи числа через значения иных функций. Собственно и всё.

Зри в корень

Таким образом, формула $\Phi = e^{\mathrm{arsh}\ 1/2}$ является обыкновенной, если не сказать заурядной перезаписью (сложением) двух тождественных равенств: согласно определению логарифма $x \equiv e^{\ln x}$ и гиперболического арксинуса $\mathrm{arsh}\, x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, и не содержит сколь отличительной функциональной связи $\Phi(e)$ с признаками новизны.

Равно как использование обратного гиперболического косеканса $\mathrm{arcsch} x$, который приводит к форме $\Phi = e^{\mathrm{arcsch}\ 2}$ и/или $\phi = e^{\mathrm{arcsch}\,(-2)}$. – Что здесь особенного? Разве что красивая запись.

Или взять равенство $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Тогда

$$\Phi = \sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{1+\sin^2\frac{\pi}{6}},$$

или как ещё одна псевдонаучная числовая связь непосредственно чисел Φ, π. – Уже нашего доморощенного изготовления.

Можно пойти ещё дальше, теперь со "связью-обманкой" тройки чисел (π, e, Φ):

$$\Phi = e^{\ln\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{1+\sin^2\frac{\pi}{6}}\right)}.$$

Синус некоторых комплексных чисел с мнимой единицей $i = \sqrt{-1}$, связанных с константой ЗС, дает особенно простые значения, например [34]:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\ln\Phi\right) + \frac{1}{2} = \Phi;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\ln\phi\right) - \frac{1}{2} = \phi.$$

Но это совсем не означает числовую связь между константами (π, e, Φ).

Имеет место взаимное отношение конкретных значений функций, но не базовых числовых величин.

Ничего в этом плане не меняют и не привносят записи с подключением экспоненты:

$$\Phi \;=\; e^{1\pi\, i/5} + e^{9\pi\, i/5} \;=\; e^{1\pi\, i/5} - e^{4\pi\, i/5};$$

$$\phi \;=\; e^{2\pi\, i/5} + e^{8\pi\, i/5} \;=\; e^{2\pi\, i/5} - e^{3\pi\, i/5};$$

$$\sqrt{5} = \Phi + \phi \;=\; e^{2\pi\, i/5} - e^{4\pi\, i/5} - e^{6\pi\, i/5} + e^{8\pi\, i/5} \;=$$
$$=\; e^{1\pi\, i/5} + e^{2\pi\, i/5} - e^{3\pi\, i/5} - e^{4\pi\, i/5}.$$

Похожих примеров десятки и сотни.

В подобных случаях речь идет исключительно о формальной перезаписи известного значения Φ через значения других функций: уже известных или вновь вводимых. – С учетом свойства записи экспоненты и натурального логарифма для любого положительного числа.

Как говорится, эка невидаль, что каша естся!

Гиперболические тупики

Напомним, как обратные гиперболические функции (ареа-функции) выражаются через натуральные логарифмы [35, с. 180; 36]:

- ареа-синус $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
- ареа-косинус $\operatorname{arch} x = \pm\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x \ge 1$;
- ареа-секанс $\operatorname{arsch} x = \pm\ln\left[\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)/x\right]$;
- ареа косеканс $\operatorname{arcsch} x = \ln\left[\left(1+\operatorname{sign}(x)\cdot\sqrt{1+x^2}\right)/x\right]$.

Префикс *ar* обозначает сокращение от *area* – площади гиперболического сектора.

Чтобы вычислить ЗС через экспоненту, нужно предварительно определить натуральный логарифм.

Это взаимно аннигилирует обе математические операции.

В итоге остается главная "фишка" золотой константы – квадратный корень из пяти.

То есть числом *e* при подсчете ЗС даже не пахнет. Как и аналитически-числовой связью в целом.

Буковки латинские есть. Экспонента наличествует.

Однако непосредственная связь между числами e, Φ отсутствует:

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arsh} \pm 1/2} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{\pm 1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\pm 1+\sqrt{5}}{2} = \Phi^{\pm 1};$$

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arch} \pm 3/2} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{\pm 3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\pm 3+\sqrt{5}}{2} = \pm\Phi^{\pm 2};$$

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arsch} \pm 2/3} = e^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\pm 2}\right)} = \frac{3+\sqrt{5}}{\pm 2} = \pm\Phi^{2};$$

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arcsch} \pm 2} = e^{\ln\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{\pm 2}\right)} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{\pm 2} = \Phi^{\pm 1}.$$

Можно употребить более экзотичные формулы, например:

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 1/2} + \mathrm{e}^{\operatorname{arch} 3/2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsch} 2/3} + \mathrm{e}^{\operatorname{arcsch} 2} = \Phi^3.$$

Но это ни на йоту, ни на шаг не приближает нас к установлению связи-зависимости между самими математическими константами e, Φ.

Поскольку она отсутствует в принципе.

За исключением отдельных бесконечных рядов.

Бесконечные формы

От взаимного переопределения экспоненты и логарифма можно уйти путем бесконечного разложения в ряд, например, ареа-синуса, с учетом дискретной функции (3):

$$\Phi = \exp\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_n}{2\cdot(2n+1)}\right].$$

Или, скажем, такая форма [37]:

$$e = \Phi^{\frac{2}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Phi^n}}},$$

либо после логарифмирования

$$\ln\left(\Phi^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\Phi^n}.$$

Связь экспоненты и золотой константы здесь уже настоящая, непосредственная.

Но, увы, исключительно за счет применения бесконечного суммирования.

И таких форм достаточно много [26].

Именно бесконечный ряд позволяет «уравновесить генетически разные» иррациональные константы: алгебраическую Φ и трансцендентную e.

Причем число Ф – квадратичная иррациональность [9, с. 248] и целое алгебраическое число, как корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

По нашему мнению, ученый, который претендует на описание философии математики, понимание смыслов математических высказываний и сущности абстрактных объектов, подобные вещи должен видеть без увеличительного стекла и, что называется, чувствовать нутром. Почти на подсознательном уровне.

К сожалению, в цитируемой монографии не удалось в полной мере поднять эту проблематику на должный уровень.

Жонглирование буковками

Безотчетное рисование из математических буковок формальных рядков, без глубокого проникновения в суть, лишь вносит хаос-сумятицу в тему золотого сечения.

Возможно, автор расставляет неточные акценты ненамеренно. Не проникнув глубоко в суть вопроса.

Ведь сами по себе записи абсолютно правомерны. Но они ни на йоту не устанавливают взаимосвязь между константами, которая невозможна в принципе посредством конечных аналитических соотношений. Ибо они разного "формата": алгебраическое и трансцендентное (лат. *transcendens* выходящее за пределы – по Эйлеру) числа.

Никаким равенством их нельзя численно "уравновесить", за исключением некоторых бесконечных сумм.

И никакие двери в математику в данном случае (с константой ЗС) экспонента вовсе не открывает! Как утверждает автор.

Разве что некое внутренне удовлетворение от формальной перезаписи очевидного тождества, только другими символами.

Тот самый обыкновенный случай, когда от перемены буковок ничего не убавляется и ничего не прибавляется.

Итак, имеем заурядную, но закамуфлированную перезапись буковок:

$$\Phi^{\pm} = e^{\operatorname{arsh}\left(\pm\frac{1}{2}\right)}, \quad \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Phi^{\pm} = \frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2}.$$

По замыслу автора, запись $\operatorname{arsh} x$ призвана произвести "экспоненциальный" фурор в представлении ЗС.

Однако ничего мало-мальски существенного она не обозначает, кроме уплывающей вдаль мечты о возможной связи $\Phi \leftrightarrow e$. – Без фантазий наука мертва.

После взаимной "аннигиляции" экспоненты и натурального логарифма $c = e^{\ln c}$ – по определению, не остается даже намека на предполагаемую связь.

В то же время автор с удовлетворением для себя отмечает, что в противовес нашей критике равенство $\Phi = e^{\operatorname{arsh} 0,5}$ «встречается в MathWorld, onlain-энциклопедии OEIS, на сайтах GoldenNet, в статьях Википедии о ЗС на немецком и французском языке, в работах, посвященных золотому сечению или гиперболическим функциям» [1, с. 17]. – И это правильно, с точки зрения записи-расположения буковок.

Далее следует: «Экспонента открывает такие двери в математику и её приложения, в которые раньше не могли войти, либо вообще не знали об их существовании. Это краеугольный камень дифференциального и интегрального исчисления, она фигурирует в решении дифференциальных уравнений любого типа и любого порядка; играет ключевую роль во всех теориях числовой математики». – Абсолютно верно!

Только золотая пропорция (сечение) здесь не просматривается под микроскопом.

Равно как и в придуманной нами на ходу записи $\Phi = \pi + \arcsin\left[\sin\left(e^{\operatorname{arsh} 1/2} + \pi\right)\right]$, где, несмотря на одновременное присутствие (π, e, Φ), числовая связь между самими константами де-факто отсутствует.

Поскольку происходит полная "аннигиляция" синуса–арксинуса и экспоненты–логарифма на фоне синусоидальной периодичности с числом "пи".

То есть разные буковки растворяются как мираж, и остается только $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

Вообщем, «кесарево кесарю, а Божие Богу» (Мф. 22:21).

Ну, а замечательным мыслителям и пытливым исследователям, совершенствующим познание азов математики, – «зрети свои погрешения во веки веков», распознавая за частоколом математических символов-знаков суть вещей и здравый смысл.

Напомним, что «многие описательные выражения не означают вообще ничего».

Но если они не несут определенных значений, то в философском смысле, наверное, «могут иметь смысл. Даже без принятия метафизических концепций вроде несуществующих сущностей» [38, с. 126].

Поэтому внешность записи часто бывает обманчива. Как и подлинное содержание вышеприведенных формул-форм, которые не имеют общего с золотым сечением.

Но являются общим правилом для любого положительного числа или функции. Какие бы не возникали ассоциации, они не соотносятся именно с целевой смысловой нагрузкой, которая именуется золотым сечением.

"Обобщизмы"

Это примерно так же, как собственные исследования ставятся во главу угла.

Подобным страдают монотеизм, разные центризмы, "обобщизмы" и т.п. Как правило, с тупиковыми вариантами развития. Но мало кого из "синтезаторов" это волнует всерьез.

Главное – создать звуковые и/или гравитационные волны-колебания.

При этом они согласны на белый шум с нулевым математическим ожиданием.

Поэтому "обобщизмы" часто характеризуются склонностью систематизировать абы что, и абы зачем.

По причине чего возникают сомнения в их целесообразности.

Набор математических формул для ЗС достаточно простой. Поэтому многие исследователи хотят их как-то расширить, придумывая пресловутые обобщения. – Да ещё в пределах квадратного уравнения.

Что нового приносит в ЗС подобное, так называемое обобщение? – Ровным счетом ничего. Разве что разруху в головах непосвященных. Обычный анализ частных случаев алгебраического полинома. Хотя его можно проводить, и де-факто проводят самостоятельно, без увязки с золотым сечением, о существовании которого можно даже не знать.

"Обобщизмы" по Г. Аракеляну с разделением на противовесы ("льзя" – нельзя), по нашему мнению, также фактически ведут к неправильному толкованию.

> «Среди потока публикаций по золотому сечению заметное место занимают работы, претендующие на обобщение теории ЗС.
>
> Обычно рассматриваются квадратные уравнения, рекуррентные последовательности второго и высших порядков, гиперболические и тригонометрические функции, связи золотого числа с другими математическими константами и некоторые другие формы математического представления ЗС.
>
> Одна из главных задач настоящей работы – выяснить, как, в каких пределах и какими средствами допустимо обобщение теории ЗС без потери формальной и онтологической связи с канонизированной математической первоосновой и традиционными толкованиями.
>
> В противном случае может получиться, возможно, и интересная, математическая конструкция, уводящая, однако, в сторону, в оторванные от золотых истоков заоблачные математические дали.
>
> Следует полагать, что любая математическая модель прикладного характера, претендующая на описание реалий внешнего мира, должна ограничиться применением лишь тех формальных средств, того математического инструментария, который необходим для решения поставленной цели и который онтологически оправдан» [1, с. 5].

Отсюда растут лженаучные корешки в части обобщения ЗС, у истоков которого стояли известные ученые [39, 40].

С таким же успехом по искаженной логике-аналогии можно называть обобщением золотого сечения алгебраическое уравнение общего вида n-й степени, потому как оно тоже содержит уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ частным случаем.

Подобное безосновательное "клонирование золотообразной терминологии" описано, в частности, в работе [41], где фактически подтверждается бессмысленность и абсурдность распространения "золотоносных" определений на нетипичные для ЗС корни алгебраических уравнений.

Например, рекурсию $f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$ для характеристического алгебраического уравнения $x^3 = x^2 + 1$ иногда называют "коровьей последовательностью" [5, с. 47].

Соответственно употребляется термин "сверхзолотое число", как предельный аттрактор этого ряда, и "сверхзолотой прямоугольник" [5, с. 51].

Подобная оценка, да ещё с позолотой, по нашему мнению, носит эмоциональный характер и подчеркивает, что числа Фибоначчи с их золотым аттрактором не единственны и допускают расширение в похожем числовом подмножестве [32].

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля в работе представлен основательно, если не помпезно. Словно некая сакральная икона. Поэтому есть смысл остановиться на этом подробнее.

Напомним, треугольник Паскаля – бесконечная числовая таблица в виде треугольной формы, известная ещё китайским мыслителям 13 века.

На вершине и по боковым сторонам стоят единицы, а всякое другое число равно сумме двух предшествующих и совпадает с биномиальными коэффициентами [42].

Строки симметричны относительно вертикальной оси.

То есть число последующего уровня равно сумме двух чисел предшествующего уровня, как ближайших расположенных над ним чисел.

Данный алгоритм адекватным образом соответствует классической форме построения многочисленных последовательностей, включая числа Фибоначчи, как частный случай аддитивной формы с единичными начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$.

Сумма чисел восходящей диагонали треугольника Паскаля – есть число Фибоначчи

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_{n-k}^{k},$$

где $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты – число сочетаний из n по k.

	1
1	1 1
1	1 2 1
2	1 3 3 1
3	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
8	1 6 15 20 15 6 1
13	1 7 21 35 35 21 7 1
21	1 8 28 56 70 56 28 8 1
34	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

$$\begin{array}{rcl} 1+6+10+4 &=& 21 \quad F_8 \\ 1+7+15+10+1 &=& 34 \quad F_9 \\ \hline 1+8+21+20+5 &=& 55 \quad F_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1+7+15+10+1 &=& 34 \quad F_9 \\ 1+8+21+20+5 &=& 55 \quad F_{10} \\ \hline 1+9+28+35+15+1 &=& 89 \quad F_{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1+8+21+20+5 &=& 55 \quad F_{10} \\ 1+9+28+35+15+1 &=& 89 \quad F_{11} \\ \hline 1+10+36+56+35+6 &=& 144 \quad F_{12} \end{array}$$

Треугольник Паскаля – действительно изящная числовая схема. Кладезь удивительных целочисленных находок – родоначальников развитых теорий.

Хотя многочисленные комбинаторные формулы для числовых последовательностей работают без обращения к этой конфигурации чисел в форме равнобедренного треугольника.

Удивительно не то, что числа Фибоначчи присутствуют в треугольнике в той или иной форме. Было бы очень странно, если бы их там не было, учитывая алгоритм построения.

«Множество связей треугольника Паскаля с другими областями математики превратили этот конструкт в предмет поклонения» [5, с. 52].

Но в который раз спрашиваем: причем здесь золотое сечение?

Или, наоборот, для чего здесь выуживать числа Фибоначчи, если речь идет о золотом сечении.

Упомянуть, конечно, можно.

Однако выставлять числовой треугольник своеобразным "пупом земли" для ЗС (посредством чисел Фибоначчи), по меньшей мере, несерьезно.

Конечно, допускаются системные преобразования и так называемые "антипреобразования" с треугольником Паскаля, биномом Ньютона, числами Фибоначчи и золотым сечением в терминологии общей теории систем [43]. Но каждого математического объекта в отдельности для подтверждения-толкования самой теории, без их взаимной увязки.

Паскаль и Ньютон

В рассмотренном контексте есть другая, действительно "золотоносная" стезя.

С треугольником Паскаля тесно связан бином Ньютона – формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных.

Именно здесь находим достойное место явному присутствию ЗС!

В частности, имеем замечательное объединение биномиальных коэффициентов и степеней малой золотой константы для любого натурального n [44]

$$1 \equiv \left(\phi + \phi^2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \phi^{k+n} ,$$

Перед нами уникальная форма конечномерных тождеств-представлений единицы через золотое сечение и биномиальные коэффициенты <треугольника Паскаля>.

В понятии ЗС ключевую роль играет единичный "геном". Собственно, само ЗС является порождением целого.

Добавим к этому бесконечное представление:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \phi^k \equiv 1 \equiv \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \phi^{k+n} . \tag{4}$$

Хорошо видно, как биномиальные коэффициенты выступают в качестве своеобразного балансира-компенсатора между конечным и бесконечным представлением золотого сечения.

Заметим, сумма n-й строки биномиальных коэффициентов равна n-й степени двойки

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n . \tag{5}$$

В поразительных выражениях (4)–(5) воочию проступает "Клондайк" для научно-философского осмысления целого и его конечно-бесконечных форм-проявлений посредством золотого сечения.

Наподобие модели удвоения целого согласно золотой пропорции [45], как прототипа роста и последующего деления биологической клетки.

Более того, последовательное деление пополам согласно форме 2^n (5), с помощью тех же биномиальных коэффициентов и подключения золотого сечения (4) выполняет поддерживающее состояние единичного целого!

Числа Фибоначчи, при всей их важности и красоте, здесь выступают рудиментом, отвлекающим внимание от золотого сечения на несущественные детали-проявления.

Привлекать к осмыслению лучше числа Люка, которые непосредственно связаны со степенями ЗС с высочайшей степенью точности по мере роста n

$$\sqrt{5}\cdot F_n \;\approx\; \Phi^n \;\approx\; L_n,$$

в отличие от чисел Фибоначчи, которые требуют для соблюдения равенства уравновешивающий коэффициент – квадратный корень из пяти $\sqrt{5} = \phi + \Phi$, то есть фактическое определение константы Φ через саму себя. – Эка, невидаль.

Если мы по-настоящему хотим оживить эти числа в золотом сечении, то нужно хотя бы явное присутствие золотых констант.

Так, в работе [22] приведено одно обобщение для любого нечетного $m = 2j–1$:

$$f_m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n \phi^{m\,n} \;=\; 1,$$

где f_m – числа рекуррентного ряда A001610 [46] $f_m = f_{m-1} + f_{m-2} + 1$ с начальными условиями $(f_0,\, f_1) = (1, 0)$.

Или, например, золотое сечение через суммирование арктангенсов обратных чисел Люка $L_m = L_{m-1} + L_{m-2}$, $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$ и др.:

$$\Phi = \mathrm{tg}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{arctg}\, L_{2k}^{-1}\right); \qquad \Phi = 4 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}}.$$

В качестве промежуточного итога можно сказать, что взятая автором из известных учебников интерпретация треугольника Паскаля, ни на шаг не приближает нас к расширению познания золотого сечения.

Что касается «современной теории последовательностей Фибоначчи», то она уже давным-давно вышла за пределы ЗС на вольные просторы, для чего достаточно посмотреть работы 20-летнего периода давности, связанные с обобщенными и модифицированными пирамидами Паскаля – трехгранными пирамидальными числовыми массивами [47, 48].

Там присутствует воистину волшебные преобразования чисел и такой высокий уровень обобщения числовых массивов, что "золотому сечению и не снилось"! – Да они ему собственно и не нужны.

Мнимая теория золотого сечения

Известный образ «высасывания теории из пальца» – одновременно популярный прием, применяемый при создании всеобъемлющих мега-теорий.

Однако количество информации, искусственно нагромождаемое вокруг ЗС, отнюдь не способствует её перерастанию в качество, для достойного воссоздания математического феномена.

Наоборот, в погоне за второстепенным количеством ухудшается качество основного отображения. Ворохом нагромождается всё что нужно и не нужно, включая вещи, не имеющие отношения к тематике золотого сечения, в частности:

– закон Бенфорда в приложении к числам Фибоначчи;
– треугольник Паскаля в его традиционном обсуждении;
– более четырехсот с половиной пронумерованных формул;
– производящие функции для различных последовательностей;
– обобщения, которые "обобщают" непонятно что, и самое главное для чего.

Сами по себе последовательности Люка, числа и полиномы Фибоначчи и Люка слабо связаны с ЗС. Разве что исторически.

Или такой момент: 16 % всей книги либо более четверти её исторического обзора занимают всевозможные изображения-отображения пятиугольной звезды. Что само по себе не имеет видимой связи с золотым сечением так таковым.

Пентаграмма с давних времен используется как древний символ-знак. Золотое сечение с его историей к этому не имеет отношения. Упомянуть, безусловно, нужно. Но вытягивание на свет божий всех рукотворных звезд не прибавляют теме ЗС ровным счетом ничего нового и/или полезного. Лишь накручивает книжно-буквенный километраж.

Кстати, сам же автор правильно отмечает [1, с. 53]:

«Пентаграмма, к примеру, только одна. В сущности это вполне определенная математическая абстракция, которая в античной философии могла пониматься как эйдос… И каким бы не был размер правильной, не деформированной пентаграммы, как бы она не была повернута, это всегда один и тот же объект, математическая модель, существующая в единственном экземпляре».

Не говори больше, чем необходимо

Нет смысла разбирать далее работу доктора философских наук. Об этом напоминает и данный подзаголовок, который, прежде всего, соотносится с монографией – неплохо скомпилированной книгой из многих источников. Однако, по нашему мнению, без привнесения свежих концепций по теме золотого сечения.

Если философско-исторические направления освещены достаточно приемлемо, то первые четыре главы, претендующие на математико-описательную часть ЗС, явно не дотягивают до ожидаемого уровня изложения. В результате вместо всестороннего представления изучаемого объекта имеет место подробное описание разнородных вещей, не имеющих отношения к основному предмету исследований.

Всё это дает основание утверждать, наравне с достоинствами и положительными аспектами, о малополезных проявлениях работы.

Воистину, лучшее – враг хорошего. Как антагонист, способный придушить в своих "дружелюбных" объятиях ладно скроенный образ.

В итоге много гиперболизированных положений.

Немало многообещающих посылов на оригинальность.

А на деле досадное "послевкусие" с элементами девальвации ключевой темы.

Собственно, иначе и не могло быть. Поскольку налицо увод от центральной линии по разным третьестепенным направлениям. Наводнение малосодержательными описаниями.

Плюс к этому неприкрытое манипулирование, особенно в продвижении "обобщизмов" и неуместном преувеличении очевидной логарифмической формы-перезаписи буковок

$$\Phi = e^{\ln\Phi} = e^{\operatorname{arsh} 0{,}5}.$$

В конечном счете, выявляются математические ошибки и методологические просчеты, несвойственные философии математики. – Даже по такой узкой теме, как феномен золотого сечения, который при всей своей обманчивой доступности-простоте всё-таки требует определенной подготовки и опыта работы в рассматриваемой области.

Вместо заключения

Подводимый итог вкратце сводится к тому, что по мере чтения книги [1] настроение быстро менялось от больших ожиданий и полагаемых надежд до появления элементов разочарования.

На наш взгляд, в монографии не нашли отражения новые интересные решения с раскрытием механизмов реального продвижения в области золотого сечения.

В древние века Леонардо Фибоначчи решал задачу о размножении кроликов.

В новейшей истории современный философ де-факто множит золотое сечение.

Да еще в трех уровнях-подмножествах! Выстраивая собственного изготовления "обобщизмы", чуждые золотому сечению.

Пожалуй, это главный мем или репликатор – "размножение ЗС".

Неуклонно не берется во внимание, что «число $\Phi = 0{,}5 + \sqrt{1{,}25}$ имеет *собственное имя*, оно называется *золотым сечением*» [16, с. 14] или «специальное название – отношение золотого сечения и обозначается греческой буквой Ф в честь Фидия» [31, с. 331]. – Для константы понятие "обобщения" не существует в принципе. По определению.

Придуманная словесная уловка-зацепка, вроде как обобщается не число, а принцип его образования (модель), нисколько не изменяет положение. Поскольку фактически идет расширение квадратного уравнения до уровня алгебраического полинома общего вида n-го порядка. Ну, и хорошо. – Только причем здесь ЗС и давно сложившаяся терминология?

Многие другие описания, включая искусственное жонглирование квадратичными моделями и/или триномами старших степеней, – есть "псевдо-золотой" отсев на ниве несообразных "обобщизмов" с их терминологической позолотой.

Есть «дурная бесконечность» (Гегель), а теперь впору говорить о ненужных «дурных обобщениях ЗС». Со всеми вытекающими отсюда синонимами.

Во избежание двусмысленности и правильного понимания предметной области ЗС, следует признать паралогизм "обобщенных ЗС" ложно построенным суждением, с его изъятием из практики научного общения [6].

Наука не застрахована от ошибок.

Важно только, как говорил академик П. Капица, не настаивать на своих ошибках.

В принципе с этим согласен и сам автор [49, с. 11]: «Выражения "обобщение константы Ф" содержательно бессмысленно, а метафорическое выражение "обобщение золотого сечения", строго говоря, не вполне некорректно. Нельзя обобщать конкретную пропорцию, а тем более константу; другое дело теория или модель, принцип, уравнение и вообще теоретическая конструкция».

И последнее, субъективно-человеческое…

При всём почтении-уважении к великим математикам С. Рамануджану, Н. Воробьеву, Ю. Матиясевичу следует отметить, что их работы имеют самое отдаленное отношение к золотому сечению. В отличие от видного патриарха-исследователя и большущего популяризатора ЗС современности – д.т.н. профессора А. Стахова.

Жаль, что ему не нашлось место в портретной галерее [1, с. 360–364] созидателей ЗС.

Зато ничем не обоснованным "правилом мантисс" (из справочника Стеля) его мягко выдавили из родоначальников «обобщенных ЗС», пусть нами и критикуемых.

В угоду популяризации собственной формы в виде обыкновенной перезаписи математических тождеств измененными буковками. По нашему мнению, это также характеризует момент истины или примечательный маркер для квинтэссенции. С некоторой похожестью-ассоциацией на отражение мифологического Нарцисса в зазеркалье…

В целом монография, конечно, хорошая, сработана на совесть и по многим позициям является новаторской. Остается пожелать автору Г. Аракеляну новых творческих решений и по возможности адекватного отклика на замечания.

Что делать? – Такова авторская доля: «Отдельные ошибки всегда остаются незамеченными, пока книга не попадет на прилавки» [50, с. 579].

«Никогда не думай, что ты иная, чем могла бы быть иначе, чем будучи иной в тех случаях, когда иначе нельзя не быть» (Льюис Кэрролл, Алиса в зазеркалье).

Литература:

1. Аракелян Г.Б. Математика и история золотого сечения. – М.: Логос, 2014. – 404 с.
2. Радзюкевич А.В. Красивая сказка о "золотом сечении" // Электронный журнал по дизайну Sibdesign. – URL: sibdesign.ru/index.php?razdel=stat.
3. Ясинский С.А. Золотое сечение» – красивая сказка и всеобщий морфологический закон развития природы, общества и мышления // Личность и культура. – 2004. – № 3. – URL: http://lichnost-kultura.ru/index.htm.
4. Беляев М.И. О золотом сечении // Клуб Константа. – URL: http://314159.ru/bel/bel1.htm.
5. Крилли Т. Математика. 50 идей, о которых нужно знать: Пер. с англ. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с. – URL: http://padaread.com/?book=223256&pg=14.
6. Василенко С.Л. Математика золотого сечения глазами философа // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 24.08.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=38&sm=2.
7. Василенко С.Л. Позолоченные балахоны // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17121, 19.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322093.htm.
8. Хинчин А.Я. Цепные дроби: 4-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
9. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
10. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
11. EqWorld. Мир математических уравнений / Теория чисел. – URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numtheory.htm.
12. EqWorld. Мир математических уравнений / Численные методы. – URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm.
13. Гельфонд А.О. О седьмой проблеме Гильберта // Доклады АН СССР. – 1934. – Т. 2. – С. 1-6.
14. Василенко С.Л. Квадратичная модель золотых степеней. Ч. 2 // Научно-техн. б-ка SciTecLibrary. – 19.10.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14178.html.
15. Василенко С.Л. Золотое сечение в классических фракталах // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.08.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=36&sm=2.
16. Арнольд В.И. Цепные дроби / Б-ка "Математ. просвещение". Вып. 14. – М.: МЦНМО, 2001. – 40 с.
17. Roselle B. Golden Mean Series. – URL: https://sites.google.com/site/goldenmeanseries/.
18. Квадратный корень. – URL: ru.wikipedia.org/?oldid=76415885.

19. Василенко С.Л. Златые цепи // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm.

20. The Fibonacci Quarterly. – URL: fq.math.ca/list-of-issues.html.

21. Браун Р. Математика за 30 секунд: 50 величайших теорий математики, по 30 секунд на каждую: Пер. с англ. – М.: Рипол-Классик, 2014. – 160 с.

22. Василенко С.Л. Новые рекуррентные формы золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-техн. б-ка SciTecLibrary. – 20.11.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.

23. Василенко С.Л. Золотой калейдоскоп: функциональные уравнения и золотое сечение // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 30.08.2012. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12197.html.

24. Василенко С.Л. Наивная гармонизация и научный анархизм // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 01.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=109 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 18.12.2013. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13255.html.

25. Стахов А.П. Основы математики гармонии и её приложения. Часть 1 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.18251, 14.10.2013. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/007a/02321015.htm.

26. Василенко С.Л. Базовые соотношения между фундаментальными константами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.

27. Василенко С.Л. Золотой калейдоскоп: функция Эйлера и золотое сечение // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 18.08.2012. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12187.html.

28. Weisstein E.W. Gudermannian // MathWorld – A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/Gudermannian.html.

29. Жуков А.В. Вездесущее число "пи". – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.

30. Савин А.П. Замечательные числа // Квант. – 1987. – № 4. – С. 33.

31. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

32. Василенко С.Л. Триномы старших степеней: от деления пополам и золотого сечения – до модели единичного абсолюта // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 07.06.2015. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/15014.html.

33. Василенко С.Л. "Фантомы" золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 01.07.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=77&sm=2.

34. Weisstein E.W. Golden Ratio // MathWorld. A Wolfram Web Resource. – URL: http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html.

35. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., испр. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

36. Обратные гиперболические функции. – URL: http://ru.wikipedia.org/?oldid=70938903.

37. Василенко С.Л. Прикладная гипотизация золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17253, 24.01.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322131.htm.

38. Дюпре Б. Философия. 50 идей, о которых нужно знать: Пер. с англ. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с.

39. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 151 с.

40. Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: введение в общую теорию гармонии систем: 2-е изд. – М.: URSS , 2006. – 262 с.

41. Василенко С.Л. Клоны золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15641, 09.11.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161573.htm.

42. Успенский В.А. Треугольник Паскаля: 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1979. – 48 с.

43. Урманцев Ю.А. Связь системных преобразований и антипреобразований с треугольником Паскаля, биномом Ньютона, рядом Фибоначчи, золотым сечением Пифагора и фундаментальными константами физики // Сознание и физическая реальность. – 1997. – Т. 2, № 1. – URL: sci.aha.ru/ots/pascal.zip.

44. Беляев М.И. Милогия, 2006. – URL: milogiya2007.ru/uzakon2_2.htm.

45. Василенко С.Л. Золотое сечение в задачах сжатия-растяжения и деления целого пополам // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 28.08.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14046.html / Математ. и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 05.10.2014. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=122&sm=2.

46. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – URL: http://oeis.org/A001610.

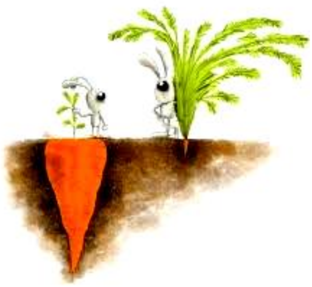
47. Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. – М., 2000. – 294 с.

48. Кузьмин О.В. Обобщения чисел Фибоначчи и Трибоначчи // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2000. – Вып. 4. – С. 188–198. – URL: ellib.library.isu.ru/showdoc.php?id=4906.

49. Аракелян Г.Б. О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm.

50. Блох А. Полное собрание законов Мерфи: Пер с англ. – 4-е изд. – Минск: Попурри, 2008. – 608 с. – URL: http://www.klex.ru/et1.

Харьков, Украина



Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html

P.S. *или З.І. по-украински*.

При написании данной работы большое внимание уделялось подборке фигур речи с максимально нейтральным и непредвзятым стилем изложения.

Возможно, в некоторые места всё-таки невольно "просочились" эмоциональные окраски. Но исключительно под собственным впечатлением прочитанной книги.

Ничего личного, только предмет обсуждения.

"Quot homines, tot sententiae" (Теренций, Рим) – сколько людей, столько и мнений.