Золотой прямоугольник Кеплера: свойства, особенности и проявления

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Два треугольника Кеплера объединяются в одну фигуру – золотой прямоугольник Кеплера. С новыми удивительными геометрическими свойствами, что называется, во славу феномена золотой пропорции. Среди них: подобие фигур, спирально-фрактальное деление и др.

Оглавление

Введение 1
Постановка задачи 2
Подобие прямоугольников общего вида 3
Частные случаи-построения 3
Замечательная особенность прямоугольника Кеплера 4
Фрактальное деление 5
Фрактальное приумножение 7
Миф 5. "Мета-Δ" расширяет Δ Кеплера 7
Основные выводы 9
Литература 10

Прямой угол острее тупого, поэтому высоко в горах обычная вода закипает в прямом угле 90 °С…

Введение

Математический образ золотого сечения (ЗС), как пропорционального отношения целого и его двух аддитивных частей, воистину феноменален.

В равной степени достаточно простой в своем понимании.

Именно этот аспект делает его весьма доступным предметом для исследований людьми с разными профессиональными устремлениями.

Несмотря на свою уникальность, золотое сечение в математике имеет довольно скромный, если не сказать, скудный арсенал проявлений.

Тем более ценными становятся новые поиски-находки его замечательных свойств.

Что имеем на практике?…

С одной стороны, практически повсеместно происходит искусственное внедрение ЗС во многие, не свойственные ему процессы и объекты.

Как правило, без должных проработок, обоснований и доказательств.

Иногда встречается и другая крайность, когда некоторые исследования и работы, подчеркнуто, изобилуют такими понятийными образами как *проблема*, *математика* и *теория* золотого сечения [1].

Тем самым воссоздается некий величавый столп пространного объекта, сложного для изучения-исследования. При этом историчности ЗС отводится место воскрешения-реставрирования особого ореола древности, на фоне чего полагаемые новшества должны выглядеть особенно представительно и колоритно.

По нашему мнению, подобные искусственно-высокопарные настройки не свойственны золотому сечению по ряду обстоятельств.

Так таковой проблемы ЗС нет.

Какая-то особая собственная математика ЗС также отсутствует. Разве что можно говорить о золотом сечении в математике. Что, конечно, не одно и то же.

Ну, а некая теория ЗС – просто преувеличение и не более как высокопарный слог.

В науке под проблемой обычно понимается некая противоречивая ситуация, выступающая в виде противоположных позиций в объяснении каких-либо явлений, объектов, процессов и требующая адекватной теории для её разрешения. Ни один из этих устанавливающих посылов не имеет для ЗС особой смысловой нагрузки.

В то же время «неверно поставленная проблема, или псевдопроблема, уводят в сторону от разрешения подлинных проблем» (БСЭ, 1969–1978).

Так, одно из самых востребованных в науке чисел π входит во многие математические, физические и технические формулы, далеко выходящие за площадь круга или длину окружности. Тем не менее, это число никогда не обобщалось и не имело собственной математической теории. Хотя известны обширные монографии [2, 3] и др.

Так и в области золотого сечения вполне приемлемым становится исследование совокупности возможных вопросов, взаимосвязанных с объектом рассмотрения, которое называется *проблематикой*.

Проблема как раз состоит в отсутствии проблемы де-юре и её искусственной гиперболизации де-факто. Как пример исподволь навязываемых мыслей.

Особенно в искусственно привносимых всеобъемлющих мега-теориях, проповедующих гиперболизацию малозначимых вещей – колоссах на глиняных ногах.

Но обо всём по порядку…

Постановка задачи

Дадим новое <u>определение</u>: золотой прямоугольник Кеплера – прямоугольник на плоскости с отношением сторон $1:\sqrt{\Phi}$.

Его основное свойство: любая из диагоналей делит прямоугольник на два треугольника Кеплера с отношением сторон $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$, где $\Phi=\left(\sqrt{5}+1\right)/2$ – константа золотого сечения.

Конкретные значения сторон здесь не имеют принципиального значения.

Свойства треугольника Кеплера подробно описаны в работе [4].

Повторяться не будем.

Разве что напомним важное различие применяемых обозначений:

– запись $\left(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi\right)$ означает конкретный (фиксированный) треугольник с жестко заданными сторонами;

– запись $\left(1:\sqrt{\Phi}:\ \Phi\right)$ предполагает пропорциональное отношение сторон с любым коэффициентом масштабирования $k>0$.

По определению прямоугольный Δ-Кеплера не дает численные значениях сторон, а только их отношение в виде геометрической прогрессии со знаменателем $\sqrt{\Phi}$.

То есть, имеем два из трех необходимых условий для построения такой фигуры: прямой угол и пропорцию сторон. Это означает, что фактических реализаций Δ-Кеплера существует великое множество. Для вычерчивания конкретного треугольника задается ещё одно дополнительное третье условие. Без потери общности рассуждений, чаще всего один из катетов, гипотенуза или высота принимается равной единице – общепринятой метрике.

Подобие прямоугольников общего вида

Рассмотрим произвольный прямоугольник на плоскости с соотношением сторон $a/b = k$ (рис. 1).

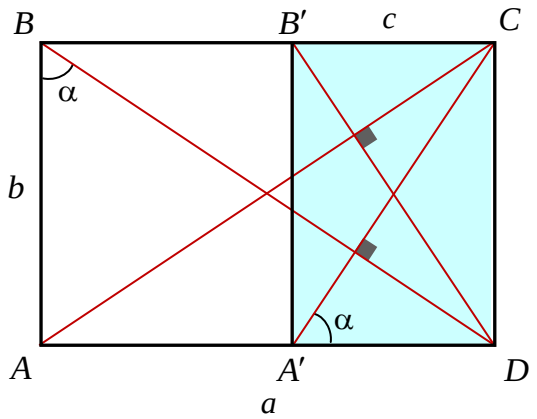


Рис. 1. Построение прямоугольника, подобного исходному
$a : b = b : c$

Проведем из двух вершин линии, перпендикулярные к диагоналям прямоугольника.

Прямая, соединяющая точки пересечения A', B' этих линий со сторонами прямоугольника, отсекает от него прямоугольник $A'B'CD$, подобный исходной фигуре.

Их подобие вытекает из подобия треугольников ABD и $A'CD$, которые имеют одинаковые углы, образованные перпендикулярными сторонами (лучами).

Следовательно, длины сторон прямоугольников составляют геометрическую прогрессию с образованием пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k. \qquad (1)$$

Частные случаи-построения

Частному случаю $a/b = \Phi$ соответствует хорошо известная геометрическая фигура – золотой прямоугольник [5] с соотношением сторон $1 : \Phi$.

Золотой прямоугольник $1 \times \Phi$ знаменит тем, что при отрезании от него квадрата 1×1, оставшийся прямоугольник $1 \times \phi$ подобен исходному, $\phi = \Phi^{-1} = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2$.

Это свойство следует из замечательного свойства золотой пропорции $\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\phi}$.

Рассмотрим другой частный случай, приняв дополнительное условие: диагональ отсекаемого прямоугольника равна большей стороне исходного прямоугольника $A'C = AD = a$ или $\sqrt{c^2 + b^2} = a$.

После деления последнего равенства на величину b, с учетом пропорции (1), получаем уравнение

$$\sqrt{k^{-2}+1}=k$$

с вещественным корнем $k=\sqrt{\Phi}$.

Данное значение сторон-катетов $a/b=\sqrt{\Phi}$ является исключительной особенностью прямоугольного треугольника Кеплера [4].

Таким образом, в отсекаемом подобном прямоугольнике его диагональ d равна большей стороне исходной фигуры только (!) в прямоугольнике Кеплера $d=\sqrt{1+\phi}=\sqrt{\Phi}$.

Равенство диагонали и стороны дает чрезвычайно простую операцию построения подобной фигуры Кеплера: путем вращения циркулем вокруг вершины прямоугольника радиусом большей стороны до пересечения с противоположной стороной (рис. 2).

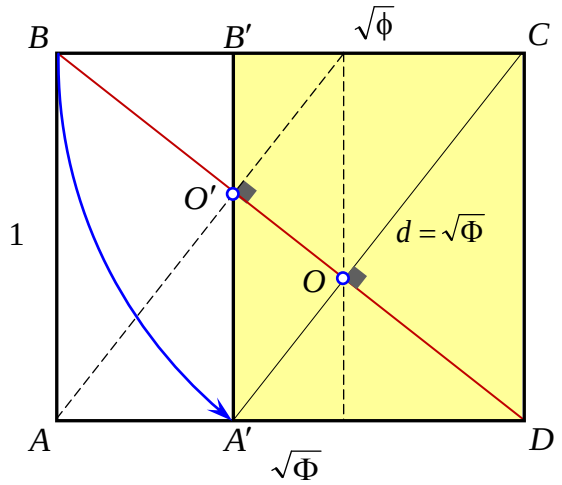


Рис. 2. Самоподобное деление прямоугольника Кеплера

Кроме двух очевидных вариантов, имеют место также другие разновидности треугольника Кеплера: $CAD=\left(\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi}\right)$, COD и т.д.

В частности, параллельный перенос влево диагонали $A'C$ до точки B дает частное проявление треугольника Кеплера с единичной высотой.

Замечательная особенность прямоугольника Кеплера

Геометрическое построение в прямоугольнике Кеплера подобной фигуры, хотя и простое, одновременно открывает его уникальные особенности.

Проведем из противоположных вершин прямоугольника две перпендикулярные линии к диагоналям до пересечения с большими сторонами, и далее параллельные линии малым сторонам: $CA'\perp BD,\ A'B'\parallel AB'$.

По сути, имеем два равнозначных симметричных построения подобных прямоугольников относительно двух боковых сторон.

Важным обстоятельством становится наличие общих *узловых точек* пересечения $O,\ O'$.

В этих узловых точках на диагонали удивительным образом стягиваются-совмещаются оба зеркальных построения.

В этом смысле золотой прямоугольник Кеплера становится идеальной самоподобной геометрической фигурой в своем классе.

Достаточно провести визуальное сравнение (рис. 2, рис. 3).

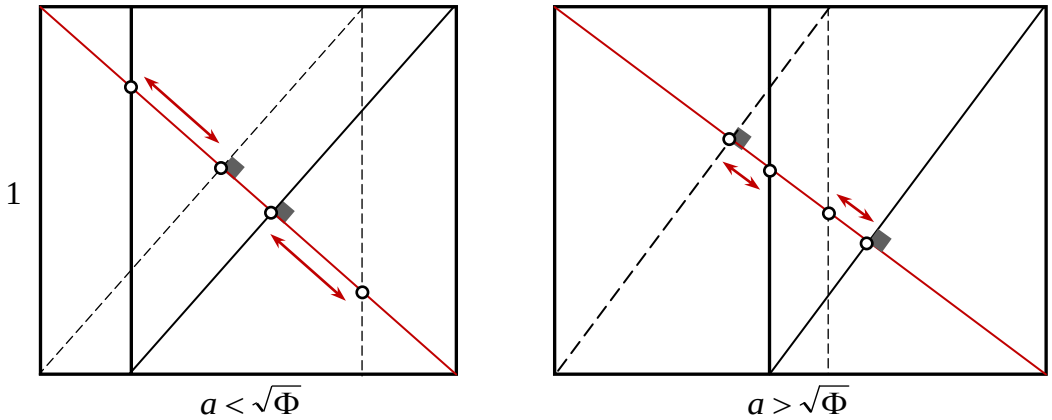
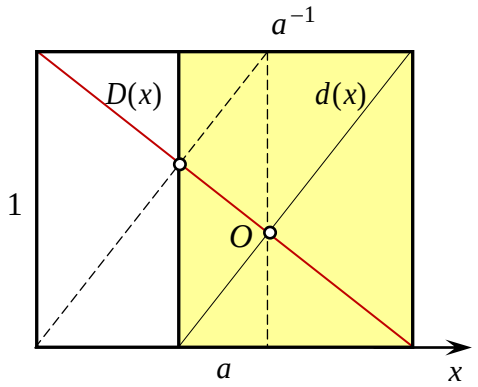


Рис. 3. Примеры построений для прямоугольников,
отличных от золотого прямоугольника Кеплера

Аргументируем выявленную особенность.

Координаты точки пересечения O диагоналей D, d подобных прямоугольников определяются из условия равенства функций этих прямых:



$$D(x) = -a^{-1}x + 1,$$

$$d(x) = ax + 1 - a^2,$$

откуда следует $x = \dfrac{a^3}{1+a^2}$.

Для того чтобы через эту точку проходила боковая сторона зеркально-подобного прямоугольника, необходимо выполнить дополнительное условие:

$$x = \frac{a^3}{1+a^2} = a^{-1} \quad \text{или} \quad a^4 - a^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{\Phi}.$$

Таким образом, идеальное зеркальное подобие фигур характерно исключительно для прямоугольника Кеплера с его отношением сторон $1 : \sqrt{\Phi}$.

Обращаем внимание, что это не обязательно конкретные метрические значения.

К данным величинам можно применять любой коэффициент масштабирования.

Фрактальное деление

Проанализируем в сравнении золотой прямоугольник и прямоугольник Кеплера.

Без потери общности рассуждений одну из сторон можно принять равной 1, соответственно рассматривая прямоугольники $1 : \Phi$ и $1 : \sqrt{\Phi}$.

Процесс отрезания подобных фигур можно проводить до бесконечности, получая всё новые и новые подобные прямоугольные формы.

Их подобие достигается следующим образом (рис. 4):

- в золотом прямоугольнике – путем отрезания квадратов или вращательного переноса малой стороны на большую сторону;

- в золотом прямоугольнике Кеплера – путем вращательного переноса большой стороны на противоположную сторону.

При этом прямоугольники "стягиваются" в верхнюю правую вершину – угловую точку.

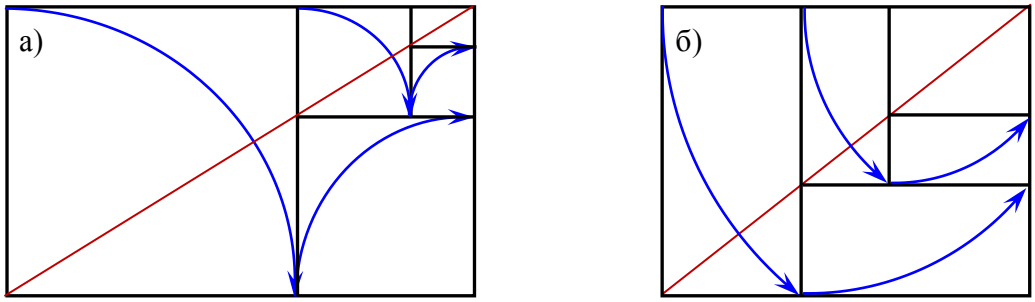


Рис. 4. Фрактальное деление прямоугольников:
а) золотой прямоугольник $1:\Phi$;
б) прямоугольник Кеплера $1:\sqrt{\Phi}$.

Подобные фигуры можно отрезать-выделять последовательно и по круговой схеме.
В результате мы приходим к спирально-фрактальному делению (рис. 5).

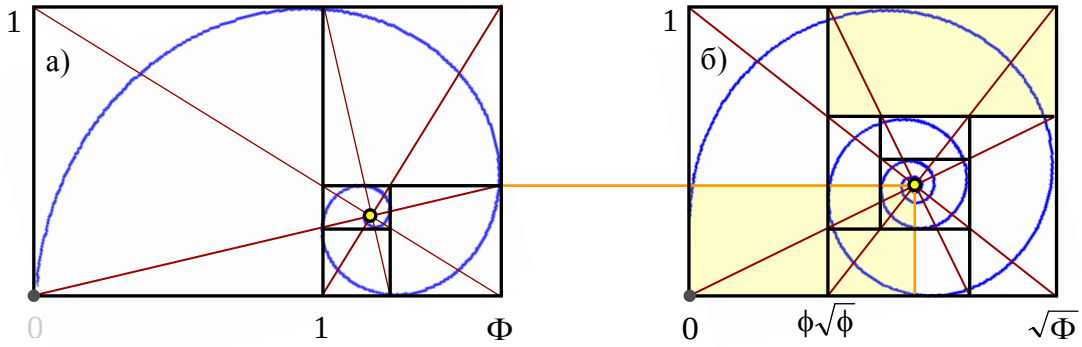


Рис. 5. Спирально-фрактальное деление прямоугольников:
а) золотой прямоугольник $1:\Phi$;
б) золотой прямоугольник Кеплера $1:\sqrt{\Phi}$.

В случае спирально-фрактального деления золотые прямоугольники сходятся в предельной точке (полюсе, аттракторе) с координатами

$$\frac{1}{1+\phi^2}\left(\Phi,\ \phi^2\right) \approx (1.171,\ 0.276),$$

которые определяются из условия пересечения двух прямых $y_1 = -\phi x + 1$ и $y_2 = \Phi\cdot(x-1)$.

Аналогично прямоугольники Кеплера при спирально-фрактальном делении сходятся в предельной точке (полюсе вращения) с координатами

$$\left(\sqrt{\phi},\ \phi^2\right) \approx (0.786,\ 0.382).$$

Эти координаты определяются из условия пересечения двух прямых-диагоналей $D(x) = -\sqrt{\phi}x + 1$ и $d(x) = \sqrt{\Phi}x - \phi$.

Примечательно, что в первом случае отношение координат полюса равно $x/y = \Phi^3$, во втором – $\sqrt{\Phi}$.

То есть координаты полюса в прямоугольнике Кеплера соотносятся точно также как и его стороны!

Другими словами, расположение полюса при спирально-фрактальном делении прямоугольника Кеплера самоподобно самому прямоугольнику.

Очень важный отличительный момент.

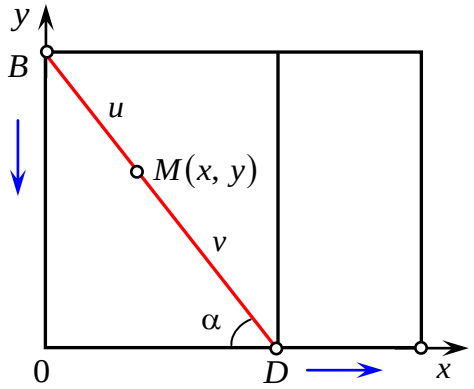
Фрактальное приумножение

Рассмотренная схема-процедура последовательного отсечения-выделения подобных фигур похожа на общую научно-философскую задачу анализа. – Через разложение-расчленение объекта и рассмотрение его отдельных сторон, свойств, составных частей.

Можно пойти в обратном направлении: вместо членения принять наращивание подобных геометрических фигур, что ближе к понятию синтеза – соединения, складывания или связывания, как антипода анализу.

Здесь прямоугольник Кеплера проявляет себя особенно зрелищно и динамично.

Подобно классической задаче механики и/или аналитической геометрии диагональ (отрезок постоянной длины) скользит своими концами по сторонам прямого угла.



Это напоминает лестницу, прислоненную к вертикальной стенке с горизонтальным полом, когда её верхний конец сползает по стенке, а нижний конец скользит по полу.

При этом любая точка лестницы (кроме концов) двигается по дуге некоторого эллипса.

Действительно, пусть точка B скользит по оси $0y$, точка D – по оси $0x$.

Выберем некоторую точку $M(x, y)$, которая делит отрезок BD на части u, v,

Тогда $x = u \cdot \cos\alpha$, $y = v \cdot \sin\alpha$.

Исключив из этих равенств угловой параметр α, получаем уравнение эллипса:

$$\left(\frac{x}{u}\right)^2 + \left(\frac{y}{v}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Итак, полностью "падая" на ось абсцисс, диагональ исходного прямоугольника Кеплера образует другой прямоугольник Кеплера, подобный исходному.

Потом происходит следующее условное "падение" диагонали и т.д. Так осуществляется модельный синтез с раскручиванием золотой логарифмической спирали Кеплера (см. рис. 5).

Миф 5. "Мета-Δ" расширяет Δ Кеплера

В работе [4], наряду с обстоятельным представлением свойств треугольника Кеплера, детально описан шлейф современных мифов вокруг его частного образа – так называемого "мета-Δ".

Подробно аргументировано и с разных сторон показано, что "мета-Δ" – частный случай треугольника Кеплера. Один из миллиардов.

Тем не менее, автор "мета-Δ" с завидным упорством продолжает более десятка лет проповедовать идею верховенства данной планиметрической фигуры.

Конечно, трудно что-либо доказывать визави, если он не желает воспринимать различие между конкретным (фиксированным) треугольником с жестко заданными сторонами $\left(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi\right)$ и множеством треугольников с пропорциональным отношением сторон $\left(1:\sqrt{\Phi}:\ \Phi\right)$, допускающих любое масштабирование.

Именно поэтому он множит всё новые и новые мифы.

Например, дается очередной посыл:

«Суть истины открытого знания параметров метатреугольника в том, что оно не отрицает знаний треугольника Кеплера о геометрофизике движения планет Солнечной системы, **а расширил горизонт знаний параметров треугольника Кеплера до математических начал перехода геометрофизики в геометробиологию**. Суть моих разногласий с автором статьи (*С.Л.* – ред.) – в методическом векторе познания всеобщего: мой вектор познания – от общего к частному, а его – от частного к общему».

а) Если и применять патетическую речь рассуждений, то вначале желательно более точно определить обсуждаемый предмет.

На наш взгляд, речь всё-таки идет о *методологии* познания всеобщего, а не о *методике* (не путать с методами), которую ещё никто не написал. За ненадобностью.

б) Треугольник Кеплера – математический объект. Чисто геометрическая фигура. Без специальной привязки к движению планет.

Что он делает, завязнув в переходе между "геометрофизикой" и "геометробиологией" – неизвестным новоявленным направлением в науке, – не ведомо.

в) "Мета-Δ", как частный случай треугольника Кеплера, теоретически не может что-либо отрицать по отношению к своему прародителю. По определению!

г) Автор "мета-Δ" с большим знанием дела часто рассуждает о быках, бодливых и тельных коровах, телятах… В связи с этим небольшая ремарка.

В отличие от непреходящей преемственности частного-общего в многочисленных вариантах-разновидностях треугольника Кеплера, появившийся на свет теленок уже не является частью коровы, как некогда до рождения, когда они составляли целое.

Со временем дополнительные коррективы в общую философию "геометробиологии" вносят мясокомбинаты…

Автор также интересуется, сколько можно вписать в одну и ту же окружность (единичного радиуса – *ред. С.Л.*) прямоугольных треугольников с единичной высотой? – Ответ простой: на каждом диаметре можно вписать четыре таких треугольника, а всего – бесконечное множество.

Примечание. Для построения конкретного треугольника на плоскости достаточно задать три параметра (угловых, метрических), хотя бы один из которых является длиной.

В частности, в работе [4, рис. 12] они присутствуют: прямой угол, высота $h = 1$ и сторона (катет) длиной Φ.

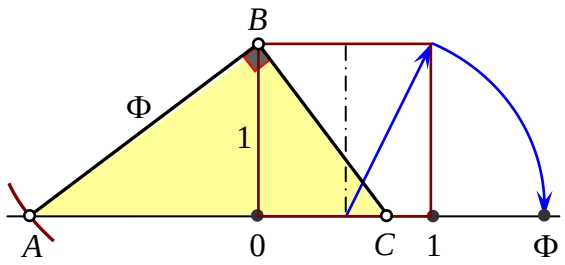
Алгоритм вычерчивания достаточно простой и основан на стандартных геометрических построениях с помощью циркуля и линейки.

Вычисление остальных параметров треугольника – дело техники.

Как задачка школьного курса на знание теоремы Пифагора и подобие треугольников (плюс золотое тождество $\Phi^2 = \Phi + 1$):

- $A0 = \sqrt{\Phi^2 - 1} = \sqrt{\Phi}$;
- высота в прямоугольном треугольнике – среднее геометрическое (пропорциональное) двух сегментов гипотенузы, поэтому $0C = 1/A0 = \sqrt{\phi}$;

- $BC = \sqrt{1+\phi} = \sqrt{\Phi}$;
- $AC = \sqrt{\Phi^2 + \Phi} = \Phi\sqrt{\Phi}$.



Из середины квадрата 1×1 дугой отмечаем константу Φ.
Из точки B радиусом 0Φ отмечаем точку A.
Проводим перпендикуляр $BC \perp AB$.
Искомый Δ-Кеплера ABC готов.

Один из вариантов построение "мета-Δ" со сторонами $\left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$,
как частного случая треугольника Кеплера с единичной высотой

По мнению автора "мета-геометрии", в основе которой лежит один плоский треугольник, работа [4] «исповедует теорию силлогизмов Аристотеля о единичном (кирпичи превращаются в дом), пытаясь применить их и к знаменитому треугольнику И. Кеплера». – Сдается, здесь всё с точностью до наоборот.

Сам автор сначала скрупулезно рисует окружность *единичного* радиуса, а затем строит частный случай треугольника Кеплера с *единичной* высотой.

К слову, сооружение здания из кирпичиков – это задача синтеза. Часто куда более важная и трудная проблема, нежели разбор здания на составные кирпичики, как типичная задача анализа.

Одновременно можно с удовлетворением отметить появившийся прогресс в смене умонастроений. Так, автор мифов признал недееспособность собственноручного «Мифа 3. "Мета-Δ" фрактален и самоподобен».

Теперь оказывается: «Данное его (мета-Δ – *ред. С.Л.*) "двойное" свойство численно не масштабируется при делении высотой на части и умножении его сторон в n раз».

Основные выводы

Золотой прямоугольник Кеплера – понятие новое, хотя вполне ожидаемое и естественное. Отсюда и наше название, как дань уважения памяти великого немецкого астронома-математика древности.

Особых "размышлизмов" и/или других ассоциативных линий пока нет.

Остается кратко подытожить и сформулировать **основные выводы**:

1. Золотой прямоугольник Кеплера – прямоугольник с соотношением сторон $1:\sqrt{\Phi}$.

2. Если в золотом прямоугольнике Кеплера с меньшей стороны выделить подобный прямоугольник, то его диагональ равна большей стороне исходного прямоугольника.

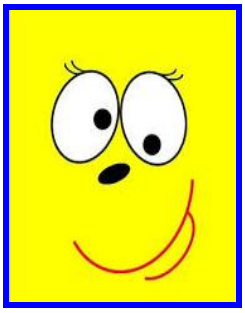
3. При бесконечном спирально-фрактальном делении прямоугольника Кеплера он стягивается в точку (полюс, аттрактор), расположение которой относительно начала координат подобно самому прямоугольнику. То есть координаты полюса (x, y) на плоскости соотносятся как стороны исходного прямоугольника $x/y = \sqrt{\Phi}$.

4. Прямоугольник Кеплер является идеальной самоподобной геометрической фигурой в своем классе, образуя уникальное расположение и единение подобных себе зеркально-расположенных прямоугольников.

Литература:

1. Аракелян Г.Б. Математика и история золотого сечения. – М.: Логос, 2014. – 404 с.
2. Шумихин С. Число Пи. История, длиною в 4000 лет. – М.: Эксмо, 2011. – 192 с.
3. Жуков А.В. Вездесущее число Пи. – М.: Едиториал, 2004. – 216 с.
4. Василенко С.Л. Треугольник Кеплера как объединитель теоремы Пифагора, золотого сечения и современных мифов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22385, 05.08.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163016.htm.
5. Golden_rectangle. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rectangle.

© ВаСиЛенко, д.т.н., 2016
Харьков, Украина



Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html

P.S. *или З.І. по-украински.*

На парижской выставке «Exposition des Arts Incohérents» в 1882 г. поэт Пол Бил представил собственную картину «Битва негров в туннеле» (Combat de nègres dans un tunnel) – в виде черного прямоугольника.

Далее эта тема многократно развивалась разными авторами.

Были аналогичные красные холсты на тему «Уборки урожая помидоров» и т.п.

И только в 1915 г. появилась известная картина «Черный супрематический квадрат» К. Малевича (род. в Киеве).

Главное отличие его предшественников – это юмористический подход к своему "творчеству", без намеков на философию.

В отличие от самого Казимира Малевича, который в духе эстетики русско-украинского футуризма по его же словам не только «преобразился в нуль форм» но и «вышел за нуль к беспредметному творчеству».

Действительно, по сравнению с некогда нашумевшим изречением харьковского мэра «я тебя помножу на ноль» (2012), это звучит куда более экстравагантно…

Резонный вопрос: к чему это? – Да, всё к той же извечной логической дилемме.

О курице – яйце, корове – теленке (по П. Сергиенко)…

А также о большом космическом древе "треугольника Кеплера" (а теперь уже и "золотого прямоугольника Кеплера") и его "метатреугольной" почке.

Гора родила мышь…