Метаморфозы представлений:
от деления в крайнем и среднем отношении – до золотой пропорции

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Представлен терминологический спектр в области "золотого сечения". Рассмотрена морфология «крайнего и среднего отношения» в золотой пропорции. Описана новая форма золотой модели, объединяющей традиционное сечение (анализ) и рост-приумножение (синтез). Дана краткая характеристика "божественной пропорции" Луки Пачоли с пояснениями итальянского ученого. Приведены комментарии к проблематике В. Говорова.

Оглавление

Введение....1
Проблематика В. Говорова....2
Золотые вариации....3
Крайние и средние отношения....4
Вернуться к истокам....5
Терминологический парадокс "золотого сечения"....6
Новая форма золотой модели....8
Сечения в науке....10
Божественная пропорция Пачоли....10
Пояснения к названию "De La Divina Proportione"....14
Живучий "мертвый" язык латыни....14
"Разное" или обо всём понемногу....15
Вместо заключения....17
Литература....17

Кто медлит, обрести не может знанье.
Данте, Божественная комедия (1321)

Введение

Одним из побудительных мотивов к написанию настоящей статьи стало критическое эссе-письмо В. Говорова (далее по тексту – автора, URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/1383-00.htm), распространенное среди читателей Академии.

Привести, к сожалению, не можем, ввиду исключительного авторского права.

Однако по мере изложения многое прояснится и станет понятным.

Мир тесен…

У нас оказались общие точки пересечения (не путать с сечениями!) в перепутьях.

Оба закончили замечательные харьковские институты (сегодня университеты): он – авиационный (1969), я – политехнический (1976).

Объединяет также экологическая безопасность (ЭБ): он – Действительный член Международной общественной академии ЭБ и природопользования, моя докторская: «Обеспечение ЭБ систем водоснабжения городов».

Уже поэтому прозвучавшие в письме эпитеты-характеристики с их арготической лингвистикой выносим за скобки и оставляем, главным образом, элементы с творческо-созидательным началом.

Взаимная критика нужна. Даже острая, которая помогает любому человеку "расти над собой" без выпячивания гордыни (Ю. Цымбалист).

Она позволяет удерживать общую направленность вектора развития в любой проблематике. Глобально менять подобные устремления – удел немногих, если не считанных единиц. Их имена в науке хорошо известны. Они птицы.

Мы же больше ремесленники и/или "лягушки". И в этом нет ничего зазорного.

«Бывают ученые-птицы, а бывают и ученые-лягушки. Птицы парят в вышине и обозревают обширные пространства математики, сколько видит глаз. Наслаждение им доставляют понятия, которые сводят наши размышления воедино и совместно рассматривают задачи, возникающие в разнообразных элементах пейзажа. Лягушки же копошатся далеко внизу в грязи и видят только растущие поблизости цветы. Для них наслаждение – внимательно разглядывать конкретные объекты; задачи они решают последовательно, одну за другой» [1].

Отношение к исследователям в каждой эпохе всегда неоднозначно.

Одних восхваляют при жизни, но потом навсегда покрывают пылью забвения.

Других нередко чихвостят, на чем свет стоит. Но со временем, опомнившись и оценив, отдают дань памяти и должного уважения.

Как правильно говорят, «Несть праведен пророк в отечестве своем» (см. Мф. 13:57). Ошибочно считая, что всё мудрое и лучшее рождается где-то далеко.

Одного из плеяды пророков – Иисуса Христа потомки-последователи почти через 400 лет даже уравняли с богом.

Причем сделали это благодаря Риму – родине латыни, которая так нелюбима нашим автором. Хотя на безбожника-атеиста он совсем не похож.

Проблематика В. Говорова

По нашему мнению, креативные и буквально фонтанирующие мысли автора нужно улавливать как в построчном, так и в междустрочном формате-выражении.

Важно не только, как он пишет, но и о чём.

1) Так, с термином "сечения" (золотого) он абсолютно прав. Это издержки не самого лучшего заимствования и перевода на русский язык.

Золотая пропорция в этом плане выглядит более совершенной и несет в себе идеи не только анализа-расчленения, но и синтеза-приумножения.

2) С крайним и средним отношениями в пропорции автор тоже зрит в корень. По-русски звучит несколько странно и не совсем корректно. Невольно создается впечатление вольных интерпретаций, когда смешались средние и крайние члены пропорции с такими же отношениями, которых всего-то два, и по расположению оба крайние. Для лучшего понимания ситуации следует обратиться к истокам и представлениям античных ученых.

3) Восхваляемая им «божественность пропорции» Луки Пачоли требует отдельных пояснений, а не простого преклонения перед "дивинной" терминологией (*divina proportione*).

Древний трактат полностью основан на "Началах" Евклида.

Термин "божественности" – высокопарный возвышенный слог древнего монаха, и не более того. Впрочем, как и привнесенная со временем "золотистость".

Следуя замечательному немецкому астроному и математику И. Кеплеру, "золотое сечение" следовало бы, скорее, назвать "алмазным" или другим драгоценным камнем, а теорему Пифагора «уподобить куску золота» [2–4].

В математике подобные "кульбиты" происходят довольно часто.

4) Наконец, отдельный блок составляет некоторое множество разновесных и разноплановых формулировок, которые можно объединить под общим понятием "разное" или обо всём понемногу. По мудрой русской пословице: у кого что "болит", тот о том и говорит. – В хорошем смысле.

В общем, автор задал ряд тем-вопросов, как для переосмысления, так и разъяснения.

Непривычный стиль изложения, применение ярких эпитетов и других выразительных средств лексики, на наш взгляд, – это как бы наносное, внешнее.

Своего рода вербальные маркеры для привлечения внимания.

Как видим, срабатывает.

В частности, под "тупицами" можно легко и спокойно понимать образ человеческого поведения – новичков или "чайников", которые не знают чего-то, но при получении информативных сведений стараются быстро их усвоить, развить и приумножить.

Ещё вчера в чём-то "незнайка", сегодня метр, публикующий книги в «издательстве для Нобелевских лауреатов».

С «ушами от мертвого осла» (по Ильфу и Петрову) ещё проще. – Посылку можно просто не забирать, и она сама вернется почтой отправителю. Со всеми издержками…

Золотые вариации

В своем преклонении перед термином "божественной пропорции" наш автор не одинок.

Достаточно вспомнить работу А. Черняева с его широким спектром знаний [5]: «Сейчас вопрос о применении точной научной терминологии стоит с особенной силой».

Но сразу же дается посыл, вызывающий недоумение. Будто только «божественная пропорция» отвечает верной терминологии. И благодаря, надо понимать, его публикациям она «обрела свою вторую молодость». Теперь с её помощью «наша математическая наука стремительно движется вперед семимильными шагами – и будет странно читать "научные публикации", опирающиеся на сведения вчерашнего дня» [5].

В определенных обстоятельствах подобные категоричные посылы-обращения можно рассматривать как навязывание религиозных воззрений.

Но не это главное.

Полезно вспомнить, что «божественная пропорция», как патетический образ–эпитет Луки Пачоли, имеет чисто исторический контекст. Без нынешних аналогий и параллелей.

Да и что собственно хотели услышать от монаха средневековья?

Достаточно взглянуть на современное использование широкого спектра терминологии в англоязычной литературе, посвященной этой области [6]:

– золотое отношение – golden ratio;
– золотое сечение – golden section;
– золотое среднее – golden mean [7];
– золотая пропорция – golden proportion;
– золотой разрез – golden cut;
– золотое число – golden number;
– среднее Фидия – mean of Phidias [8];
– крайнее и среднее отношение – extreme and mean ratio [9, 10];
– божественная пропорция (сечение) – divine proportion [11] (section).

Понятно, здесь могут быть те или иные лексические формы-отклонения.

Но главное видно: есть золотое среднее (*golden mean*) и золотая пропорция (*golden proportion*) как равенство отношений числовых величин.

Причем золотое среднее (*golden mean*) образуется по аналогии с широко известными математическими средними величинами: геометрическое (*geometric mean*), арифметическое (*arithmetic mean*), гармоническое (*harmonic mean*).

В русскоязычных публикациях, включая справочники, можно увидеть такие названия как гармоническая (гармоничная) пропорция или гармоническое сечение [12].

К этому можно добавить "золотое" алгебраическое уравнение $x^2 = x+1$ и его эквивалентное представление в виде возвратного (разностного) уравнения или золотой рекурсии $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$.

Но самое интересное, все эти названия в разных транскрипциях-интонациях – практические синонимы.

Они отражают один и тот же предмет в алгебраической геометрии, который, так или иначе, сводится к математической константе $\Phi \approx 1{,}618$.

"Золотой" числовой образ, по сути, собрал и зафиксировал под одним сводом такие разные понятия, как сечение (геометрическое), пропорцию, алгебраическое и разностное уравнения, константу и характеристику среднего.

Конечно, это вовсе не означает, что мы уравниваем между собой число и пропорцию, сечение и уравнение.

Так, в статье [13] точно отмечается: «словосочетания "золотое сечение" и "золотая пропорция" не равноценны семантически, поскольку первое относится к геометрии, где измерениям предшествует выбор масштаба, а второе принадлежит арифметике, где единица вводится аксиоматически и деление чисел не эквивалентно измерению».

И тем не менее...

Если оное не приводит к путанице, излишней щепетильности читательской аудитории или чопорности авторского восприятия, то по большому счету пригодны все эти термины-характеристики.

Во всяком случае "ломать копья" по этому поводу не обязательно.

Хотя наше предпочтение на стороне золотой пропорции.

Крайние и средние отношения

Автор отмечает затруднения, связанные с интерпретацией «крайних и средних отношений в золотой пропорции».

И не только он.

Вспоминается подробное рассмотрение данного вопроса А. Никитиным [14–16].

Тем не менее, термин деления «в крайнем и среднем отношении» (КСО) давно и основательно принят в математике. Посему не стоит драматизировать ситуацию.

Можно, конечно, сетовать на издержки интерпретаций при формальном переводе. Когда в одной посудине смешались крайние и средние члены пропорции вместе с отношениями c/a, a/b, которых в пропорции всего два, и с точки зрения расположения или зрительного восприятия оба крайние, без среднего.

Но лучше всё-таки попытаться вникнуть в логические шаги-рассуждения древних ученых и понять ход их мысли.

Прежде всего, КСО имеют место только в золотой пропорции с её равными средними членами. В пропорции общего вида КСО нет.

Кроме того, Евклид делил исключительно геометрические линии.

Это потом ученые стали распространять золотую пропорцию на объекты любой природы, используя понятие целого и его аддитивных частей.

Исходя из этого, приходим к простой реконструкции.

Понятия "крайнего" и "среднего" касаются не расположения двух отношений пропорции в визуальном аспекте, а формы организации (!) самих отношений [17, 18]:

– первое отношение образуют два отрезка, имеющие общий край;
– второе отношение формируют отрезки, имеющие общую середину (рис. 1).

Рис. 1. Понятийный смысл терминов «крайнего и среднего отношений»
в интерпретации точки сопряжения

Причем в первом отношении обязательно участвует целое и только одна из его частей.

В середине отрезка могут сопрягаться исключительно части.

Вот и вся, на наш взгляд, разгадка (рис. 2).

Рис. 2. Члены и отношения золотой пропорции
в терминологии "крайнего" и "среднего"

Вернуться к истокам

В связи с переосмыслением системы оснований философии в рамках гармонии меры требует уточнения не только терминология понятий, но и применяемые сокращения [19].

В частности, не понятно, откуда в области золотого сечения вдруг появилась почитаемая некоторыми иностранцами (чаще американцами) τ-система.

Основным обозначением неожиданно стало $\tau = 1{,}618$. По нашему глубокому убеждению, такие искусственные метаморфозы вовсе не обязательны для фундаментальной константы, находящейся в одном ряду с числами π, e и др.

То, что именуется золотым сечением (ЗС), уже давно имеет более древнее и вполне законное имя – число Фидия. И четкие обозначения $\Phi = 1{,}618\ldots$ и $\phi = 0{,}618\ldots$, в которых нашла отражение очевидная логика: большему числу – большая буква и наоборот [20]. – «Применение для ЗС буквы τ – это типичный американизм, дабы отличиться и перехватить инициативу от европейцев в свои руки».

Вместе с буквой также пытаются вывести из терминологии сам символ Фидия.

Очень уж хочется оставить только "золото", отбросив другое, правда, без "позолоты", историческое название.

За заменой числа Фидия на безликое τ просматривается его противопоставление европейской культуре и научным традициям, включая славянские.

В угоду кому или чему? Только на том основании, что в латинском алфавите нет буквы Ф? – Но там и τ нет. Почему-то надо использовать исключительно термин – "золотое сечение", с историей от Леонардо Да Винчи, а всё остальное засунуть потихоньку на дальнюю полку, покрыв пылью забвения.

К счастью, это уже осмыслили и на Западе.

Даже Американская Ассоциация Фибоначчи (The Fibonacci Association) пусть медленно, переступая через свою исключительность, но постепенно возвращается к оригиналу.

Подобные явления мы наблюдаем в математической справочной литературе [21].

Вот как об этом писали более 100 лет назад [22]: «Спираль – ключ к пониманию органической природы, а возможно, и живых человеческих существ. Фундаментальным математическим выражением спирали есть число $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$ – отношение Фидия, золотое сечение или божественная пропорция, как его по-разному называли в истории».

И что характерно... На английской клавиатуре нет буквы Ф, но люди всё равно, будучи ей верны, выписывают латинскими буквами Phi или phi.

Это и есть настоящая приверженность к установившимся обозначениям, которые закрепились как у нас, так и в Европе. Что можно только приветствовать.

Так что есть число-отношение Фидия, как основание математической гармонии.

Терминологический парадокс "золотого сечения"

Формулировки "золотого сечения" обычно ориентированы на разбиение, и характеризуют типичный анализ, в основе которого лежит дробление, расчленение, разъединение... В понятийном пространстве состояний здесь изначально присутствует некая разрушительная составляющая. Да ещё часто под соусом гармонии [23].

Эка, сидят и расчленяют ... живой организм на гармоничные составляющие. Довольно неестественная, вообще-то вещь, которая многими воспринимается как должное действо.

Даже формулировка задачи ориентирована не на созидание, а на разбиение.

Резать, отсекать, вырезать, вычленять... Парадоксально!

Как ни странно, но отсюда и вектор мозговых усилий подсознательно выстраивается подобающим образом.

Что там рассуждать, если мы даже в исследовательских задачах ничего не добавляем. Зато успешно режем, благополучно пилим, счастливо разделяем и размельчаем.

Сплошная экзекуция-хирургия.

Напомним, что было время, когда форма представления математического выражения была установлена примерно так:

- "хороший стиль", – формула дана в виде отношения или произведения;
- "плохой стиль", – формула представлена суммой или разностью.

Хорошим стилем считалось выстраивать различного рода пропорции, причем часто безотносительно конкретных единиц измерения. За счет отношений однородных величин.

Следует также отметить, что в теоретическом плане напыщенное раздувание "золотоносного" фактора в гармонии содержит сразу две наиболее принципиальные методологические ошибки:

- золотое сечение необязательно обусловливает гармонию, хотя и может задавать добротное структурирование;
- всё, что находится вне поля зрения золотого сечения, необязательно негармонично, а по своему структурированию способно на порядки превосходить "золотые" конструкции.

Особенно неестественным выглядит использование-интерпретация золотого сечения в архитектуре. Анализ сооружений порой напоминает не зодчих, а вандалов-разрушителей... На обломках старины.

Какую часть храма нужно разрушить (отсечь), чтобы бывшее целое так относилось к разрушенной части, как она – к оставшейся части? – Даже не смешно.

Что можно сказать по этому поводу?

Если бы кроме сечения-деления не было других задач, относящихся к золотой пропорции, то можно было бы и не заострять внимания на неточном названии константы Ф золотым сечением.

Привыкли, ну, и ладно.

Главное здесь видится в ином.

Само по себе золотое сечение – это, по сути, частная задача.

Исторически она возникла ещё в античности при построении строптивого правильного пятиугольника. Уж больно эта геометрическая фигура задевала своим неподдающимся построением самолюбие древних ученых на фоне правильного треугольника, квадрата и шестиугольника.

Но без пентагона никак не обустраивалась теория правильных многогранников – Платоновых тел.

Собственно и всё.

После того как научились чертить правильную пятиконечную звезду, деление в крайнем и среднем отношении забыли на многие века. За ненадобностью.

Никакого золота в традиционном делении не было и в помине.

Потому такое разбиение вторично.

В англоязычной литературе основное распространение имеет термин «золотого отношения» (golden ratio).

Отношение – это суть любой структуры с её проявлением "золотых" свойств.

И это совершенно правильно.

Также как и деление, результат которого, например, в арифметике называют частным.

При рассмотрении равенств отношений, хорошо подходит «золотая пропорция» (golden proportion). Допустимо и понятно называть константу Ф золотым числом (golden number).

И даже золотым средним (golden mean). Как частный случай геометрического среднего.

Но вот в русском языке из всех возможных вариантов при переводе выбрали, можно сказать, наихудший аналог.

Скорее всего, это литературная обработка математического термина "деление".

В конце 19 века вспыхнул интерес к Древней Греции. В Европе была опубликована книга Цейзинга «Эстетические исследования», и при переводе на русский язык понадобился красивый аналог этого понятия [24].

Тогда и появился русский вариант – «золотое сечение».

И сегодня в подавляющем большинстве константу Ф называют «золотым сечением».

То есть, не мудрствуя лукаво, евклидовы математические рассечения и деления-разбиения автоматически перенесли на конечный числовой результат.

Обычно так и пишут «Ф – золотое сечение», когда число словесно уравнивается с геометрическим действом.

Более того, в исходной задаче на деление само число геометрически не представимо.

Его невозможно нарисовать-изобразить. Ибо оно безразмерно, не привязано к метрике целого и выражает отношение двух отрезков.

Видимо, пришло время понемногу как-то корректировать писательский стиль специалистов.

Ведь ничего не мешает подправлять-редактировать и называть Ф «числом (константой) золотого сечения».

Но ещё лучше, на наш взгляд, и проще: «Ф – золотое число». Или как по-английски «золотое отношение».

В каких задачах, процессах или явлениях оно используется, уже вторично. Будь-то разбиение-сечение. Или рост–присовокупление, как, например, в явлениях филлотаксиса или развития некоторых моллюсков.

Здесь термин "сечение" точно выглядит как стоп-сигнал у кроликов Фибоначчи. – Вместо роста-развития сплошная регрессия, деградация и упадничество.

В природе важнее синтез, направленный на созидание и приумножение.

Помнится, древний ученый Фибоначчи не вырезал и не забивал, а размножал кроликов, выстраивая их в виде развивающейся последовательности целых чисел.

Сравните: сколько нужно вырастить кроликов, чтобы их общее количество так относилось к исходному, как оно – к вновь выращенному?

Потому и кролики, и числа Фибоначчи F_n формируются как бесконечное животворящее действо. Пусть математически-абстрактное, но всё-таки воспроизводство.

При этом аттрактор модели вычисляется через предел-асимптоту ($n \to \infty$) роста

$$\Phi = \lim F_{n+1} / F_n .$$

По логике и константу должны были назвать не золотым сечением, но чем-то иным, отражающим увеличение.

Золотым присоединением-добавкой или золотым накоплением, ростом. Да мало ли?

Тем не менее, всё время почему-то твердят о золотом сечении-дроблении.

Хотя может спокойно присутствовать "золотое" приумножение, типа золотого пополнения счета, наращивания производства и т.п.

Новая форма золотой модели

Термин "золотого сечения" изначально искусственно обеднен только делением или анализом. В этом его недостаток.

И дело не формуле или форме.

Поэтому от понятия «золотого сечения» нужно вообще уходить. Разве что оставить термин для обозначения константы Ф.

Руководствоваться следует понятием и содержанием «золотой пропорции», которое принципиально одинаково для модели сечения и модели роста.

Она одинаково работает как в сторону деления, так и приумножения.

Здесь наш автор совершенно прав. Вместо созидания и приумножения мы только и знаем, что постоянно что-то отнимаем и/или делим.

Модель золотого роста изложена в предложении 13.5 Евклида [10, с. 109] на основе известных свойств любой математической пропорции:

если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении и к ней приставлена <прямая>, равная большему отрезку, то вся прямая уже разделяется в крайнем и среднем отношении, и большим отрезком буде первоначальная прямая

$$\frac{1+\phi}{1} = \frac{1}{\phi} .$$

Данный подход получил развитие в работе [25], исходя из того, что модель золотого роста и традиционное золотое сечение – суть одного и того же процесса.

Отличие состоит в изменении некоторого начального (исходного) единичного объекта в сторону увеличения или уменьшения. Золотая пропорция как раз и устанавливает соответствующую уникальную связь между двумя объектами (старым и новым) и величиной приращения (положительного или отрицательного).

В одном случае исходный объект увеличивается, в другом – наоборот уменьшается.

Так мы приходим к обобщенной *канонической форме модели золотого равновесия*:
при изменении объекта большее так относится к меньшему, как оно – к приращению.

1) Единичную прямую 1 увеличить так, чтобы новая длина $\Phi = 1+\Delta$ относилась к старой (исходной) 1, как она – к приращению Δ:

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1+\Delta}{1} = \frac{1}{\Delta}.$$

Исходная длина – среднее геометрическое нового отрезка и линейного приращения.

2) Единичную прямую 1 уменьшить так, чтобы старая длина 1 относилась к новой $\phi = 1 - \Delta$, как она к приращению:

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\phi}{1 - \phi} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{1-\Delta} = \frac{1-\Delta}{\Delta}.$$

Новая длина – среднее геометрическое исходного отрезка и линейного приращения.

Здесь ϕ – новый объект при уменьшении целого или большая часть в золотом сечении.

Величина Δ – отрезаемая часть от целого или меньшая часть в золотом сечении, равная ϕ^2.

Таким образом,

Φ – новая длина при золотом увеличении или константа золотого роста.

ϕ – новая длина при золотом уменьшении или константа золотого убывания.

Учитывая противоположную направленность двух одинаковых процессов роста/убывания, произведение констант равно единице $\phi \cdot \Phi = 1$.

Терминология сечения номинально обедняет золотоносную идею и потому вредна.

Даже золотой прямоугольник с соотношением сторон $1:\Phi$ обычно характеризуется свойством отсечения.

Подобно тому, как в одном мультфильме Змей Горыныч и царь делили землю, распахивая межу.

Классическое толкование сводится к следующему: отличительной особенностью фигуры является то, что после отрезания-удаления квадрата с меньшей стороной, оставшаяся часть остается золотым прямоугольником, подобным исходному аналогу.

Хотя всё можно развернуть в сторону приумножения-созидания:

если к золотому прямоугольнику с большей стороны достроить квадрат, то новая образованная фигура станет также золотым прямоугольником.

Таким образом, *золотой прямоугольник* – такой прямоугольник, при отрезании от которого квадрата с меньшей стороны или добавлении квадрата с большей стороны образуется прямоугольник, подобный исходному аналогу [26].

Примерно по такой схеме происходит рост во многих объектах живой природы: моллюски, семена подсолнечников, листья растений и т.д.

В природе нет золотого сечения так такового.

Но есть множество объектов, развивающихся в соответствии с золотой пропорцией.

Вопреки англофобии с её предвзятым и неприятельским отношением ко всему английскому, англоязычные ученые, в отличие от большинства русскоязычных исследователей, точно и верно используется понятие «золотого отношения» – golden ratio.

В начертательной геометрии существуют понятия: «пересечения линии с поверхностью», «пересечения прямых» и др.

Пересечение, как скрещение, перекрест и т.п.

Отрезки не секут.

Отрезки делят на составные части.

Сечения в науке

Отрицательно относясь к термину "золотого сечения", наш автор справедливо предлагает «открыть учебники по начертательной геометрии или техническому черчению и внимательно прочитать раздел, описывающий сечения и разрезы».

Там можно узнать, что «есть плоскость сечения (разреза), и её назначение – показать внутреннее устройство тел в этой плоскости, а без внутреннего устройства вы никогда не поймете простейший сборочный чертеж».

Всё так. Хотя, строго говоря, прямую линию тоже можно рассекать плоскостью.

Результатом сечения станет обычная точка, как вырожденный вариант.

Нелишне также напомнить, что в современной науке понятие "сечение" давно вышло за рамки чисто геометрических построений.

Приведем некоторые примеры.

Эффективное поперечное сечение [27, с. 236] – это физическая величина, характеризующая вероятность перехода системы двух взаимодействующих частиц в определенное конечное состояние. Эффективное поперечное сечение определяется как отношение числа взаимодействий с заданными параметрами в единицу времени к плотности потока частиц, падающих на мишень. Широко используется в ядерной физике.

Дедекиндово сечение [28, с. 166; 29, с. 64] – способ построения вещественных чисел из рациональных. Множество вещественных чисел определяется как множество дедекиндовых сечений, с продолжением операций сложения и умножения.

Своими корнями данное сечение восходит к "Началам" Евклида (определение 5.5.).

Правило сечений в теории доказательств или правило непосредственного вывода с теоремой Г. Генцена об устранении сечений в логическом выводе на языке секвенций [30].

В топологии известно понятие: «сечение расслоения». И так далее.

Божественная пропорция Пачоли

Описание пропорции, выполненное Лукой Пачоли, подробно изложено в работах А. Щетникова [31, 32], включая полный перевод древнего трактата.

Под «божественной пропорцией» Пачоли понимает непрерывную геометрическую пропорцию трех величин, которую Евклид называл «делением в среднем и крайнем отношении». В XIX веке её стали именовать «золотым сечением», – преимущественно в русскоговорящей среде.

Лука Пачоли знал латинский в совершенстве. Но книга написана не на обычной для ученых трудов латыни, а на итальянском языке. Как говорил сам автор «на родном местном языке, чтобы и образованные, и не образованные в равной мере могли получить удовольствие от этих занятий. Отсюда и "divina".

Пачоли определяет пропорцию и описывает её свойства согласно Евклиду.

Данная пропорция возникает при делении целого на две части, когда целое так относится к большей части, как большая часть относится к меньшей части.

Лука излагает различные свойства пропорции, известные по XIII и XIV книгам "Начал" Евклида. Всего он описывает тринадцать свойств «из почтения к собранию двенадцати и их священнейшего главы... по числу двенадцати Статей и двенадцати Апостолов во главе с нашим Спасителем» [32] – тайной вечери.

Все свойства сопровождаются одним и тем же числовым примером, когда длина целого отрезка равна 10, а его части составляют: меньшая $15-\sqrt{125}$, а большая $\sqrt{125}-5$.

Данный пример с алгебраическим делением 10 в среднем и крайнем отношении был заимствован у Леонардо Пизанского (1180–1240), а последним – у Абу Камила (850–930) и Ал-Хорезми (787–850).

Продемонстрируем эти свойства с учетом современных обозначений:

Целое	10	1
Большее	$\sqrt{125}-5$	ϕ
Меньшее	$15-\sqrt{125}$	ϕ^2

1. *Еще о первом предложенном свойстве.* В принятых числах описывается равенство

$$\left(\phi+\frac{1}{2}\right)^2=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad\to\quad \phi^2+\phi+\frac{1}{4} = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

которое имеет место для любого количества произвольной природы, как показано нашим *предводителем,* – предложение 13.1 [10, с. 105]: если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, то больший отрезок с присоединением половины всей линии в квадратах будет равен упятеренному квадрату на половине.

2. *О её втором существенном свойстве.* Если какое-либо количество разделено на две части, и к одной из них присоединено некое количество, так чтобы квадрат этой суммы был в пять раз больше квадрата присоединенного количества, то отсюда по необходимости следует, что данная присоединенная величина является половиной первоначальной величины, разделенной на две части, а та, к которой её присоединили, является большей частью первоначальной величины, если только целое разделено согласно нашей пропорции, – предложение 13.2 [10, с. 105]:

$$(a+x)^2=5\cdot x^2 \quad\to\quad x^2-\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}=0 \quad\to\quad x=a\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{a}{2}\Phi.$$

Если $a=\phi$ – большая часть единичного целого, то присоединенное количество $x=1/2$ – половина целого.

3. *О её третьем существенном свойстве.* Если какое-либо количество разделено согласно нашей пропорции и к меньшей части прибавлена половина большей, то квадрат суммы в пять раз больше квадрата половины большей части, – предложение 13.3 [10, с. 108]:

$$\left(\phi^2+\frac{\phi}{2}\right)^2=5\cdot\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \to \quad \phi^4+\phi^3+\frac{\phi^2}{4} = \phi^2+\frac{\phi^2}{4} = \frac{5}{4}\phi^2.$$

4. *О её четвертом особом свойстве.* Если какое-либо количество разделено согласно нашей пропорции, и ко всему данному количеству прибавлена его большая часть, то данная названная сумма и данная большая часть будут частями нового количества, разделенного в той же пропорции, и большая часть этого нового количества всегда будет равна исходному количеству, – предложение 13.5 [10, с. 109-110]: $(1+\phi)\phi=1 \to \Phi\phi=1$.

5. *О её пятом поразительном свойстве.* Если какое-либо количество разделено согласно нашей пропорции, то сумма квадрата меньшей части и квадрата всего количества всегда будет в три раза больше квадрата большей части, – предложение 13.4 [10, с. 109]:

$$\left(\phi^2\right)^2+1^2=3\phi^2 \quad\to\quad \phi^4+1 = \phi^2-\left(\phi-\phi^2\right)+\left(\phi+\phi^2\right) = 3\phi^2.$$

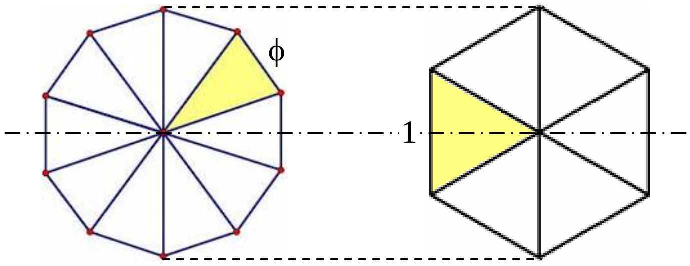
6. *О её шестом невероятном свойстве.* Никакое рациональное количество нельзя разделить по нашей пропорции так, чтобы каждая его часть не была иррациональной – так называемым вычетом, – предложение 13.6 [10, с. 110]:

p – рациональное число; $p\phi$, $p\phi^2$ – иррациональные числа.

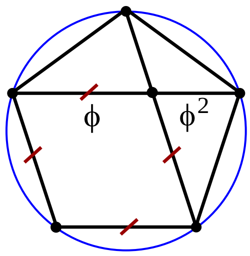
7. *О её седьмом невообразимом свойстве.* Если сторону равностороннего шестиугольника соединить со стороной равностороннего десятиугольника – а оба они вписаны в один и тот же круг – то их сумма всегда будет количеством, разделенным по нашей пропорции, при этом большей частью будет сторона шестиугольника, – предложение 13.9 [10, с. 114].

8. *О её восьмом свойстве, обратном предыдущему.* Если линия разделена согласно пропорции, имеющей середину и два края, то всегда в таком круге, где большая часть является стороной шестиугольника, меньшая часть будет стороной десятиугольника.

Сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, равна $a_n = 2R\sin\pi/n$. Для единичной окружности стороны равны $a_6 = 1$ и $a_{10} = \phi$.



9. *О её девятом свойстве, вытекающем из предыдущих.* Если в круг вписать равносторонний равноугольный пятиугольник и соединить прямыми линиями концы сторон двух соседних углов, то они обязательно разделятся при пересечении по нашей пропорции, и каждая большая часть будет равна стороне пятиугольника, – предложение 13.8 [10, с. 113].



10. *О её десятом наивысшем свойстве.* Если какая-либо величина разделена согласно указанной пропорции, то все свойства, которые могут быть получены из её частей, окажутся теми же самыми по числу, виду и роду со свойствами любой другой так же разделенной величины.

Иначе говоря, свойства золотой пропорции не зависят от природы и величины целого и его пропорциональных частей.

11. *О её одиннадцатом великолепном свойстве.* Если разделить сторону равностороннего шестиугольника согласно нашей божественной пропорции, то её большая часть всегда по необходимости будет стороной десятиугольника, вписанного в тот же круг, что и шестиугольник.

12. *О её двенадцатом трудновообразимом свойстве.* Если какое-либо количество разделено согласно нашей пропорции, то всегда корень из суммы квадрата всего количества и квадрата его больше части будет в той же самой пропорции к корню из суммы квадрата данного количества и квадрата его меньшей части, как сторона куба к стороне треугольника <тела>, имеющего 20 оснований <икосаэдра>, <когда оба тела описаны вокруг одной и той же сферы, либо оба вписаны в неё>, – предложение 14.7 [10, с. 148].

Описанное отношение золотоносных величин равно $\sqrt{\dfrac{1^2+\phi^2}{1^2+\phi^4}}=\sqrt{\dfrac{\Phi+2}{3}}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{6}}$.

Соотношение ребер куба и икосаэдра, вписанных в одну сферу, также составляет

$$\frac{a_6}{a_{20}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\bigg/\frac{\sqrt{10}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{5}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{6}}\,.$$

13. *О её тринадцатом, достойнейшем свойстве.* Без этого свойства нельзя образовать равносторонний и равноугольный пятиугольник, без которого нельзя образовать додекаэдр, форму которого Платон приписал пятой сущности – небу.

Наш *философ* поставил условие для треугольника: каждый угол при основании в два раза больше оставшегося угла, предложение 4.10 [9, с. 132].

Построить <правильный> пятиугольник невозможно, пока мы не научимся строить указанный треугольник (предложения 4.11, 4.12), для чего нужно разделить линию согласно нашей пропорции (предложение 4.10), хотя сама пропорция определяется только в пятой книге. Но есть предложение 2.11 [9, с. 75] о построении двух таких частей, квадрат одной из которых равен произведению другой части на всю данную линию.

Примечания. Свойства 7, 8 и 11 – практически идентичны. Видимо, для искусственного подтягиванием результата под априори заданное количество 13 свойств. К свойствам 10 и 11 Пачоли дает маловразумительные ссылки на книгу 14 "Начал" Евклида.

Говоря о взаимосвязи длин сторон правильных многоугольников, нельзя не упомянуть известное соотношение $a_5^2=a_{10}^2+1$ между длинами сторон правильных 5-угольника и 10-угольника, вписанных в единичную окружность $R=1$, которое можно найти во многих книгах по геометрии, например [33, с. 149],

$$a_5=2R\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1+\phi^2}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,,$$

$$a_{10}=2R\sin\frac{\pi}{10}=\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

С учетом длины шестиугольника $a_6=1$ мы приходим еще к одной своеобразной целочисленной (по количеству вершин) модификации Пифагоровой тройки:

прямоугольный треугольник, образованный сторонами a_j правильных фигур (5-угольника, 10-угольника и 6-угольника), вписанных в единичную окружность (рис. 3).

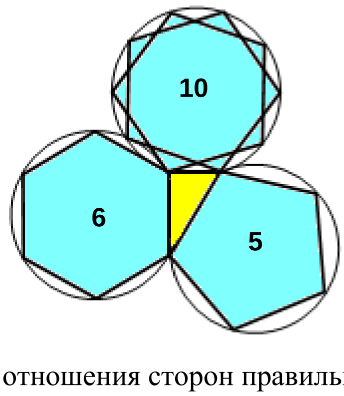


Рис. 3. Иллюстрация отношения сторон правильных многоугольников

Пояснения к названию "De La Divina Proportione"

В главе 5 «О подходящем названии для настоящего трактата или обзора» [32] Лука Пачоли пояснял название "De La Divina Proportione" из-за ряда соответствий в связи с существованием бога:

1) Пропорция *является единственной*, как высший атрибут бога.

2) Пропорция *всегда заключена между тремя членами*, как в божественном начале одна и та же субстанция охватывает три ипостаси троицы.

3) Пропорция *не может быть означена рациональным количеством* и в математике называется иррациональной, как сам бог не может быть определен понятными нам словами.

4) Пропорция всегда и во всяком количестве (непрерывном и дискретном, большом или малом) *является той же самой и всегда неизменной*, как сам бог не изменяется и пребывает весь во всём и весь в каждой части.

5) Как бог сравнивается с небесной силой или пятой сущностью, опосредующей четыре элемента – землю, воду, воздух и огонь (Платон в его Тимее), так и *пропорция придает небу форму тела – додекаэдра* из 12 пятиугольников, который нельзя построить без нашей пропорции. Каждому из элементов сообщена своя собственная форма: огню – тетраэдр (пирамида), земле – гексаэдр (куб), воздуху – октаэдр, воде – икосаэдр. Эти пять правильных тел без названной пропорции невозможно ни пропорционально соотнести между собой, ни вписать в одну сферу.

Следует отдать должное придуманной аргументации. Звучит ярко и выразительно.

Хотя явно неубедительно для других мировых религий. И уж тем более для ученых, которые привыкли руководствоваться общемировыми знаниями без теологических наслоений. Вспомнить хотя бы И. Ньютона – глубоко верующего человека.

Живучий "мертвый" язык латыни

Автор считает, что латынь – мертвый язык, а значит, и написанные на нём формулы тоже. Переубеждать не станем. Излишне.

Действительно, латинский язык в определенной мере можно считается безжизненным в контексте, что он не употребляется людьми или народами в обиходе при общении[1].

Но ведь и славянский праязык, и докирилловская славянская письменность в этом смысле давно вышли из обихода и канули в лету.

В то же время латынь занимает совершенно особое и уникальное место на планете, продолжая широко применяться в специальных сферах человеческой деятельности.

Она используется в медицине, биологии, фармацевтике для обозначения названий лекарственных форм, общепринятых в научном мире терминов, названий биологических форм жизни (от одноклеточных образований до человека) и т.д.

Латынь – официальный язык города-государства Ватикан, проведения католических религиозных культов. Или автор – противник христианства?

Латинский язык прочно обосновался среди землян в качестве классических образцов пословиц и поговорок, вошедших во все современные языки, как образцы мудрости древних цивилизаций. Их вечная живучесть – яркое свидетельство тому, что посыл разума из глубин веков ничуть не утерян и в наши дни. Но продолжает свою поступь, рождая новые жемчужины народного творчества, в том числе на славянских языках.

[1] Использованы материалы URL: weblog.radugaslov.ru/archives/1108.

Сам латинский и его переводы на русский язык раскрывают огромные культурные пласты, доселе неизведанные. Со времен античности на латыни написаны многие труды величайших поэтов, писателей и мыслителей, включая Леонардо да Винчи, приложившего руку к "божественной пропорции", безумно почитаемой автором.

Большая часть (как в золотой пропорции) современных имен европейских народов имеет латинские корни: Виталий – жизненный, Константин – постоянный, Максим – большой, Наталья – родная, Валентина и Валерия – сильная, здоровая, Регина – королева, Татьяна – повелительница, Юлия – волнистая, Роман – римлянин, Виктор – победитель, Сергей – высокочтимый... И так далее.

Продолжая крылатую латинскую фразу "ab ovo" (по-русски "от яйца", от начала), можно уверенно утверждать, что многое в современной европейской цивилизации началось именно от этого первого яйца – латыни.

"Разное" или обо всём понемногу

Ограничимся только несколькими фрагментами авторского эссе, которые больше адресованы и/или имеют отношение к нашей скромной особе.

1) По словам автора, свою жизнь продолжает *божественная* и *золотая* пропорция, без наносного европейского сора. – Как бы ни так. "Сор", что называется, вынесен из европейской научной избы.

Именно благодаря европейцам оба термина сначала перекочевали, а потом основательно прижились и стали средством общения в русскоязычной среде.

2) К «убедительным похоронам "золотого сечения"» подойдем философски.

Данный термин действительно неточен, и его можно предать забвению, если бы не широкое употребление, что делает процесс "забытья" практически невозможным.

С другой стороны, само слово "похороны" относится больше к обряду погребения тела умершего человека. Если напомнить трепетное сохранение и почитание мощей – объекта религиозного культа-поклонения во многих исторических церквях, то аналогия с «похоронами золотого сечения» выглядит вполне оптимистично.

Как вознесение на высочайший пьедестал, выше которого только бог.

Не отсюда ли нужно искать истоки «божественной пропорции»?

3) Несколько слов относительно «его (*С.Л.* – ред.) "пирамид Джоссера и Вассера». – Хотелось бы, конечно, иметь собственную пирамиду, чтобы не думать в конце жизни о последнем приюте на одном квадратном метре. Но, увы!

Первая пирамида Джосера в Древнем Египте к нам никакого отношения не имеет.

Пирамиды Вассера существуют только как геометрический объект [34, 35].

Есть ещё понятие «резольвенты Вассера» с вполне удобоваримой терминологией, о чём подробно написано, например, в работе [36].

4) «Славянский национализм» автора, – мягко говоря, забавная тавтология. Славянской нации нет. Единый славянский язык отсутствует.

Славянская этническая группа народов и государств наличествует. Но у них разные языки, церкви, культуры, политическая деятельность, традиции, менталитет и т.п.

Возможно, славянский национализм – это хобби-увлечение, не имеющее четко выраженной подосновы и установки. В противном случае, автор в одной лодке, например, с так называемыми "бандеровцами", которых не очень-то почитает.

5) По словам автора, Ф. Достоевский в своё время якобы достойно ответил на некую масонскую агитацию: «У них великий аргумент, что наука общечеловечна, а не национальна. Вздор, наука везде и всегда была в высшей степени национальна – можно сказать, науки есть в высочайшей степени национальны».

Великий русский писатель так никогда не говорил, и тем более, никому достойно не отвечал.

Ни в статьях, ни в литературных произведениях.

Это только выдержка из его записной книжки или дневника (1863–1864), которая так и не нашла продолжения, как сформировавшаяся мысль.

Кстати, у него есть дополнение: «2×2 = 4 – не наука, а факт. Открыть, отыскать все факты – не наука, а работа над фактами есть наука». – Похоже, писатель окончательно сбился, и больше к этой теме не возвращался.

Форма 2×2 = 2 + 2 = 4, как и в целом, таблица умножения – это в высочайшей степени наука, как коллективное проявление-достижение гениальных умов человечества.

Телефон, Интернет, электричество, магнетизм тоже можно считать свершившимися событиями – фактами.

Но их появлению в современном мире предшествовали научные разработки тысяч ученых и научных коллективов.

Сам по себе сбор фактов и эмпирических сведений является основой и частью научной деятельности.

Наука – общемировое явление.

«Национальной науки нет, как нет национальной таблицы умножения; что же национально, то уже не наука» (А. Чехов).

Достаточно вспомнить печальную судьбу (если не трагедию) генетики и кибернетики в стране советов.

Или недооценку сланцевых и аграрных технологий уже в новейшей истории.

И весь писательский пыл-азарт об исключительности национальной науки в её широком понимании сразу угасает.

Потому и остался навечно лишь на полях записной книжки.

6) Автор утверждает, что тщательная проверка происхождения древнейших знаний показала, что все (?) они имеют славянское происхождение. – Комментарии излишни.

Parturiunt montes, nascetur ridiculus mus.

7) В треугольнике Кеплера наш критик насчитал четыре стороны: меньшее, среднее, большее и целое. С первыми тремя понятно. Но что здесь делает "целое", невразумительно.

8) Авторская теза «Божественная и золотая пропорция... получили запрет на их открытую публикацию», – полная выдумка.

Достаточно упомянуть широко известные работы А. Щетникова [31, 32].

9) Имя коня Дона Кихота – Росинант = "росин" (*rosin* конь) + "анте" (*ante* прежде, впереди) – заморенная лошадь или первая кляча в мире.

Что хотел этим продемонстрировать наш автор, остается загадкой.

10) «Заявленная им (А. Стаховым – ред. С.Л) теория гармонии шагнула далеко вперед и решила секрет «седьмого чуда света» – гармонического разложения углов в Семирамиде».

Не припомним, чтобы профессор А. Стахов развивал теорию гармонии. Разве что в своих научных монографиях и статьях он пробовал сделать ей прививку-инъекцию в виде так называемой «математики гармонии».

Можно продолжить, например, до 13–21 позиций.

Но остановимся на десяти.

В знак уважения к арабо-индийской системе счисления, которая основательно вошла в нашу жизнь вместо кириллической системы счисления Древней Руси.

Невзирая на малосодержательные фантазии по поводу собственной исключительности.

Вместо заключения

Вся божественность золотой пропорции итальянца Луки Пачоли в конечном итоге сведена к обычному делению-сечению прямой линии в полном соответствии с "Началами" древнегреческого ученого Евклида на конкретном примере отрезка длиной 10, заимствованного у арабских математиков (рис. 4).

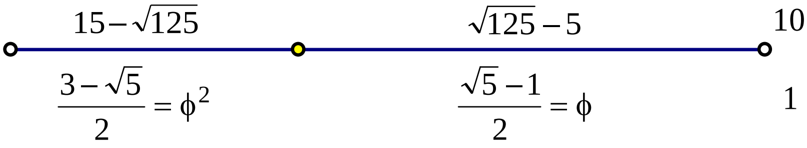


Рис. 4. "Божественность пропорции" Пачоли сводится к обычному делению-сечению прямой линии длиной 10

Теологический характер отражается двумя аспектами:

− тринадцать описательных примеров соответствуют количеству участников тайной вечери раннего христианства;

− части деления-сечения восходят к арабским ученым с их монотеистическим исламом и единым богом – Аллахом.

Оба аспекта имеют к православию, равно как и к славянской линии, весьма отдаленное отношение. Если вообще имеют. Как по срокам-датам, так и по форме-содержанию.

Древние греки, Рим, арабы...

Вот и вся авторская "Дивина" (итал. Divina).

Возведение божественности золотой пропорции в ранг некоего абсолюта в историческом аспекте означает фактическое продвижение в славянский мир идей ислама и католической (греч. καθολικός всеобщей) церкви.

Не беремся судить, насколько это точно отражает современные умонастроения.

Но получается так, что под эгидой божественности золотой пропорции наш автор де-факто проповедует именно эту направленность.

Есть у него, конечно, и рациональное зерно: частный случай сечения-разделения перенаправить в русло математической пропорции. С её широкой сферой применения в общем поле-пространстве идей гармонии окружающего нас мира.

В этом несомненный плюс "золотой пропорции".

Придание ей "божественности" со ссылкой на Луку Пачоли только вносит сумятицу в понимание сути вопроса и дает веские основания усомниться в правильности выбора такого способа для популяризации славянского, русского и православного векторов развития в современной цивилизации и будущем человечества.

Можно, как и наш автор, завершить заключительной фразой "финита ля комедия", которую отечественные шутники давно переделали в "финита ля кончита" на манер сценического образа Кончиты Вурст – победителя Евровидения-2014.

Но оба варианта (ит. + исп.) восходят к европейцам, которых автор особо не жалует.

Остается апеллировать к другой "божественности", вспомнив слова великого гения А. Данте [37] из его "Божественной комедии" – величайшего памятника мировой культуры (в переводе Д. Минаева):

Есть сила та, что разумом зовется.
И взвесить вы способны на весах
Добро и зло.

За вами выбор остается…

Литература:

1. Дайсон Ф. Птицы и лягушки в математике и физике // Успехи физических наук, 180:8 (2010), 859–870.
2. Kepler J., Mysterium Cosmographicum, 1596.
3. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110.
4. Василенко С.Л. Дуально-биполярная модель в проекциях теоремы Пифагора / Научно-техн. б-ка SciTecLibrary. – 15.05.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13797.html / Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 27.05.2014. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=114&sm=2.
5. Черняев А.Ф. "Сердитая" реплика // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17054, 03.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322060.htm.
6. Golden ratio // From Wikipedia, the free encyclopedia. – URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio.
7. Mario Livio. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002. – 294 p.
8. Lidwell W., Holden K., Butler J. Universal Principles of Design: A Cross-Disciplinary Reference. – Gloucester MA: Rockport Publishers, 2003.
9. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
10. Начала Евклида. Книги XI–XV: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. – 332 с.
11. Pacioli Luca. De divina proportione. – Luca Paganinem de Paganinus de Brescia, 1509, Venice.
12. Василенко С.Л. Репликантропы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 15.02.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=99&sm=2.
13. Черепанов О. Структурный строй «золотой арифметики». Введение в секстетную теорию чисел Фидия // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16593, 26.06.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/1102-00.htm.
14. Никитин А.В. О «крайнем и среднем…» // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16772, 21.08.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321215.htm.
15. Никитин А.В. Снова «О крайнем и среднем…» // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.18120, 31.07.2013. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162151.htm.
16. Никитин А.В. О «крайнем и среднем…» в "Началах" Евклида // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.18129, 13.08.2013. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162154.htm.
17. Василенко С.Л. Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.
18. Василенко С.Л. Золотое отношение как основа синтеза и созидания // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 19.11.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14289.html.
19. Василенко С.Л., Никитин А.В. Развитие математических основ гармонии в Tm-системе Татаренко // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16076, 18.09.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161704.htm.
20. Василенко С.Л. Базовое тождество математических основ гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.
21. Weisstein E.W. Golden Ratio // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html.

22. Cook Theodore Andrea. The Curves of Life. – Courier Dover Publications, 1914. – 420 p.
23. Василенко С.Л. Золотое отношение как основа синтеза и созидания // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 19.11.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14289.html.
24. Никитин А.В. История Золотого Сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16744, 11.08.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02321007.htm.
25. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.
26. Василенко С.Л. Конечное и бесконечное в модели золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22363, 31.07.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163011.htm.
27. Яворский Б.М., Детлаф А.А., Лебедев А.К. Справочник по физике для инженеров и студентов. – М.: Оникс, 2006. – 1056 с.
28. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1938. – 480 с.
29. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Пер. с нем. – Том I. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
30. Такеути Г. Теория доказательств. – М.: Мир, 1978. – 412 с.
31. Щетников А.И. Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции». – nsu.ru/classics/pythagoras/Pacioli.pdf.
32. Лука Пачоли. О божественной пропорции: Пер. с лат. А.И. Щетникова // Альманах «ΑΚΑΔΗΜΕΙΑ». Материалы и исследования по истории платонизма. Вып. 8. – СПб., 2010. – С. 161-243. – URL: plato.spbu.ru/AKADEMIA/akademia8/pacholy.pdf.
33. Адлер А. Теория геометрических построений: Пер. с нем. Г.М. Фихтенгольца. Изд. 3-е. – Л.: Учпедгиз, 1940. – 232 с. – URL: http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/geometry/adler.htm.
34. Василенко С.Л. Равно-реберные пирамиды. Их роль в структурировании живого // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 15.02.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=65&sm=2.
35. Василенко С.Л. Пирамиды Вассера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17321, 17.02.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161932.htm.
36. Василенко С.Л. Пропорции в симбиозе золотоносных и гармоничных треугольников // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 30.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=95&sm=2.
37. К 750-летию Данте Алигьери // Вестник МГПУ. – 2015. – № 4(16). – С. 10-54.

Харьков, Украина

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html