О преемственности и единении знаний в золотоносной тематике

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Дана общая постановка преемственности знаний в проблематике золотой пропорции. Раскрыт её дуальный характер в геометрической прогрессии «целого и его элементов» или жесткой привязке к константе Ф. Показано, что золотая резольвента является частным случаем семейства резольвент Вассера – геометрических кривых, описывающих движение "свободной" вершины плоского треугольника с закрепленным основанием. Развенчан очередной миф о "мета-Δ".

Оглавление

Что носится в воздухе и чего требует время, то может возникнуть одновременно в ста головах без всякого заимствования (Гёте).

Общие положения

В широком понимании *преемственность* – связь между различными этапами или ступенями развития, между явлениями в процессе развития в природе, обществе и познании. Её сущность состоит в сохранении некоторых элементов и характеристик целого при переходе к новому состоянию.

Часто преемственность выступает как одна из сторон в проявлении диалектического закона отрицания отрицания. Такова философия жизни-бытия.

«Всеобщий закон – закон законов – это *закон преемственности*, ибо что такое, в конечном счете, настоящее, как не росток прошлого?» (У. Уитмен, американский поэт).

«Если я видел дальше других, то лишь благодаря тому, что стоял на плечах гигантов» (А. Эйнштейн, немецкий физик).

Преемственность и наследование лучшего, как особый механизм «памяти общества», образуют гармоничное соединение времен с общим вектором созидания нового и прогрессивного. Здесь можно найти также известную иронию: «Преемственность власти по-африкански: после выборов новый президент съедает старого».

Любое развитие никогда не начинается с "чистого листа". Даже бог сотворил мир по образу и подобию своему, – потому как не было альтернативного и связующе-созидательного алгоритма.

В итоге родился всеобщий принцип подобия: «и на земле, как на небе» (Мф. 6:10)...

Отсюда посыл-афоризм: "Познай самого себя" и ты познаешь весь мир.

Систематика золотого сечения (ЗС) в своем развитии также базируется на прошлом опыте и предшествующих достижениях.

«Создание новой теории не похоже на разрушение старого амбара и возведение на его месте небоскреба. Оно скорее похоже на восхождение на гору, которое открывает новые и широкие виды, показывающие неожиданные связи между нашей отправной точкой и ее богатым окружением» [27, с.161].

Развитие "золотоносной" темы не возникает на пустом месте. Так или иначе, во всём проявляется преемственность и приумножение лучших наработок-результатов.

О преемственности обозначений

В работе [1] нами впервые использовано буквенное обозначение $\phi = \Phi^{-1}$.

Позже отмечено [2]: «для ЗС используются разные символьные формы. На наш взгляд, удобнее и нагляднее принять такие обозначения $\phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0{,}618$ и $\Phi = \phi^{-1} = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 \approx 1{,}618$ по гармоническому образу: малому числу – малая буква. Применение для ЗС буквы τ – это типичный американизм, дабы отличиться и перехватить инициативу от европейцев в свои руки».

Например, у других авторов [3], на наш взгляд, нелогично менялась символика малых и больших букв-обозначений.

Сегодня символика "ϕ, Φ" всё чаще встречается в современных публикациях по тематике ЗС, что позволяет быстрее анализировать результаты проводимых исследований.

Устранение отдельных разночтений

Воспользуемся результатами исследований из нашей работы [4].

В общем случае математическая пропорция, как равенство двух отношений $a:b = c:d$, имеет $2\times2 = 4$ члена.

С незапамятных времен античные исследователи изучали особые частные случаи с тремя членами, когда вместо четвертого элемента в пропорцию вводилась дополнительная связь между оставшимися тремя членами.

Арифметическая (разностная) пропорция – равенство разностей: <u>насколько вторая</u> величина превосходит <u>первую</u>, <u>настолько третья</u> величина превосходит <u>вторую</u>.

Геометрическая (кратная) пропорция – равенство кратных отношений: <u>во сколько раз вторая</u> величина превосходит <u>первую, во столько раз третья</u> величина превосходит <u>вторую</u>.

В геометрической пропорции три элемента, причем один из них общий $a:\underline{b} = \underline{b}:c$.

Об этом в свое время говорил ещё Евклид: «*Пропорция же состоит, по меньшей мере, из трех членов... Когда все три величины пропорциональны, то говорят, что первая к третьей имеет двойное отношение первой ко второй*» [5, с. 143].

В данном случае речь идет о непрерывной пропорции $a:b = b:c$.

Евклид выражал мысль, что $a:c=(b:c)^2$. Его термин *двойное отношение* следует понимать как отношение, повторенное множителем два раза.

Если принять ещё одно дополнительное условие $c=a+b$, то приходим к золотой пропорции – разновидности геометрической пропорции, имеющей всего два члена a и b:

сумма двух членов (целое) так относится к одному из них, как он – к другому.

А вот с гармонической пропорцией в литературе, к сожалению, произошла некоторая путаница, тиражируемая до сих пор.

Так, в ряде обзоров словарного типа (большая советская энциклопедия, большой энциклопедический словарь и др.) гармоническая пропорция представлена как пропорция, средние члены которой равны, а последний член представляет собой разность между первым и средним $c:b=b:(c-b)$.

Такое разложение числа c на два слагаемых b и $a=c-b$, образующих гармоническую пропорцию, называют иногда гармоническим делением[1] или золотым сечением (?), а также делением в крайнем и среднем отношении.

Вряд ли такое смешение золотого сечения и гармонической пропорции можно назвать верным.

Если и вести речь в плоскости гармонии или стройности, то золотое сечение *допустимо называть гармоничным делением*.

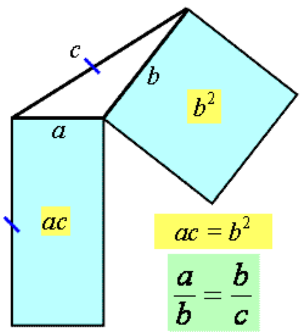
Однако сама пропорция остается быть геометрической!

Но никак не гармонической.

Ибо из пропорции $c:b=b:a$ следует $b=\sqrt{ac}$ – *среднее геометрическое* a и c.

То есть в терминологическое поле незаметно вкралось смешение двух понятий:

- гармоничного (слаженного, красивого) сопоставления;
- гармонического представления, давно закрепленного в математике.



Среднее геометрическое двух чисел также называется их *средним пропорциональным*[2].

В частности, при золотом сечении геометрического отрезка на две части большая часть является *средним пропорциональным* между всем отрезком и меньшей частью [6].

Тему среднегеометрической пропорции в треугольниках пробовал развивать С. Алферов [7]. При этом он терминологически верно различал треугольник золотой пропорции и «золотой треугольник» – равнобедренный с острым углом 36° в вершине.

Гармоническая пропорция – пропорция вида $a:c=(a-b):(b-c)$, в которой первое число (или отрезок) так относится к третьему, как разность между первым и вторым относится к разности между вторым и третьим.

Здесь величина b – есть среднее гармоническое[3] чисел a и c, то есть обратная величина среднего арифметического обратных значений $b=\dfrac{2}{a^{-1}+c^{-1}}=\dfrac{2ac}{a+c}$, что полностью отвечает принятой терминологии в области средних значений.

Именно это становится определяющим фактором в точном принятии определения гармонической пропорции.

И всё становится на свои места.

---

[1] Большая советская энциклопедия. – http://slovari.yandex.ru/~книги/БСЭ/Гармоническая%20пропорция/
[2] Большая советская энциклопедия. – http://slovari.yandex.ru/~книги/БСЭ/Среднее%20пропорциональное/.
[3] Среднее гармоническое. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=43776524.

Гармонические треугольники

Во многих работах с пафосом, но часто неубедительно гармонию увязывают с золотым сечением. Нет смысла опровергать этот "заезженный" и слабо аргументированный миф. Хотя бы потому, что в мироздании наличествуют миллиарды иных проявлений пропорции, симметрии, эквивалентности и т.п.

Тем не менее, применительно к треугольникам, золотая пропорция заслуживает отдельного рассмотрения.

Не будет большой ошибкой утверждать, что сколь пространна область восприятия гармонии, столь широка сфера восприятия и принятия характеристик гармоничности треугольников. Главное не вдаваться исключительно в частности. А если и акцентировать на них внимание, то не предлагать в качестве обобщения или универсальности.

Так, в работе [3] область гармоничности ограничивается только прямоугольным треугольником, в котором «гипотенуза относится к большему катету так, как больший катет относится к меньшему катету».

Подобный треугольник может быть отнесен к типу гармоничных фигур. Но выставлять его в виде общего определения, на наш взгляд, нельзя. – Весьма узко всё сводить к ЗС.

Это вполне приемлемый, но все-таки частный случай (один из вариантов "золотого" треугольника Кеплера), не подходящий для универсального определения.

Рассматривая задачу золотого сечения и выполняя правила построения математической пропорции, вполне закономерно расширить их сферу влияния на образующие элементы треугольника, в частности, на его стороны [8].

Определение. Плоский треугольник называется гармоническим, если квадрат его стороны численно равен произведению двух других сторон.

На языке формул это означает:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{или} \quad ac = b^2 .$$

Дуальность золотой пропорции

Во избежание дальнейшей путаницы, отойдем на время от привычных первых букв латинского алфавита. Золотая пропорция для линейного отрезка длиной $1 = u + v$ имеет вид

$$\frac{1}{u} = \frac{u}{v} = \Phi$$

Слева пунктиром выделена сама пропорция, как геометрическая прогрессия в порядке следования: целого 1, большей части u и меньшей части v.

Справа выделено единственно решение пропорции (в области положительных чисел) с золотой константой Φ.

Геометрически объект можно рассматривать как "сложившийся" в линию треугольник со сторонами (r, u, v), $r = u + v = 1$.

Вынесение данной модели на плоскость возможно через треугольники двумя путями:

- сохранить пропорцию $\frac{1}{u} = \frac{u}{r}$ с геометрической прогрессией 1, u, u^2 без жесткой привязки к конкретному числу Φ;
- сохранить постоянное отношение двух сторон $\frac{u}{v} = \Phi$.

Оба подхода не противоречат исходной модели ЗС, но одновременно разнятся.

1) В первом случае дополнительные числа-параметры не задаются. Модель плавно выходит на плоскость, продолжая основную конструкцию геометрической прогрессии. Только уже по отношению к сторонам треугольника $(1,\ u,\ v = u^2)$.

2) Во втором случае модель построена на априори задаваемом коэффициенте, равном числу-константе золотого сечения Ф. То есть результат решения золотой пропорции изначально "загоняется" в качестве исходного условия. Модель упрощается и "обедняется".

Обратимся к рисунку (рис. 1) из нашей статьи [8] (АТ, Интернет, июль 2010).

Насколько нам известно, это была пионерная работа по тематике золотой пропорции, когда её линейно-пропорциональные свойства распространялись на планиметрию через параметры треугольников с единичным основанием.

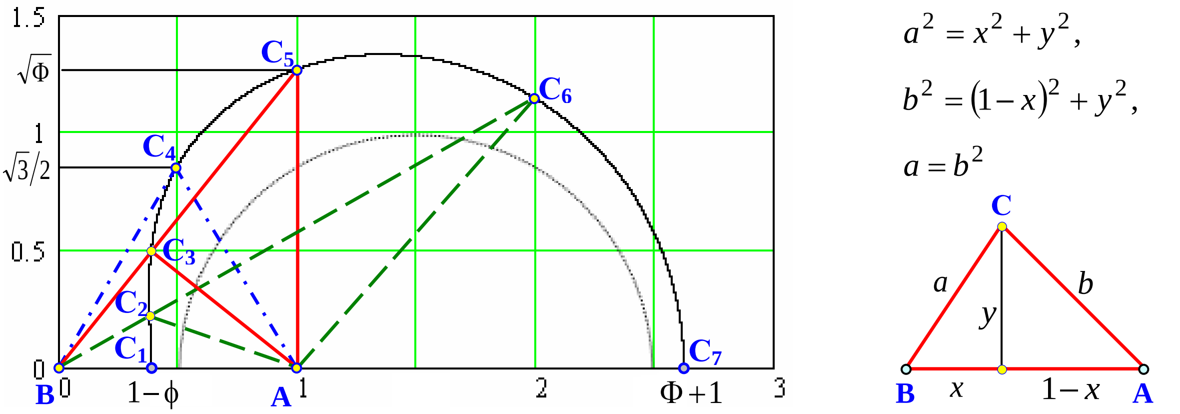


Рис. 1. Резольвента $C_1 \ldots C_7$ гармонических треугольников AC_iB

Как видно, рисунок содержит два основных условия взаимосвязи сторон-отрезков (a, b) с координатами $(x,\ y)$ выносимой точки C за пределы линейного отрезка:

$$a^2 = x^2 + y^2, \qquad b^2 = (1-x)^2 + y^2.$$

Для конкретики остается задать взаимосвязь между самими сторонами-отрезками a, b.

Третьим связующим звеном было выбрано условие геометрической прогрессии сторон $a \cdot 1 = b^2$, как более гармоничное, естественное по отношению к пропорции и одновременно нетривиальное в своем решении.

Если вместо этой связи положить $a = b\Phi$, то с учетом золотого тождества $\Phi^2 = \Phi + 1$ практически сразу выходим на уравнение окружности $(x - \Phi)^2 + y^2 = 1$. Для этого достаточно вычесть из второго равенства первое, предварительно умножив их оба на Ф, после чего к обеим частям равенства прибавить Φ^2.

Позже кривая $C_1 \ldots C_7$ была названа резольвентой Вассера[4] гармонических треугольников [9].

Соединяя любую точку резольвенты с точками $B(0,\ 0)$ и $A(1,\ 0)$, получаем бесчисленное множество гармонических треугольников.

Условие образование треугольника: $a + b > c$ или $b^2 + b > 1$, то есть $b > \phi$.

Отрезок прямой АВ превращается в треугольник АСВ. Тем самым добавляется новое второе измерение.

[4] Василенко Сергей – гидролог-системотехник + wasser (нем.) – вода, влага, жидкость…

Примечательно, что гармонический треугольник общего вида. В трех частных случаях он становится равносторонним AC_4B или прямоугольным Δ-Кеплера – AC_3B, AC_5B.

Но, пожалуй, самым примечательным является развитие золотоносной конструкции в части многомерного обобщения золотой пропорции, основанного на числе Φ [10]:

равносторонний треугольник – предельная модель $(n \to \infty)$ *золотой пропорции*

$$x = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}, \qquad c^n = a^n + b^n \quad \Rightarrow \quad x^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \Phi .$$

Обобщенная модель золотого сечения

Вслед за нашей электронной публикацией [8], ставшей мгновенной информацией для широкой общественности и научного сообщества, с интервалом в полгода вышла журнальная статья [11]. «Подробное изложение результатов <этой> работы» по словам автора позже приведено на страницах Академии [12].

В них обстоятельно изложен второй подход к вынесению золотой пропорции на плоскость, – в терминологии ломаной линии, опирающейся концами на фиксированный отрезок. Следует отметить "тяжеловесность" представленных исследований для восприятия.

На наш взгляд, математические описания свойств золотой пропорции в своем изложении, по возможности, должны быть лаконичными и понятными широкому кругу читателей. Чтобы разобраться, а потом ещё и осмыслить предложенные автором выкладки, нужно приложить немало усилий и терпения. Не из-за того, что материал сложный. Всё дело в форме-стиле изложения и подачи материала.

Достаточно посмотреть на графику (рис. 2), а потом на содержание работы.

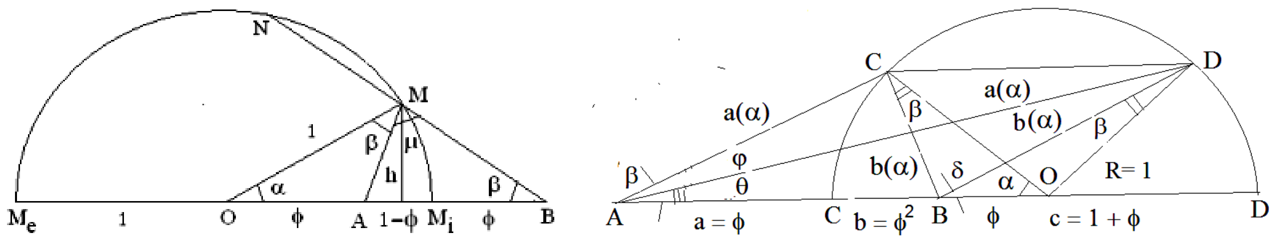


Рис. 2. Графические вариации-построения модели ЗС в исполнении профессионального математика

Анализировать данные схемы весьма затруднительно.

В постоянном "контакте" с текстом тем более.

Двойное повторение букв (*C*, *D*), тройное дублирование величин (a, b) с непривычным написанием латинских букв, геометрические отрезки в отрицательных числах и т.п.

Первые выкладки [11, 12] выполнены в отрицательную числовую область, теряя наглядность, удобство восприятия и проведения вычислений.

И только в недавней работе [13] модель транспонирована в положительную область декартовых координат.

Позволим себе выполнить некоторую "реконструкцию" части текста.

Без потери общности рассуждений сразу выберем отрезок единичной длины.

Построим геометрическое место точек, удаленных от концов этого отрезка так, чтобы выполнялось отношение $b/a = k = \text{const}$ (рис. 3)

$$\underbrace{(1-x)^2 + y^2}_{b^2} = k^2 \underbrace{\left(x^2 + y^2\right)}_{a^2}$$

или после раскрытия скобок с учетом подстановки $z = \dfrac{1}{1-k^2}$:

$$x^2 - 2zx + y^2 = -z.$$

Прибавив к обеим частям равенства величину z^2, получаем уравнение окружности

$$(x-z)^2 + y^2 = (kz)^2$$

с центром в точке $\mathrm{O}(z,\ 0)$ и радиусом kz.

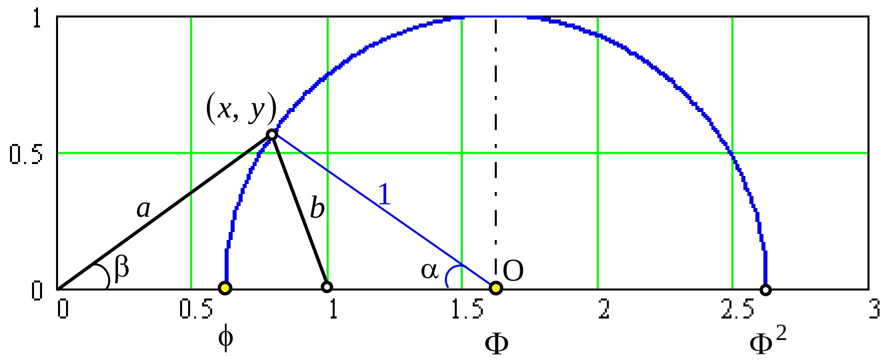


Рис. 3. Построение модели золотого сечения ломаной линии *ab*

Полагая радиус $kz = 1$, имеем уравнение $k^2 + k - 1 = 0$, откуда следует $k = \phi,\ \ z = \Phi$.

Таким образом, центр окружности расположен в точке Φ, и отношение переменных отрезков $a/b = \phi^{-1}$ также равно Φ. – Примечательный момент.

Итоговое уравнение окружности имеет вид

$$(x-\Phi)^2 + y^2 = 1.$$

Константа золотого сечения Φ здесь одновременно выступает двух ипостасях: как метрическая величина с принятой размерностью относительно единицы и как безразмерное отношение.

По теореме косинусов для элементов треугольника находим:

$$a^2 = 1 + \Phi^2 - 2\,\Phi\cdot\cos\alpha;$$

$$b^2 = 1 + \phi^2 - 2\,\phi\cdot\cos\alpha.$$

Некоторые частные случаи:

$\alpha = 0$: обычное золотое сечение единичного отрезка 0-1;

$\alpha = 90^{\circ}$: $\beta = \mathrm{arctg}\,\phi$, $a^2 = 1+\Phi^2$, $b^2 = 1+\phi^2$;

$a \perp b$: $a^2 = \dfrac{1}{1+\phi^2}$, $b^2 = \dfrac{1}{1+\Phi^2}$, $\cos\beta = a$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\phi+\Phi} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

$b \perp 0x$: $a^2 = \Phi$, $b^2 = \phi$, – частный случай Δ-Кеплера со сторонами $\left(\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi}\right)$ и всеми его замечательными свойствами;

$\alpha = \beta = 36^{\circ} = \pi/5$: один из равнобедренных треугольников Робинсона [14], которые возникают в правильном пятиугольнике (углы другого $\alpha = \beta = 72^{\circ} = 2\pi/5$).

В книге Н. Воробьева [15, с. 100] они называется *треугольниками золотого сечения*.

Геометрические обобщения

Обратимся к статьям [11, 12] на предмет преемственности понятий и формулировок.

В частности, автор отмечает [12]: «до последнего времени и в течение многих веков существовала единственная геометрическая интерпретация золотого сечения, как деления отрезка длиной $a+b$ на 2 части a, b, связанные соотношением: $(a+b)/b = b/a$... автором статьи была введена [11] обобщенная геометрическая модель золотого сечения. При этом золотое сечение обобщается (?) от указанного выше частного случая деления отрезка прямой линии до отношения переменных отрезков ломаной линии, одни концы которых закреплены, а другие движутся по окружности». О нашей работе [8] не упоминается.

Далее и вовсе, на наш взгляд, происходит определенное смешение суждений.

Говорится о «геометрической модели обобщенных золотых сечений» так, что «геометрическое место точек на плоскости – окружность радиуса позволяет обобщить понятие золотого сечения, как отношение отрезков переменной ломаной линии» [12].

Что же именно является предметом обобщения в указанных работах?

Сначала автор говорит про «обобщенную геометрическую модель золотых сечений». Затем про «геометрическую модель обобщенных золотых сечений».

Тем самым расстраиваются причинно-следственные отношения.

В первом варианте речь идет про обобщение геометрической модели, во втором варианте – самого золотого сечения. Что, конечно, не одно и то же.

В действительности золотое сечение (золотая пропорция), равно как и золотая константа, остаются без изменения. На то она и константа!

Зато расширяется геометрическая интерпретация. При этом изменяется целое (точнее его суммарная геометрическая длина), которое теперь уже проецируется как ломаная линия, составленная из двух отрезков – в их неизменном золотом отношении $1:\Phi$.

То есть обобщается не само золотое сечение, а его геометрическая интерпретация!

С таким же успехом вместо изменяемого линейного отрезка можно использовать дугу с переменным радиусом кривизны. Или просто масштабировать в разных вариациях.

Множественное число к ЗС вообще неприменимо, так как в математике ЗС – это также число. Допустим, мы примем $k = 1/\pi$ и построим (рис. 4) окружность (как на рис. 3).

Конечно, неразумно при этом рассуждать про «геометрическую модель чисел "пи" (!)

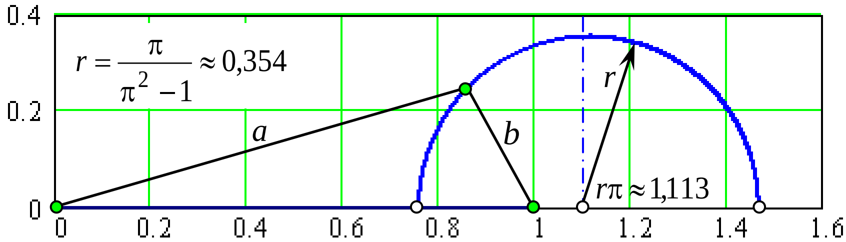


Рис. 4. Резольвента R_π – геометрическое место вершин треугольника с соотношением сторон $a/b = \pi, \;\; c = 1$

Поэтому и для ЗС в понятийном аспекте более точно следует говорить: «обобщенная геометрическая модель золотого сечения». То есть де-факто понятие золотой пропорции остается неизменным, но расширяется её геометрическое представление-толкование.

Причем, нужно отдать должное, весьма строго, информационно насыщено и грамотно.

Достаточно взглянуть на совмещенные графики двух моделей (рис. 5), которые подпадают под общее определение семейства резольвент Вассера – кривых, описывающих движение "свободной" вершины плоского треугольника с закрепленным основанием.

Типы резольвент различаются заданными связями между сторонами треугольника.

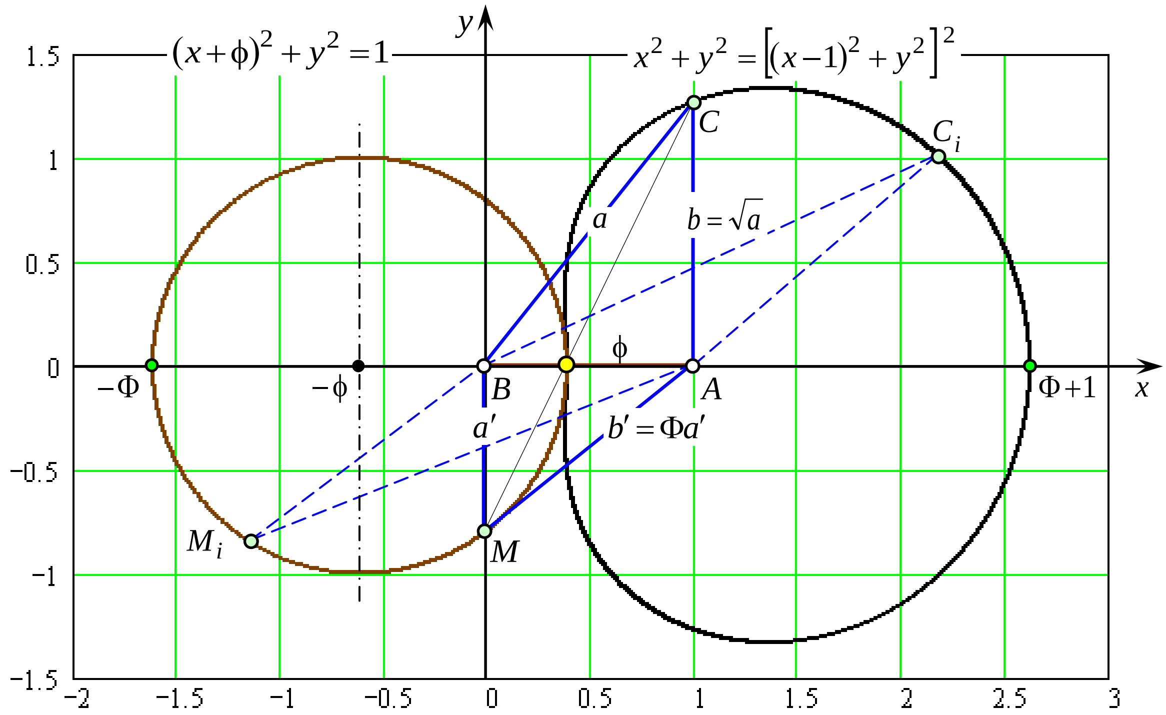


Рис. 5. Совмещение двух моделей формирования треугольников (a, b, c = 1):
золотоносные треугольники ABM $\quad b'/a' = \Phi$ – окружность;
гармоничные треугольники ABC $\quad b/a = 1/b$ – резольвента
с геометрической пропорцией сторон

На первый взгляд, модели сильно разнятся. В действительности, отличие не столь существенно, ибо кривые сформированы путем использования одного и того же подхода: на фиксированном отрезке $AB = 1$ достраивается множество треугольников с заданными связями-отношениями боковых сторон: $b = a\Phi$ или $b = \sqrt{a}$. То есть, различие происходит в априори выбираемом отношении между сторонами треугольника.

Так или иначе, но используется предложенный нами [8] способ формирования непрерывной линии, описываемой вершиной треугольника, – работа датирована 22.07.2010.

Статья [11] размещена позже, в последнем за год журнальном выпуске № 6 (2010).

Наша главная идея, которая повторяется затем и в работе [11], состоит в выходе за пределы <золотого> деления линейного отрезка на плоскость с формированием геометрически непрерывного множества треугольников с заданными свойствами.

Отличаются только соотношения между боковыми сторонами, выбор которых в общем случае может быть неограниченно разнообразным (см. ниже).

В исходно-изначальном варианте [8] строятся гармонические треугольники с использованием *геометрической пропорции сторон*: $c/b = b/a$ или $a = b^2$.

Именно таким путем золотое сечение "покидает" пределы чистого отрезка или вырожденного треугольника.

Автор работы [11] в качестве отношения двух сторон использует золотое сечение:

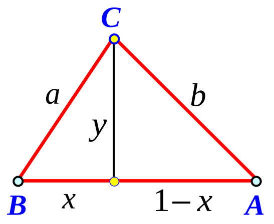
$$b = a\Phi \quad \text{или} \quad a = b\phi, \ \phi = \Phi^{-1}.$$

С таким же успехом могут применяться и многие другие виды пропорции.

В частности на основе разнообразных средних значений (Cesaro, Chisini, Heronian, Heinz, Stolarsky... – http://en.wikipedia.org/wiki/Mean). Например, та же гармоническая пропорция.

От того, что вместе треугольника употребляется терминология ломаной линии, состоящей из двух отрезков закрепленными концами, ничего не меняется. Ибо налицо всё те же треугольники с изменяемой геометрией в соответствии с априори выбранной пропорцией.

Сопоставление треугольников



Без потери общности рассуждений исходный отрезок логично принять равным единице: $c = AB = 1$. Для удобства изложения, как и ранее, точку B можно совместить с началом координат.

Тогда координаты вершин треугольников удовлетворяют двум равенствам:

$$a^2 = x^2 + y^2; \qquad b^2 = (1-x)^2 + y^2.$$

В зависимости от принятой пропорции сторон приходим к таким соотношениям:

Золотоносные треугольники с отношением двух сторон, равным ЗС	Гармонические треугольники с геометрической пропорцией сторон
$a = b\phi$	$a = b^2$
$x^2 + y^2 = \phi^2(1-x)^2 + \phi^2 y^2$	$x^2 + y^2 = \left[(1-x)^2 + y^2\right]^2$
$x^2 + y^2 = \phi^2\left(x^2 + y^2\right) + \phi^2(1-2x\phi) = \phi(1-2x\phi)$	$a \in \left[\phi^2,\ \Phi + 1\right]$:
$(x+\phi)^2 + y^2 = 1$	$X(a) = \left(a^2 - a + 1\right)/2;\quad Y(a) = \sqrt{a^2 - X(a)}$

Вершина C гармонических треугольников описывает кривую, которая напоминает лимакону (mathworld.wolfram.com/Limacon.html) или улитку Паскаля с её уравнением [16, с. 74]

$$\left(x^2 + y^2 - \alpha x\right)^2 = \beta^2\left(x^2 + y^2\right)$$

для коэффициентов $(\alpha,\ \beta) = (2,\ 1)$:

лимакона $\qquad x^2 + y^2 = \left(x^2 + y^2 - 2x\right)^2;$

резольвента $\qquad x^2 + y^2 = \left(x^2 + y^2 - 2x + 1\right)^2.$

Алгебраические кривые внешне похожи, но всё ж не совпадают.

Так, в уравнении резольвенты с геометрической пропорцией сторон наличествует свободный член, равный 1.

Примечательно, что в случае прямоугольных треугольников прямолинейный отрезок CM проходит точно через точку золотого сечения на исходном отрезке AB (см. рис. 5).

Действительно, $(b,\ a') = \left(\sqrt{\Phi},\ \sqrt{\phi}\right)$. Значит, отношения катетов равны $\dfrac{\sqrt{\Phi}}{\phi} = \dfrac{\sqrt{\phi}}{\phi^2}$, то есть треугольники подобны. Отсюда следует равенство их углов.

Расширение спектра построений

Некоторые разновидности среднего двух величин можно вычислять по общей формуле:

$$b = \left(\frac{a^m + c^m}{2}\right)^{1/m}. \tag{1}$$

В частности [9],

R_a – арифметическое среднее, $m = 2$;

R_g – геометрическое среднее, $m \to 0$;

R_h – гармоническое среднее, $m = -1$;

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, \qquad y = \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2}$$

Если зафиксировать одну сторону треугольника $c = 1$, другую сторону a варьировать, а третью b вычислять по формуле (1), то в зависимости от степенного показателя m получаем набор резольвент (рис. 6) с изменяющимися координатами (2) точек.

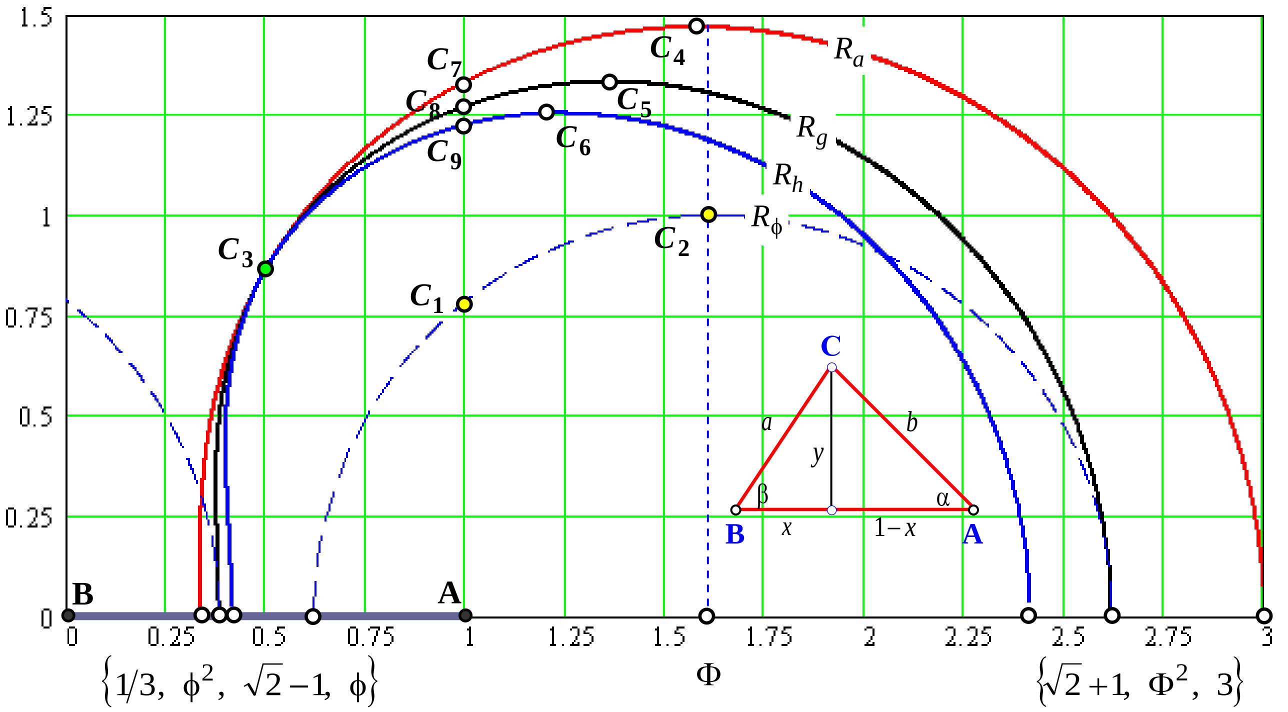


Рис. 6. Типовые резольвенты Вассера R с их наиболее характерными точками C_i

При этом все крайние точки на графике становятся взаимно обратимыми:

$$1/3 \cdot 3 = \phi^2 \cdot \Phi^2 = (\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}-1) = 1.$$

Приведена и золотая резольвента R_ϕ с отношением катетов $a/b = \Phi$.

Поскольку она жестко привязана к фиксированному числу Φ, то её крайние точки на оси абсцисс удовлетворяют равенству $\phi \cdot \Phi^2 = \Phi$.

Начальный участок характерных резольвент в укрупненном масштабе (рис. 7), а также их общее представление (см. рис. 6), наглядно показывают, что кривые сначала сходятся в точке с координатами $(0.5,\ \sqrt{3}/2)$, потом снова расходятся.

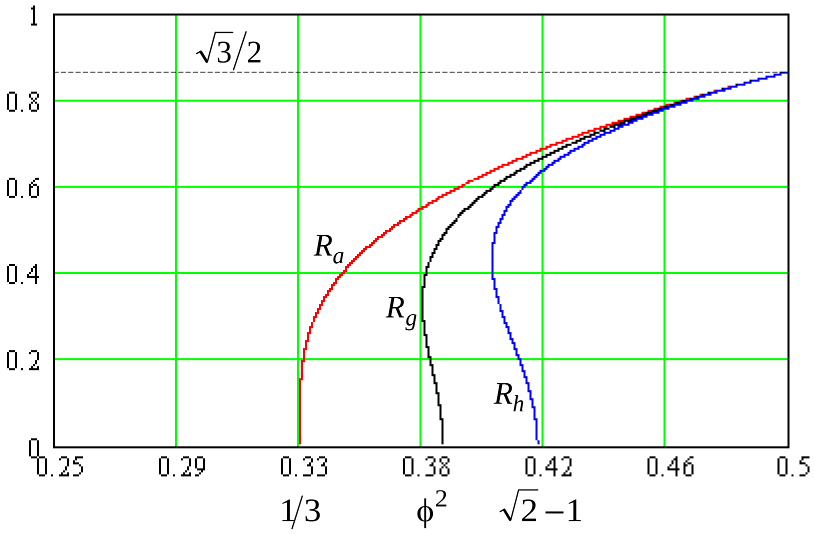


Рис. 7. Начальный участок формирования резольвент

Данная точка соответствует равностороннему треугольнику с его идеальной пропорцией сторон.

Более рельефное и полное представление о форме кривых в первом и четвертом квадрантах дает рис. 8.

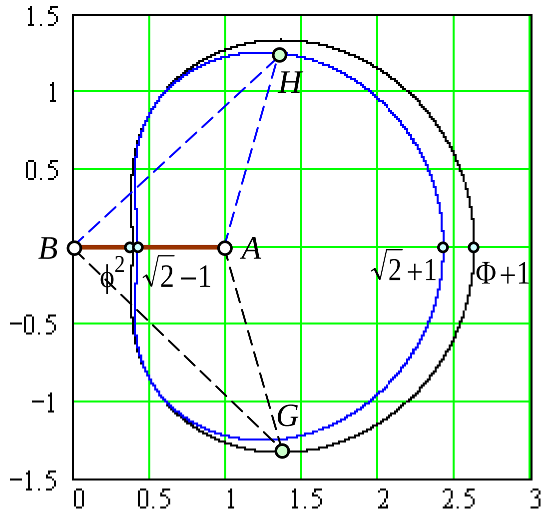


Рис. 8. Совмещенные резольвенты:
гармоническая H и геометрическая G пропорция сторон

Следует отметить, что сама по себе константа золотого сечения Φ не вносит ничего примечательного в форму резольвенты.

В случае линейного отношения боковых сторон $b = ka$, все кривые являются окружностями (рис. 9), как "близнецы", независимо от коэффициента пропорциональности k.

Золотая константа Φ выступает как равная среди равных – "par in parem".

В треугольниках, имеющих единичное основание, резольвенты Вассера с гармонической и геометрической пропорциями сторон отсекают на оси x отрезки соответственно длиной 2 и $\sqrt{5} = \Phi^2 - \phi^2 = \Phi + \phi$.

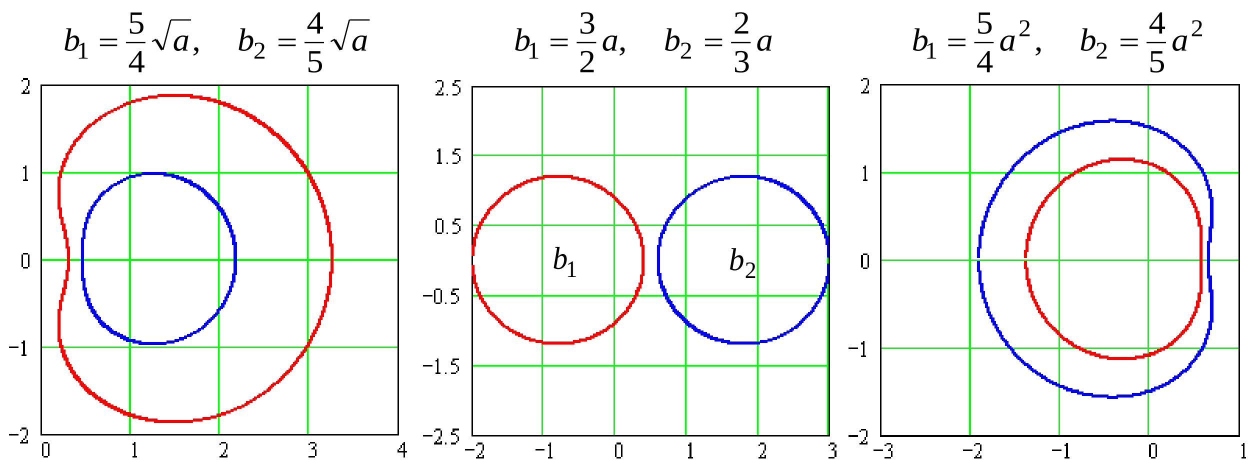


Рис. 9. Семейство резольвент с разными соотношениями боковых сторон: линейной зависимости (посредине) соответствуют окружности

Ниже описаны некоторые примечательные случаи (см. рис. 6):

1. ΔABC_1 – разновидность "золотого" прямоугольного Δ-Кеплера: $(b, c, a) = \left(\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi}\right)$.

2. ΔABC_2 – $a = \sqrt{1+\Phi^2}$, $b = \sqrt{1+\phi^2}$, $\angle\beta = \operatorname{arctg}\phi$.

3. ΔABC_3 – равносторонний: $a = b = c$.

4. C_4 – точка максимума "арифметической резольвенты":

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0 \ \Rightarrow 3a^3 - 3a^2 - 7a - 1 = 0 \ \Rightarrow \ (a, b, x, y) = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{3}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right);$$

$$x_{\max} = b, \quad y_{\max} = \sqrt{a}\,.$$

5. C_5 – точка максимума "геометрической резольвенты":

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0 \ \Rightarrow 2a^3 - 3a^2 - a - 1 = 0 \ \Rightarrow \ a = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{3} + \frac{5}{u} + 1\right) \approx 1{,}901; \quad u = \sqrt[3]{108 + 3\sqrt{921}}\,;$$

$$b = \sqrt{a} \approx 1{,}379\,; \quad x_{\max} = \frac{1 + a^2 - a}{2} \approx 1{,}357\,; \quad y_{\max} = \sqrt{a^2 - x^2} \approx 1{,}332\,.$$

6. C_6 – точка максимума "гармонической резольвенты":

$$x_{\max} \approx 1.23506\,, \qquad y_{\max} \approx 1.25343\,.$$

7. ΔABC_7 – прямоугольный треугольник с арифметической пропорцией сторон:

$$b=\frac{a+c}{2}=\frac{a+1}{2}, \quad a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad (a,\ b,\ c)=\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{3}\right).$$

8. ΔABC_8 – разновидность "золотого" Δ-Кеплера:

$$b^2=ac=a, \quad a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad (a,\ b,\ c)=\left(\Phi,\ \sqrt{\Phi},\ 1\right).$$

Другими словами, это треугольник с геометрической пропорцией сторон.

9. ΔABC_8 – прямоугольный треугольник с гармонической пропорцией сторон:

$$b=\frac{2ac}{a+c}=\frac{2a}{a+1}, \quad a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad (a,\ b,\ c)=(1.581546,\ 1.225270,\ 1).$$

Здесь a – положительный корень алгебраического полинома $a^4+2a^3-4a^2-2a-1$.

Один частный случай

Л е м м а . Существует треугольник, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию, а величины внутренних углов – арифметическую прогрессию.

Пусть Δ – разность арифметической прогрессии углов $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ треугольника, лежащих соответственно напротив сторон $a,\ b,\ c$.

Тогда сумма углов составляет

$$\alpha+\beta+\gamma=(\beta-\Delta)+\beta+(\beta+\Delta)=3\beta=180^{\circ}.$$

Откуда $\beta=60°$. То есть один угол обязательно равен $60°$. Его косинус $\cos\beta=0{,}5$.

Из геометрической прогрессии сторон следует равенство $b^2=ac$.

Согласно теореме косинусов имеем:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$$

или

$$ac=a^2+c^2-ac \quad \to \quad (a-c)^2=0 \quad \to \quad a=c.$$

Итак, получается равнобедренный треугольник $a=c$ с углом при вершине $60°$, то есть фактически равносторонний треугольник.

Возникает довольно любопытный, можно сказать "вырожденный" случай.

Треугольник действительно существует, но разность арифметической прогрессии равна нулю, а знаменатель геометрической прогрессии – единице.

Таким образом, в равностороннем треугольнике длины сторон образуют геометрическую прогрессию, а величины внутренних углов – арифметическую прогрессию.

Других треугольников с таким свойством нет.

"Золотое" неравенство треугольника

В евклидовой геометрии хорошо известно неравенство треугольника: сумма длин двух сторон не меньше длины третьей стороны.

Строгое неравенство достигается для невырожденного треугольника, когда три его вершины не находятся на одной прямой линии.

Доказательство изложено ещё Евклидом в предложении 1.20 [5, с. 32].

Практическое использование неравенства треугольника приводит к любопытным результатам.

1) Пусть в треугольнике стороны находятся в арифметической прогрессии, и равны a, $a+d,\ a+2d$.

Из неравенства треугольника следует:

$$0<a<2a+3d,$$
$$0<a+d<2a+2d,$$
$$0<a+2d<2a+d.$$

Чтобы одновременно удовлетворить эти соотношения, необходимо выполнение неравенств: $a>0,\ -a/3<d<a$.

Самое простое решение $d=0$ приводит к равностороннему треугольнику с нулевым приращением арифметической прогрессии.

Если положить $d=a/3$, то генерируется прямоугольный треугольник, который всегда адекватен пифагорейской тройке со сторонами $3,\ 4,\ 5$.

2) Теперь рассмотрим треугольник, в котором стороны находятся в геометрической прогрессии: $a,\ aq,\ aq^2$.

Тогда неравенство треугольника требует выполнения:

$$0<a<aq+aq^2,$$
$$0<aq<a+aq^2,$$
$$0<aq^2<a+aq,$$

Поскольку в первом неравенстве $a>0$, то из второго следует $q>0$. Кроме того, первое неравенство эквивалентно $q^2+q-1>0$, то есть $q>\phi$ – малая золотая константа.

Соответственно из третьего неравенства $q^2-q-1>0$ вытекает, что $q<\Phi$.

Окончательно имеем:

$$\phi<q<\Phi.$$

Итак, *стороны треугольника могут находиться в геометрической прогрессии, если знаменатель прогрессии ограничен малой и большой константой золотой пропорции*.

В частности, если выбрать $q=\sqrt{\Phi}$, то формируется прямоугольный треугольник Кеплера с соотношением сторон $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ и тождеством $\Phi^2=1+\Phi$ по теореме Пифагора.

Примечательно, если стороны треугольников образуют геометрическую прогрессию $(a,\ b,\ c)=\left(a,\ aq,\ aq^2\right)$, то логарифмы длин сторон образуют арифметическую прогрессию.

Действительно, взяв логарифмы, получаем: $\ln a+0,\ \ln a+\ln q,\ \ln a+2\ln q$.

Если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^{-1}.

В самом деле, исходя из формулы для площади треугольника (как половина произведения стороны на высоту, проведенную на эту сторону), получаем

$$(h_a,\ h_b,\ h_c)=\frac{2S}{a}\cdot\left(1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2}\right).$$

Из другой формулы для площади (половина произведения сторон на синус угла между ними) следует, что синусы углов также образуют геометрическую прогрессию.

$$(\sin\gamma,\ \sin\beta,\ \sin\alpha) = \frac{2S}{a^2 q}\cdot\left(1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2}\right).$$

Целочисленный треугольник с константой ЗС

В *целочисленном треугольнике* (integer triangle) – все три стороны имеют длины, выраженные целыми числами.

В принципе из любого треугольника со сторонами в виде рациональных чисел можно получить целочисленный аналог, пересчитав-умножив стороны на общее кратное их знаменателей. Так что в этом смысле нет существенной разницы между такими целочисленными и рациональными треугольниками.

Рассмотрим любопытный класс целочисленных треугольников, в которых один угол составляет $3/2$ части другого [17], например, $\beta = \alpha\cdot 3/2$.

Класс эквивалентности треугольников определяется следующими величинами сторон:

$$a = mn^3,$$
$$b = \left(m^2 - n^2\right)n^2,$$
$$c = \left(m^2 - n^2\right)^2 - m^2 n^2,$$

с целыми числами m, n такими, что $0 < \Phi n < m < 2n$ или

$$\Phi < \frac{m}{n} < 2.$$

Заметим, что все треугольники с соотношением $\beta = \alpha\cdot 3/2$ и любыми сторонами удовлетворяют равенству $\left(b^2 - a^2\right)\left(b^2 - a^2 + bc\right) = a^2 c^2$.

Поскольку сумма трех углов равна π, то $\alpha < 72^{\circ}$.

Величина угла находится по теореме косинусов $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Например,

$m = 5,\ n = 3$; $(a, b, c) = (135,\ 144,\ 31)$; $(\alpha, \beta, \gamma) = (1.1714,\ 1.7571,\ 0.2132)$.

Для $m = 20$ приемлемыми могут быть уже два числа $n = 11$, $n = 12$; для $m = 100$ величина $n = 51 \div 61$ и т.д.

Треугольники Герона (с целочисленными сторонами a, b, c и площадью S) имеют стороны в арифметической прогрессии $a - d,\ d,\ a + d$ тогда и только тогда [18], когда

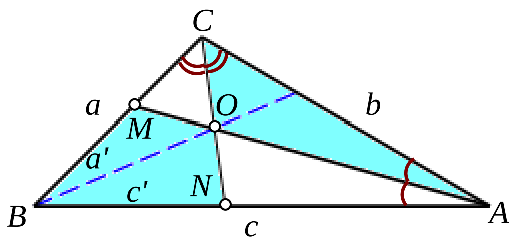
$$b = 2\left(m^2 + 3n^2\right)/g, \qquad d = \left(m^2 - 3n^2\right)/g,$$

где $g = \gcd\left(m^2 - 3n^2,\ 2mn,\ m^2 + 3n^2\right)$ – наибольший общий делитель.

Например,

m	n	g	d	a	b	c	S
3	1	6	1	3	4	5	6
4	1	1	13	25	38	51	456
4	2	4	1	13	14	15	84
9	5	6	1	51	52	53	1170

Биссектрисы Δ с геометрической прогрессией сторон



Утверждение. Пусть в треугольнике ABC стороны образуют геометрическую прогрессию так, что $b^2 = a \cdot c$ и проведены биссектрисы AM и CN, пересекающиеся в точке O. Тогда площади выделенных цветом фигур равны: $S_{COA} = S_{BMON}$.

Доказательство. Точка пересечения O биссектрис углов треугольника является центром вписанной окружности радиусом r.

Кроме того, биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к ним сторонам, откуда следует

$$a' = \frac{ac}{b+c}, \qquad c' = \frac{ac}{a+b}.$$

Умножим обе части исходного равенства $b^2 = a \cdot c$ геометрической прогрессии сторон на периметр треугольника и выполним преобразования:

$$b^2(a+b+c) = ac(a+b+c);$$

$$b^3 + cb^2 + ab^2 = abc + a^2c + ac^2;$$

$$b^3 + abc + cb^2 + ab^2 = 2abc + a^2c + ac^2;$$

$$b(a+b)(b+c) = ac(a+2b+c);$$

$$b = ac\frac{(a+b)+(b+c)}{(a+b)(b+c)} = \frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c}.$$

Площади искомых фигур равны:

$$S_{COA} = 0{,}5r \cdot b;$$

$$S_{BMON} = S_{BMO} + S_{BNO} = 0{,}5r(a' + c') = 0{,}5r \cdot \left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c}\right) = 0{,}5r \cdot b = S_{COA}.$$

Что и требовалось доказать.

Золотая резольвента Вассера

Как уже говорилось, в работах [11, 12] рассмотрена «обобщенная геометрическая модель золотого сечения» в виде отношения переменных отрезков ломаной линии, одни концы которых закреплены, а другие совмещенные концы движутся по окружности.

Говоря о преемственности знаний, мы оставляем данный термин за её автором.

Вместе с тем в более ранней работе [8] нами предложен механизм формирования непрерывной линии, описываемой вершиной треугольника с изменяемой геометрией.

Главная идея состоит в выходе за пределы <золотого> деления линейного отрезка на плоскость с образованием геометрически непрерывного множества треугольников с заданными свойствами.

Именно треугольников (!), а не ломаной линии переменной длины.

Вид непрерывных линий зависит от априори заданных соотношений между сторонами треугольника, выбор которых в общем случае может быть неограниченно разнообразным.

В начальном варианте [8] строятся гармонические треугольники с использованием *геометрической пропорции сторон*

$$a/b = b/c\,.$$

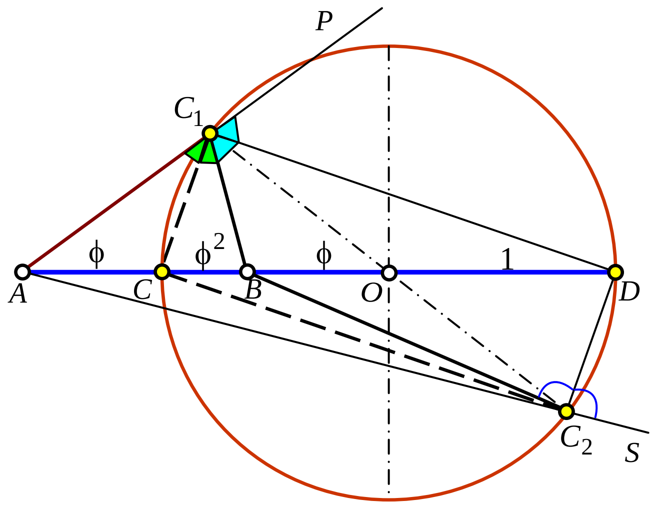
При этом исходное сечение (деление) как бы выходит за пределы отрезка или вырожденного треугольника. В частности, классическое золотое сечение отрезка – есть не что иное, как разновидность геометрической прогрессии для вырожденного треугольника с соотношением сторон $b^2 = ac,\ c = a + b$.

Геометрическим местом точек вершин треугольника, отношение боковых сторон которого постоянно, является окружность.

Так или иначе, но точка деления отрезка становится вершиной плоского треугольника с единичным основанием и описывает ту или иную кривую из семейства резольвент Вассера – геометрического множества вершин треугольника с фиксированным основанием и априори заданным видом взаимосвязи сторон.

Это дает нам моральное право в частном случае рассматривать также *золотую резольвенту Вассера* [19] – геометрическое множество вершин плоского треугольника с фиксированным основанием и "золотым" отношением боковых сторон $b = a \cdot \phi$.

Посмотрим, как ведут себя треугольники на золотой резольвенте Вассера, а также их биссектрисы в привязке гармоничной тетраде [19]. Точки внутреннего и внешнего деления C, D отрезка AB = 1 лежат на диаметре резольвенты (рис. 10).



$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AD}{DB} = \Phi$$

$$\angle AC_1C = \angle BC_1C$$

$$\angle AC_2C = \angle BC_2C$$

$$\angle BC_1D = \angle PC_1D$$

$$\angle BC_2D = \angle SC_2D$$

Рис. 10. Золотая резольвента Вассера с характерными биссектрисами углов

Независимо от местоположения точки C_k на окружности (k = 1, 2, ...), линия C_kC является биссектрисой угла AC_kB.

Аналогично линия C_kD является биссектрисой внешнего угла при вершине C_k.

Замечательное свойство гармонической <золотой> тетрады $(A, B; C, D)$!

Напомним, упорядоченная четверка точек прямой $(A, B; C, D)$ называется гармонической [20], если точки C и D делят отрезок AB в отношениях, отличающихся только знаком $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = -\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}$. Здесь отрезок XY (без *курсива*) имеет направленность от X к Y.

Предполагается, что «на неориентированной прямой нельзя приписать знак отрезкам, но можно приписать знак отношению отрезков» [21, с. 11].

Миф 6 проф. Шелаева о "мета-Δ"

Сдавалось, что в работах [22, 23] практически разобрались с современной мифологией вокруг так называемого "метатреугольника" (далее по тексту – "мета-Δ").

Оказывается, нет. К развитию новых мифов-сказаний подключился д.ф.-мат наук проф. А. Шелаев в работе [24]. – На английском языке (почему бы и нет).

Напомним, как П. Сергиенко вводит свой гармоничный "мета-Δ" [25]: «Предположим, что среди бесконечного множества **прямоугольных треугольников**, вписанных в окружность (полуокружность), существует такой прямоугольный треугольник, **у которого гипотенуза так относится к большему катету, как больший катет относится к меньшему катету**» (жирным выделено мною – С.Л.). То же самое в более ранней работе [3].

То есть главный посыл для геометрической фигуры – это пропорциональность сторон треугольника, численные значения которых образуют геометрическую прогрессию. Подобно золотой пропорции

Далее он вводит метрику. В итоге, больший катет равен Φ, а высота треугольника $h = 1$.

Известно, что в любом прямоугольном треугольнике высота, опущенная из прямого угла, численно равна произведению катетов, деленному на гипотенузу $h = ab/c$.

То есть равенство гипотенузы произведению двух катетов $c = ab$ – это следствие (!), которое возникает в любом прямоугольном треугольнике с единичной высотой!

В других своих работах автор просто перечисляет свойства "мета-Δ", причем часто в разном порядке следования [26].

Так или иначе, геометрическая прогрессия сторон и единичная высота – необходимые и достаточны условия для вычерчивания конкретного проявления треугольника Кеплера в виде "мета-Δ" с четко заданными фиксированными сторонами: $(b, a, c) = (\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi})$.

Изначальным и главным у автора "мета-Δ" является *гармония геометрической фигуры*, которая выражается через пропорцию $\frac{c}{a} = \frac{a}{b} = k$ или геометрическую прогрессию сторон.

Проф. А. Шелаев, видимо, слабо представляет историю возникновения прямоугольного гармоничного треугольника, поэтому ставит во главу угла только второе свойство $c = ab$.

В результате рождается еще один, очередной миф относительно "мета-Δ".

Так, на двух страницах работы [24, с. 10–11] перечисляются свойства четырех прямоугольных треугольников с единичной высотой. Причем примеры 1 и 2 совершенно идентичны, различаясь только переменой мест катетов! То же самое и с примерами 3 и 4.

Перестановка катетов, равно как и буковок $a \leftrightarrow b$, ничего нового не привносит!

Для удобства восприятия, фигуры с численными выражениями их параметров представим графически в одном масштабе (рис. 11).

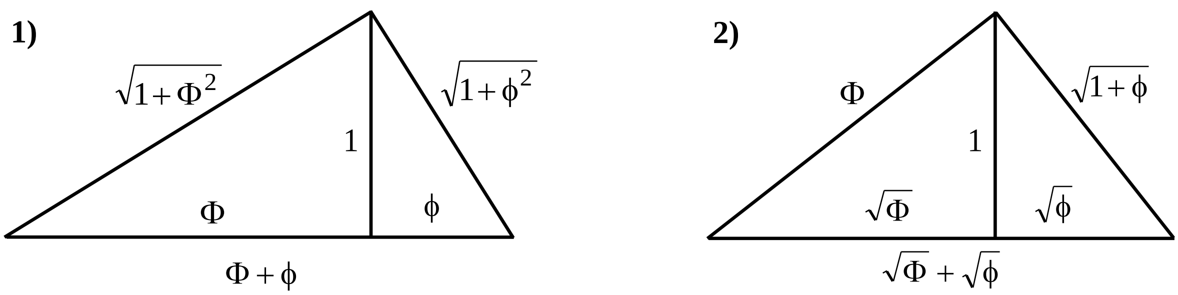


Рис. 11. Два прямоугольных треугольника с единичной высотой

Мы также специально оставили обозначения оригинала. Хотя во втором треугольнике очевидны такие параметры сторон: $\sqrt{1+\phi} = \sqrt{\Phi}$ и $\sqrt{\Phi} + \sqrt{\phi} = \Phi\sqrt{\Phi}$.

Первый профессор называет «не Δ-Кеплера, но "мета-Δ"», второй «и Δ-Кеплера, и "мета-Δ"». Этим самым дается ошибочный посыл, будто существуют "мета-Δ", которые не являются Δ-Кеплера.

Второй треугольник со сторонами $\left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$ и знаменателем геометрической прогрессии $\sqrt{\Phi}$ – действительно единственный в своем роде "мета-Δ", как частный случай Δ-Кеплера.

Первый треугольник не является ни тем, ни другим, поскольку нарушена пропорциональность сторон: большая – к средней, как средняя – к меньшей.

Более того, подобных треугольников существует бесконечное множество.

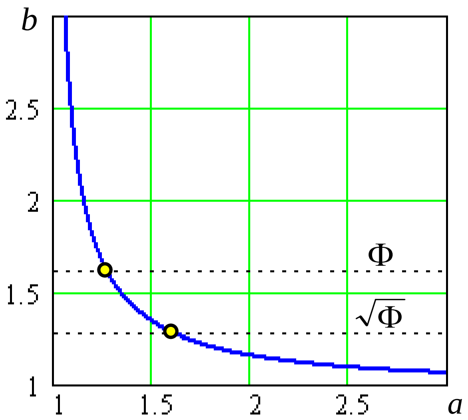


Рис. 12. Катеты в треугольниках с единичной высотой

Примем $c = ab$ и $c^2 = a^2 + b^2$.

Отсюда следует $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$ и $b = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

Задавая любое значение $a > 1$, получаем бесконечное множество прямоугольных треугольников, у которых высота равна 1, а произведение катетов численно равно гипотенузе:

$$(b,\, a,\, c) = \left(a\big/\sqrt{a^2-1},\ \ a,\ \ a^2\big/\sqrt{a^2-1}\right).$$

Только никакого отношения ни к Δ-Кеплера, ни к "мета-Δ" они не имеют, за исключением одного единственного случая (рис. 12), – с учетом зеркального отражения или симметрии катетов.

Прямоугольные треугольники, отвечающие двум условиям $c = ab$ и $c^2 = a^2 + b^2$, образуют самостоятельный класс (множество) геометрических фигур. В том числе содержит прямоугольный равнобедренный треугольник $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\right)$, который является базовым, занимая некое среднее положение (рис. 13).

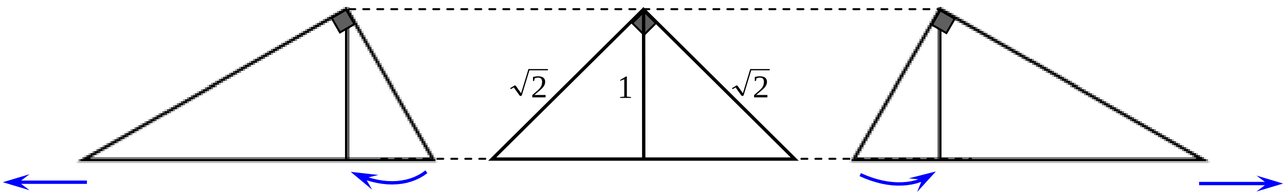


Рис. 13. Схема формирования прямоугольных треугольников с единичной высотой

Далее левая сторона может отодвигаться влево (скользя нижним концом по оси абсцисс) до бесконечности, соответственно правая сторона нижним концом придвигается ближе к высоте, сохраняя между сторонами-катетами прямой угол. Аналогично вправо.

Добавление третьего свойства пропорциональности сторон $cb = a^2$ приводит к фиксации одного единственного "мета-Δ" с жестко заданной структурой $(b,\ a,\ c) = \left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$! – Либо с переменой местами значений катетов a, b.

Итак, все треугольники прямоугольные: $c^2 = a^2 + b^2$ – *одно условие*.

В Δ-Кеплера вводится *второе условие* пропорциональности сторон $c/a = a/b$, что приводит к геометрической прогрессии сторон $\left(1 : \sqrt{\Phi} : \Phi\right)$ со знаменателем $\sqrt{\Phi}$.

Для "мета-Δ" устанавливается последнее *третье условие* (метрическое): больший катет равен Φ либо высота из прямого угла $h = 1$, что в данном случае равнозначно.

В итоге получается фиксированный треугольник $\left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$, как частный случай Δ-Кеплера.

Численное соотношение $hc = ab$, верное для любого прямоугольного треугольника, после принятия единичной высоты $h = 1$ дает равенство $c = ab$,

Новый миф о "мета-Δ" проф. А. Шелаева порожден тем, что вторым условием он назначает $c = ab$ или $h = 1$.

В результате образуется класс (бесконечное множество) прямоугольных треугольников, которые в общем случае не имеют никакого отношения ни к Δ-Кеплера, ни к "мета-Δ". Разве что в одном единственном случае, если ввести третье условие пропорциональности $cb = a^2$ или геометрической прогрессии сторон.

Таким образом, "мета-Δ" – это частный случай Δ-Кеплера с единичной высотой, а значит $c = ab$. Или, что тоже самое "мета-Δ" – это разновидность Δ-Кеплера, в котором больший катет численно равен золотой константе Φ.

С целью наглядности три необходимых и достаточных условия для формирования "мета-Δ" объединены в одной схеме (рис. 14).

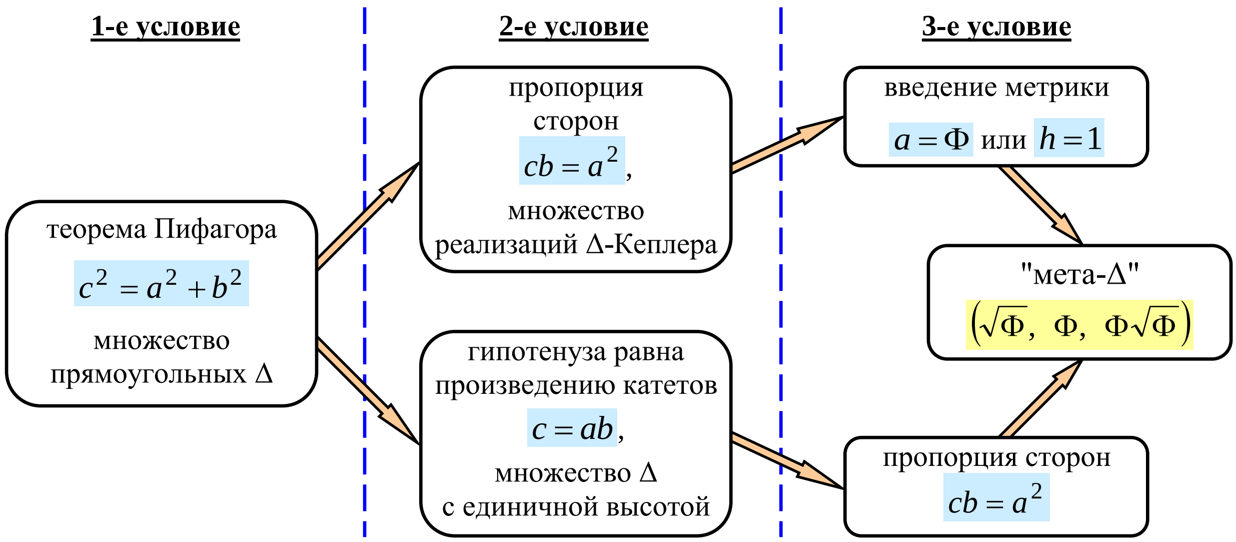


Рис. 14. Схема формирования "мета-Δ": к вопросу о развеивании мифов вокруг него

На этом мы настоятельно рекомендуем закрыть ненужное мифотворчество вокруг примечательного (!) "мета-Δ" и далее не множить новые несуразности, которые лишь затуманивают яркий и уникальный образ золотой пропорции.

В том числе, ради сохранения, преемственности и единения знаний по золотоносной тематике-проблематике.

Литература:

1. Василенко С.Л. "Золотые ряды" Фибоначчи с произвольными начальными условиями // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15295, 19.05.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322067.htm.

2. Василенко С.Л. Базовое тождество математических основ гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.

3. Сергиенко П.Я. Триалектика. Начала математики гармоничного мира (Русский проект) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15356, 21.06.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321124.htm.

4. Василенко С.Л. Пропорции в симбиозе золотоносных и гармоничных треугольников // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 30.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=95&sm=2.

5. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

6. Белянин В.С., Романова Е.Н. Золотая пропорция. Новый взгляд // Наука и жизнь. – 2003. – № 6. – URL: nkj.ru/archive/articles/3070/.

7. Алферов А.А. О среднем геометрическом (и не только) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13671, 17.08.2006. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321027.htm.

8. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

9. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

10. Василенко С.Л. Главная тайна золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17178, 04.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322109.htm.

11. Шелаев А.Н. Соотношения гармонии и экстремумы длин, площадей и их производных в обобщенной модели золотого сечения // Актуальные проблемы современной науки. – 2010. – № 6. – С.162-164.

12. Шелаев А.Н. Обобщенная геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных // АТ. – М.: Эл. № 77-6567 публ.17431, 29.04.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321252.htm.

13. Шелаев А.Н. Кинематическая модель внутренних и внешних золотых сечений и соответствующих им вурфов – отношений гармонических отношений // АТ. –М.: Эл. № 77-6567, публ.21326, 21.10.2015. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321303.htm.

14. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

15. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

17. Deshpande M.N. Some new triples of integers and associated triangles // Mathematical Gazette 86, November 2002, 464–466.

18. Buchholz R.H., MacDougall J.A. Heron Quadrilaterals with sides in Arithmetic or Geometric progression // Bull. Austral. Math. Soc. – 59 (1999), 263–269.

19. Василенко С.Л. Гармоническая тетрадная модель целого // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.03.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=100&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 11.02.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13415.html.

20. Понарин Я. Гармонический четырехугольник // Квант. – 1991. – № 10. – С. 48–52. – http://kvant.mccme.ru/1991/10/index.htm.

21. Бескин Н.М. Деление отрезка в данном отношении. – М.: Наука, 1973. – 64 с. – http://bookos.org/book/564177.

22. Василенко С.Л. Треугольник Кеплера как объединитель теоремы Пифагора, золотого сечения и современных мифов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22385, 05.08.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163016.htm.

23. Василенко С.Л. Золотой прямоугольник Кеплера: свойства, особенности и проявления // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22410, 18.08.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163027.htm.

24. Shelaev A.N. The analysis of non-linear systems – the oscillating and rotating mathematical pendulum by means of the sized scaling method // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22421, 21.08.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163031.htm.

25. Сергиенко П.Я. Сакральный» треугольник как математический символ Святой Троицы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.19168, 02.07.2014. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162322.htm.

26. Сергиенко П.Я. Сакральный треугольник порождающей модели гармонии всего. Алгебраическое и геометрическое познание (Тезисы) // АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ.16584, 23.06.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161846.htm.

27. Эйнштейн А, Инфельд Л. Эволюция физики. Развитие идей от первоначальных понятий до теории относительности и квантов. – М.: ТЕРРА – Книжный клуб, 2009. – 320 с.

Харьков, Украина

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html

P.S. *или З.І. по-украински.*

Не поленились и подсчитали: за период 2012–2016 гг. мы ссылались на 15 статей (с отдельными повторениями) профессора А. Шелаева (Москва, РФ) в наших пяти работах (!), которые на виду и представлены в Интернет.

Он в своих публикациях (до августа 2016 г.) не упомянул наши работы ни разу.

We don’t insist!

Вместе с тем на страницах АТ он замысловато отмечает: «Так, одному из многих полученных в моей статье результатов (о существовании в треугольнике золотых сечений по площадям) С.Л. Василенко посвятил отдельную статью, назвав этот простой результат *удивительным* свойством треугольника Кеплера. При этом С.Л. Василенко "забыл" дать ссылку на мою статью, которая ему хорошо известна».

Похоже, кроме нас больше некому повышать индексы цитирования. Куда уж больше?

Мы готовы согласиться, повиниться и при случае внести соответствующие поправки, если хотя бы в одной работе визави найдется лишь упоминание Δ-Кеплера. За исключением последней работы (август, 2016) [24], где Δ-Кеплера невольно прозвучал вместе с "мета-Δ".

Думаем, читателю также небезынтересен сам полученный результат о существовании (?) в треугольнике золотых сечений по площадям. – Если золотое сечение априори существует и принимается как данность в любом геометрическом объекте с целочисленной размерностью.

По определению!