Модель золотой пропорции в алгебраических полиномах

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Рассмотрены особенности построения прямых линий пропорционального деления на графиках унитарных полиномов. Высказана гипотеза, что неразрешимость алгебраических уравнений общего вида пятой и большей степени вызвана невозможностью построения линии золотой пропорции на графиках соответствующих полиномов.

Оглавление

Если в какой-то процедуре вы предвидите четыре возможные неприятности и удачно их предотвращаете, тут же быстро появляется пятая.

А.Блох [1, с. 301]

Введение

Ученые и специалисты постепенно свыкаются с мыслью о том, что математическая константа золотого сечения (ЗС) $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ носит фундаментальный характер и проявляет себя при самых неожиданных обстоятельствах.

Речь идет, прежде всего, о безусловном и математически выверенном представлении числа Φ, а не надуманных и часто искусственно "притянутых" приближений-отношений, находящихся в интервале между 1,5 и 2.

Тем не менее, каждое новое присутствие-проявление золотой константы вызывает изумление и неподдельное восхищение не только авторов, но и заинтересованной части научного сообщества.

К немалому удивлению эта математическая структура продолжает эффектно "выплывать" во всей своей красе в самых непредвиденных случаях и приложениях, открывая новые горизонты в познании удивительного феномена.

Мы продолжаем наши исследования в золотоносной сфере последних лет.

В частности, представляет интерес построение прямых линий золотой пропорции на графиках унитарных полиномов (с одной переменной).

Первые проработки на эту тему для моделей четвертой степени выполнены в заметках [2, 3]. Дальнейшее развитие они получили в нашей работе [4].

Настоящая статья посвящена особенностям проявления золотой пропорции в алгебраических полиномах общего вида.

Общие сведения

Кварта-полином является многочленом четной степени, поэтому в общем случае ему свойственен один и тот же предел при стремлении к $\pm$ бесконечности.

Если коэффициент при старшей степени больше нуля, то функция возрастает к + бесконечности с обеих сторон, образуя глобальный минимум.

Полином четвертой степени (кварта-полином *quartic polynom*) имеет одну весьма характерную особенность.

Четвертая степень алгебраических уравнений является наивысшей (критической), при которой существует аналитическое решение общего вида [5] в радикалах, то есть при любых значениях коэффициентов уравнения.

В частности известны решения Декарта–Эйлера, Феррари [6, с. 44–45] и некоторые другие [7, с. 44–45].

Любопытный факт истории. «Глава инквизиции в Испании ("великий инквизитор") Томас Торквемада в 1486 г. отправил на костер испанского математика Вальмеса за утверждение, что он нашел решение уравнения четвертой степени (уравнения, содержащего x^4), которое, как утверждает Торквемада, по воле бога недоступно человеческому разуму. Отметим, что способ решения этих уравнений был найден итальянским математиком Феррари в середине XVI века» [8, с. 24].

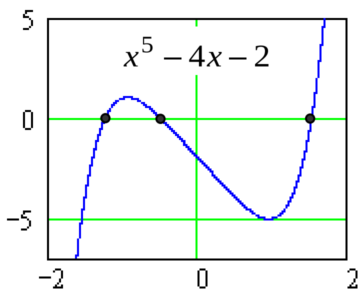
Открытие Абеля

Полное доказательство неразрешимости уравнения 5-й степени получил в 1824 г. молодой норвежский математик Н. Абель (1824).

Затем Э. Галуа (1811–1832) разработал теорию, позволяющую для каждого конкретного уравнения выяснить, разрешимо ли оно в радикалах (В. Прасолов, 2005). Теория Галуа дает единый элегантный подход к решению таких классических задач [9, 10].

«Каково же было удивление всех математиков, когда в 1824 г. вышла в свет работа молодого гениального норвежца Абеля (1802–1829), в которой дано доказательство того, что если коэффициенты уравнения a_1, a_2,…, a_n, считать просто буквами, то не существует *никакого* радикального выражения, составленного из этих коэффициентов, которое было бы корнем соответственного уравнения, если степень его $n \geq 5$. Итак, за три столетия усилия величайших математиков всех стран решить в радикалах уравнение 5-й или высшей степени потому не увенчались успехом, что эта задача просто не имеет решения. Известна такая формула для уравнения 2-й степени; имеются, как мы видели, аналогичные формулы для уравнений 3-й и для уравнений 4-й степени, а уже для уравнения 5-й или более высокой степени никакой такой формулы нет» [11, с. 261].

Теорема Абеля. Ни для какого натурального *n*, большего четырех, нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого уравнения через его коэффициенты при помощи радикалов [12].



Например, в работе [12] обосновывается, что существует конкретное уравнение пятой степени с целыми коэффициентами $x^5 - 4x - 2 = 0$, не разрешимое в радикалах.

В основе лежит доказанное утверждение: если неприводимое уравнение пятой степени разрешимо в радикалах, то оно имеет либо пять, либо только один вещественный корень.

Искомое уравнение имеет три корня, значит, их нельзя выразить в радикалах.

Напомним, что многочлен с коэффициентами, принадлежащими некоторому числовому полю *K*, называется неприводимым над этим полем, если он не раскладывается на два множителя ненулевой степени с коэффициентами из этого поля.

Неприводимые многочлены во многом аналогичны простым числам.

Ещё в конце 18 века К. Гаусс доказал, что при любых коэффициентах алгебраическое уравнение *n*-й степени имеет *n* комплексных корней [13].

Существуют ли формулы, выражающие корни через коэффициенты с помощью четырех арифметических действий и извлечения корней?

Ответ на это дает основная теорема теории Галуа: уравнение $f = 0$ разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда разрешима его группа Галуа $G(f)$.

Здесь ценно то, что группу $G(f)$ можно вычислять, как правило, не зная корней, а только по коэффициентам.

Группа не является разрешимой для $n \geq 5$, поэтому общее уравнение степени $n \geq 5$ не разрешимо в радикалах.

Итак, теорема Абеля (точнее Абеля–Руффини) утверждает, что общее уравнение степени $n \geq 5$ неразрешимо в радикалах.

Иначе говоря, для произвольного уравнения степени больше четвертой невозможно указать решение в виде *закрытой формулы*, содержащей только четыре арифметические операции и радикалы через коэффициенты уравнения.

Например, корни так называемой формы Бринга-Жерара $x^5 - x + 1 = 0$ не выражаются через радикалы [14].

Первая линия золотой пропорции

Разрешимость кварта-уравнений с одновременным наличием в них уникальных свойств золотой пропорции [2–4] вызывает особенный интерес.

Так или иначе, но совокупность этих черт позволяет посмотреть на проблему разрешимости алгебраических уравнений в радикалах несколько под иным углом зрения.

Не исключено, что именно присутствие-отсутствие возможности проведения золотоносной линии через график полинома становится определяющим фактором такой резкой смены качественного формата уравнения.

С его разрешимости на неразрешимость...

Без потери общности рассуждений рассмотрим приведенный или унитарный полином (с одной переменной) четвертого порядка, старший коэффициент которого $k_4 = 1$:

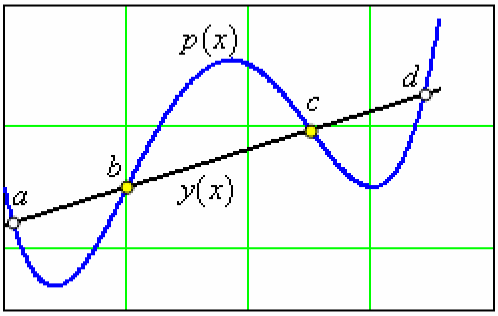
$$p(x) = x^4 + k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0 .$$

Определим вторую производную

$$p''(x) = 12x^2 + 6k_3x + 2k_2 = 12(x-b)(x-c) = 12\left[x^2 - (b+c)x + bc\right].$$

Приравняв её нулю, получаем корни квадратного уравнения

$$b, c = -\mu \mp \Delta,$$



где $\mu = \dfrac{k_3}{4}$, $\Delta = \sqrt{\mu^2 - \dfrac{k_2}{6}}$.

Если подкоренное выражение строго больше нуля или $k_2 < \dfrac{3}{8}k_3^2$, то график исходного полинома $p(x)$ имеет две несовпадающие точки перегиба b, c в которых $p''(x) = 0$, а значит, и три действительных корня.

Путем интегрирования второй производной можно восстановить функцию $p(x)$, но уже в модифицировано-эквивалентной записи, с заменой $k_2, k_3 \to b, c$:

$$p'(x) = 4x^3 - 6(b+c)x^2 + 12bcx + k_1,$$

$$p(x) = x^4 - 2(b+c)x^3 + 6bcx^2 + k_1x + k_0. \qquad (1)$$

Проведем через две точки b, c прямую линию

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{p(c) - p(b)}{c-b}(x-b) + p(b) = \\ &= \frac{\left(-c^4 + 4bc^3\right) - \left(-b^4 + 4cb^3\right)}{c-b}(x-b) + \left(-b^4 + 2cb^3\right) + k_1b + k_0 = \\ &= \left[k_1 - \left(c^3 - 3c^2b - 3cb^2 + b^3\right)\right]x + bc\left(b^2 - 3bc + c^2\right) + k_0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Взяв за основу выражение полинома (1), определим разность двух функций

$$p(x) - y(x) = x^4 - 2(b+c)x^3 + 6bcx^2 + \left(c^3 - 3c^2b - 3cb^2 + b^3\right)x - bc\left(b^2 - 3bc + c^2\right). \qquad (3)$$

Прямая линия $y(x)$ пересекает график полинома $p(x)$ ещё в двух точках a и d так, что $a < b < c < d$.

Разность функций (3) можно также записать в стандартном исполнении с учетом обобщенной теоремы Виета:

$$\begin{aligned} p(x) - y(x) &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = \\ &= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd. \end{aligned} \qquad (4)$$

Сравнение в выражениях (3) и (4) коэффициентов при кубе x^3 приводит к равенству

$$a + d = b + c. \qquad (5)$$

Аналогичное сопоставление свободных коэффициентов дает

$$ad = -b^2 + 3bc - c^2.$$

Таким образом, имеем сумму и произведение двух чисел *a* и *d*, которые по теореме Виета можно воспроизвести в виде корней квадратного уравнения:

$$z^2-(a+d)z+ad \;=\; z^2-(b+c)x-\left(b^2-3bc+c^2\right) \;=\; 0\,.$$

Откуда получаем уникальную взаимосвязь точек (a, b, c, d) через малую ϕ и большую $\Phi=\phi^{-1}$ золотую константу:

$$\begin{cases} d \;=\; \dfrac{b+c-(b-c)\sqrt{5}}{2} \;=\; c\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-b\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \;=\; c\Phi-b\phi\,; \\ a \;=\; \dfrac{b+c+(b-c)\sqrt{5}}{2} \;=\; b\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-c\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \;=\; b\Phi-c\phi\,. \end{cases} \tag{6}$$

После подстановки значений b, c можно записать эквивалентное представление

$$d, a=-\mu \;\pm\; \Delta\sqrt{5}\,.$$

Отметим некоторые очевидные соотношения.

Из (5) следует равенство отрезков:

$$b-a=d-c\,.$$

С учетом тождества $\Phi+\phi=\sqrt{5}$ отношение разностей крайних к средним точкам согласно (6) составляет:

$$\frac{d-a}{c-b} \;=\; \sqrt{5} \;=\; \phi+\Phi\,.$$

Таким образом, прямая $y(x)$, проходящая через две несовпадающие точки перегиба (b, c, если они есть) полинома четвертой степени $p(x)$, формирует симметрично-двойную золотую пропорцию вместе с точками (a, d) пересечения полинома и прямой ($\theta = c - b$):

$$\frac{c-a}{\theta} \;=\; \frac{\theta}{b-a} \;=\; \Phi \;=\; \frac{d-b}{\theta} \;=\; \frac{\theta}{d-c}\,.$$

Частные особенности кварта-модели

Отметим дополнительные частные свойства кварта-модели.

Прямая $y(x)$, проходящая через точки перегиба, будет параллельна оси абсцисс, если в соотношении (2) коэффициент при *x* равен нулю

$$k_1-\left(c^3-3c^2b-3cb^2+b^3\right)=0\,.$$

Отсюда следует соотношение между коэффициентами уравнения

$$k_1=k_3\,\frac{4k_2-k_3^2}{8}\,.$$

Прямая $y(x)$ проходит без вертикального сдвига, то есть через начало координат, если в (2) свободный коэффициент равен нулю $bc\left(b^2-3bc+c^2\right)+k_0=0$ или

$$k_0=\frac{k_2}{12}\left(\frac{5}{3}k_2-\frac{1}{2}k_3^2\right).$$

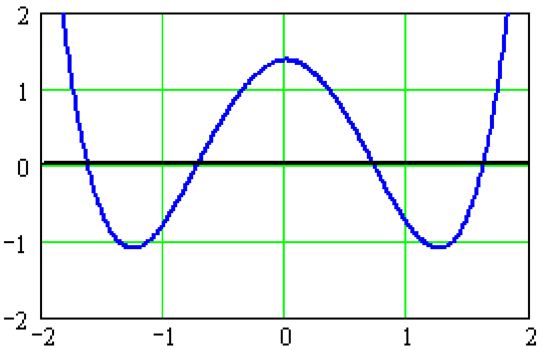
Для обеспечения симметрии полинома относительно оси абсцисс необходимо положить коэффициент $k_3 = 0$, а значит и $k_1 = 0$.

Полином приобретает вид

$$p(x) = x^4 - qx^2 + \frac{5}{36}q^2 .$$

Его вещественные корни равны

$$(a \;\; b \;\; c \;\; d) \;=\; \sqrt{\frac{q}{6}} \cdot \left(-\sqrt{5} \quad -1 \quad 1 \quad \sqrt{5}\right).$$



Можно положить, например $\sqrt{\frac{5q}{6}} = \Phi$, откуда $q = \frac{6}{5}\Phi^2$, и полином становится равным

$$x^4 - \frac{6\Phi^2}{5}x^2 + \frac{\Phi^4}{5}$$

с корнями (они же точки ЗС)

$$(a \;\; b \;\; c \;\; d) \;=\; \left(-\Phi \quad -\frac{\Phi}{\sqrt{5}} \quad \frac{\Phi}{\sqrt{5}} \quad \Phi\right).$$

Заметим, что в этом примере величина $\frac{6\Phi^2}{5} = 3{,}14164\ldots$ Она очень близка к фундаментальной константе $\pi = 3{,}14159\ldots$. После обычного округления происходит совпадение пяти знаков. Хотя это, конечно, обычное совпадение, и не более того.

Вторая линия золотой пропорции

Из вышеприведенных графиков кварта-полинома следует, что на построенной линии двух золотых сечений $y(x)$ посредине находится больший отрезок $c - b = \Phi \cdot (d - c)$.

Очевидно, что выше прямой $y(x)$ можно провести подобную линию с золотыми пропорциями так, чтобы посредине располагался меньший отрезок.

Поскольку и в этом случае два крайних (бóльших) отрезка равны между собой, вторая линия золотого сечения будет параллельна первой, то есть $Y(x) = y(x) + z$.

Кроме того, линия золотого сечения представима в виде равенства (4), согласно обобщенной теореме Виета, со своими точками пересечения $a' < b' < c' < d'$ с графиком исходного полинома.

Собирая воедино все указанные свойства, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} d' - c' = b' - a', \\ \dfrac{d' - b'}{c' - b'} = \dfrac{c' - b'}{d' - c'} = \Phi, \\ a' + b' + c' + d' = k_3, \\ a'b' + a'c' + a'd' + b'c' + b'd' + c'd' = k_2. \end{cases}$$

После выполнения довольно рутинных преобразований установлено, что вторая линия золотого сечения описывается уравнением прямой

$$Y(x) = y(x) + \frac{16}{5}\Delta^4 .$$

То есть первая линия золотого сечения проходит через точки перегиба, вторая – выше первой, с её параллельным переносом на величину $z = \frac{16}{5}\Delta^4$.

Соответствующие точки пересечения второй линии золотого сечения с полиномом четвертой степени имеют следующие абсциссы (координаты на оси x)

$$c', b' \; = \; -\mu \; \pm \; \beta ,$$

$$d', a' \; = \; -\mu \; \pm \; \beta\Phi^3 ,$$

где

$$\beta = \Delta\phi\sqrt{\frac{3}{3+\phi}}, \qquad \mu = \frac{k_3}{4}, \qquad \Delta = \sqrt{\mu^2 - \frac{k_2}{6}}, \qquad \Phi = \phi^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Примеры "золотых" секущих линий

<u>*Пример* 1 (рис. 1)</u>.

Полином $\qquad p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 .$

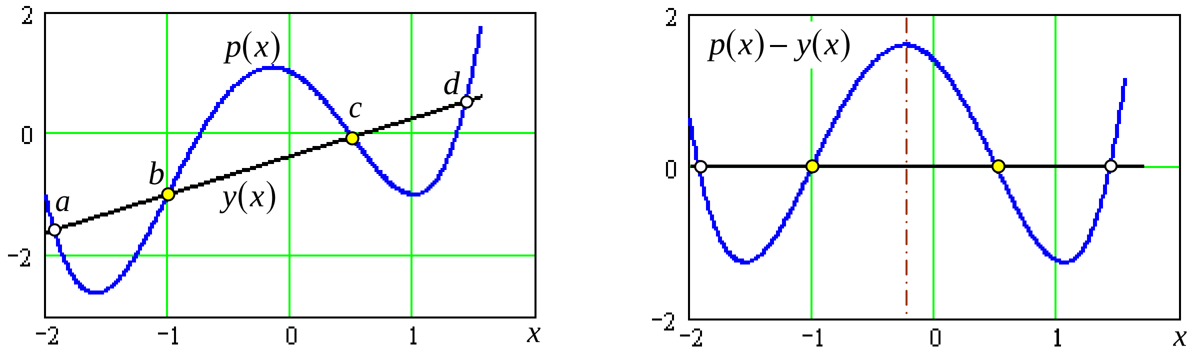


Рис. 1. Характерный пример золотой пропорции на графике полинома четвертой степени

Корни полинома: $\qquad (a \;\; b \;\; c \;\; d) = (-1{,}927.. \;\; -1 \;\; 0{,}5 \;\; 1{,}427..) .$

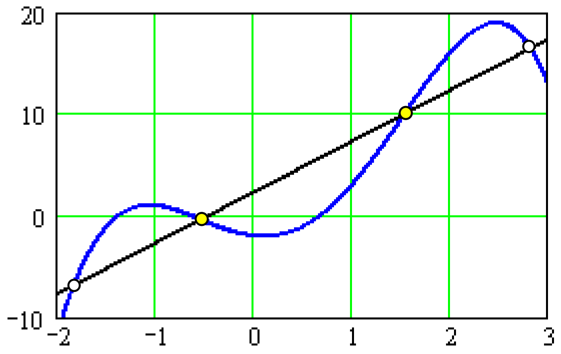
Уравнение секущей $\qquad y(x) = \frac{5}{8}x - \frac{3}{8} .$

<u>*Пример* 2 (рис. 2)</u>.

Полином $\qquad p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2 .$

Корни полинома: $\qquad (a \;\; b \;\; c \;\; d) = (-1{,}827.. \;\; -0{,}541.. \;\; 1{,}541.. \;\; 2{,}827..) .$

Уравнение секущей $y(x)=5x-\dfrac{83}{36}$.



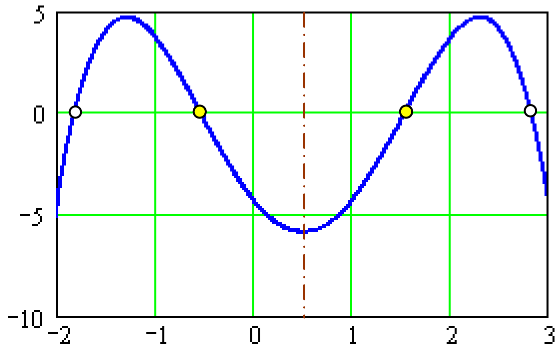


Рис. 2. Золотая пропорция на графике полинома четвертой степени

<u>*Пример*</u> <u>3 (рис. 3)</u>.

Используя тождество $\Phi^2+\phi^2=3$, запишем такой "золотоносный" полином

$$p(x)=\left(x^2-\Phi^2\right)\left(x^2-\phi^2\right)=x^4-3x^2+1$$

с условно нулевой линией золотого сечения, проходящей по оси абсцисс.

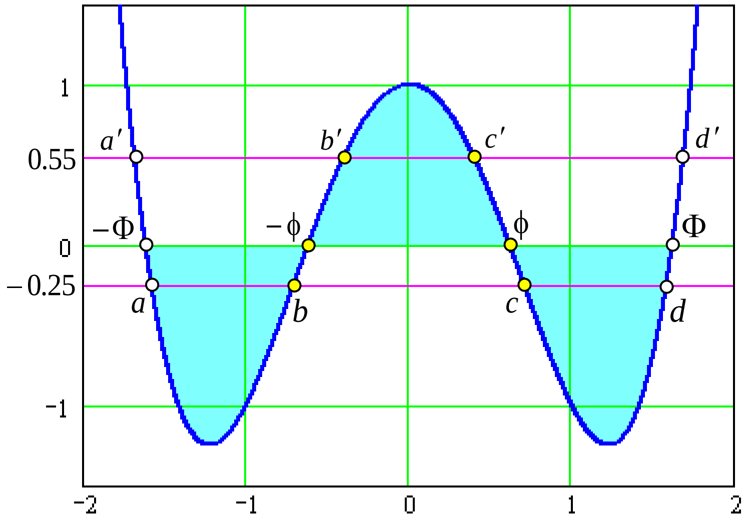


Рис. 3. Линии золотой пропорции для полинома $p(x)=x^4-3x^2+1$

Из равенства нулю второй производной находим характерные точки первой линии ЗС:

$$p''(x)=12x^2-6=0 \;\rightarrow\; c,b \;=\; \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \;\approx\; \pm 0{,}707\,; \quad d,a \;=\; \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \;\approx\; \pm 1{,}581\,.$$

Вторая линия золотой пропорции пересекает исходный полином в точках:

$$c',b' \;=\; \pm\sqrt{\frac{3}{\Phi^6+1}} \;\approx\; \pm 0{,}380; \qquad d',a' \;=\; \pm\sqrt{\frac{3}{\phi^6+1}} \;\approx\; \pm 1{,}686\,.$$

Примечательно, что закрашенные сектора имеют одинаковую площадь, равную 0,8.

Например,

$$\int_{\phi}^{\Phi}\left(x^4-3x^2+1\right)dx=\frac{x^5}{5}-x^3+x\bigg|_{\phi}^{\Phi}=\frac{\Phi^5-\phi^5}{5}-\left(\Phi^3-\phi^3\right)+(\Phi-\phi)=\frac{11}{5}-4+1=-\frac{4}{5}.$$

Полиномы пятой степени

Рассмотрим простой пример полинома пятой степени с целыми корнями (рис. 4).

$$f(x)=(t+2)(t+1)\,t\,(t-1)(t-2)$$

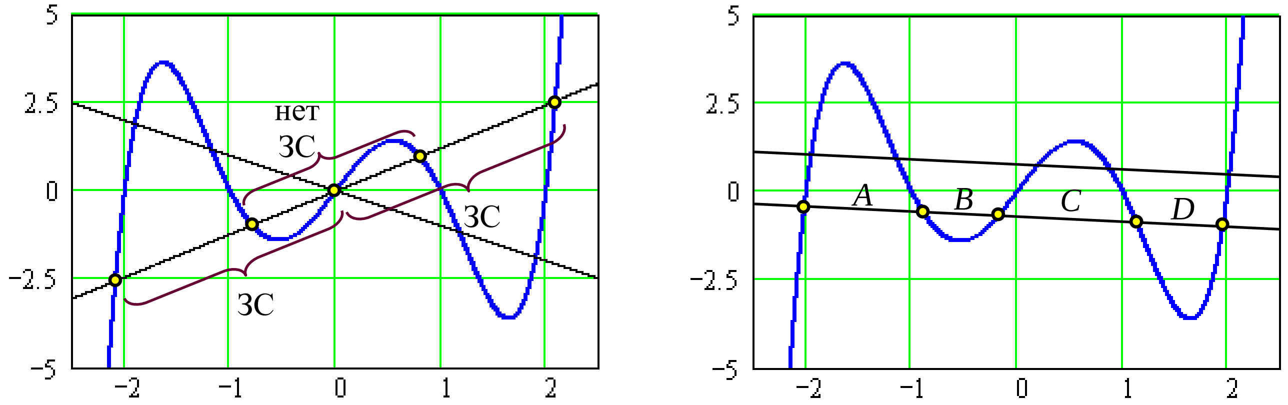


Рис. 4. Характерные линии неполной золотой пропорции для полинома пятой степени

Функция нечетная, то есть $f(-x)=-f(x)$.

Её график симметричен относительно центра координат.

Проведем прямую линию $y(x)=\alpha+\beta x$ так, чтобы она пересекла график в пяти точках x_i, $i=\overline{1,5}$, образуя четыре отрезка (A, B, C, D).

В качестве семи неизвестных переменных выступают: пять точек пересечения полинома с прямой линией и два параметра (α, β) самой линии.

Имеем пять связующих равенств $\alpha+\beta x_i = y(x_i) = f(x_i)$.

Плюс к этому два соотношения золотой пропорции для пар отрезков (A, B) и (C, D):

$$\left|\frac{x_1-x_3}{x_1-x_2}\right|=\left|\frac{x_3-x_5}{x_3-x_4}\right|=\Phi \;\; or \;\; \Phi^2 \qquad \text{или} \qquad \frac{A+B}{A}=\frac{C+D}{C}=\Phi \;\; or \;\; \Phi^2.$$

Третье золотое соотношение, например, для пары отрезков (B, C) становится уже восьмым условием и потому является избыточной.

Одна надежда на чудо, которое, увы, не происходит. Во всех вариантах проведения секущей золотая пропорция для пары (B, C) не наблюдается.

В частности, для прямой линии, проходящей через центр координат, средние отрезки равны между собой $B = C$.

Другой пример полинома пятой степени с целыми коэффициенты, функция которого не является ни четной, ни нечетной, представлен на рис. 5.

Можно провести четыре линии условно-золотой пропорции с возможными последовательными комбинациями малых (*м*) и больших (*б*) отрезков (a, b, c, d).

Как и следовало ожидать, средние отрезки золотую пропорцию не образуют.

Проведем несложное исследование на наличие-отсутствие исходных условий (табл. 1):

- *Сколько надо*? – Для того чтобы отрезки прямой находились в золотой пропорции необходимо выполнить золотое отношение, по меньшей мере, для каждой пары смежных отрезков, то есть требуется $n-2$ условий. Плюс к этому координаты n узловых точек.

Итого нужно реализовать $n-2+n=2\cdot(n-1)$ условий.

- *Сколько есть*? – Определяемыми параметрами являются два коэффициента секущей-прямой и n координат узловых точек – мест пересечения секущей с графиком исходного полинома. Всего $n+2$ параметров.

$$f(x)=(t+2)(t+1)\,t\,(t-2)(t-3)$$

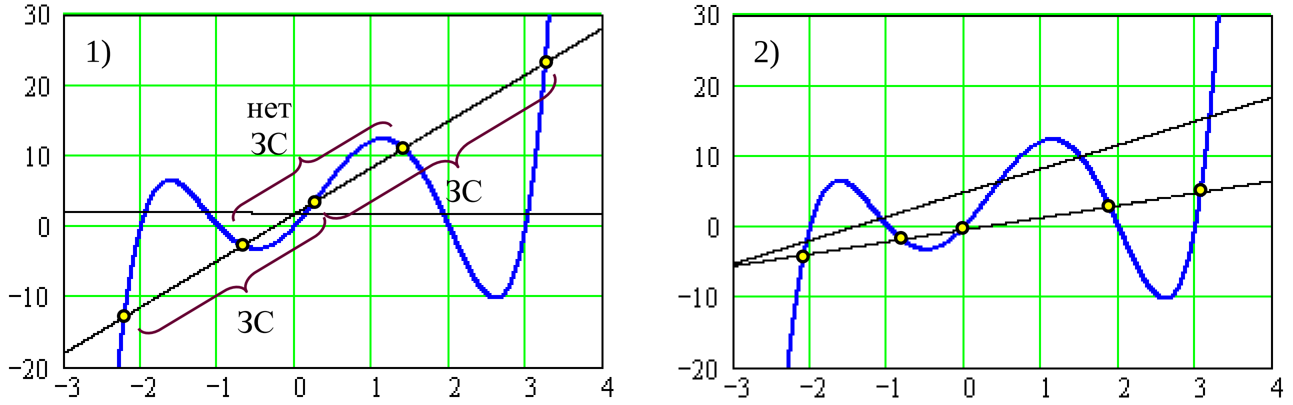


Рис. 5. Линии неполной золотой пропорции для полинома 5-й степени
с чередованием больших (*б*) и малых (*м*) отрезков:

1) (*м, б, б, м*) и (*б, м, м, б*);

2) (*м, б, м, б*) и (*б, м, б, м*).

Таблица 1

Формирование условий для разрешимости задачи проведения золотой секущей на графике полинома

Порядок полинома (число узловых точек), n	Число отрезков на графике полинома, $n-1$	Число определяемых параметров, $n+2$	Число необходимых условий, $2n-2$	Разрешимость задачи
2	1	4	2	Зеленая зона
3	2	5	4	
4	3	6	6	
5	4	7	8	Красная зона
6	5	8	10	

Для однозначной разрешимости задачи мы можем задать столько же исходных условий в виде n равенств $\alpha+\beta x_i = f(x_i)$ и ещё пары условий золотой пропорции.

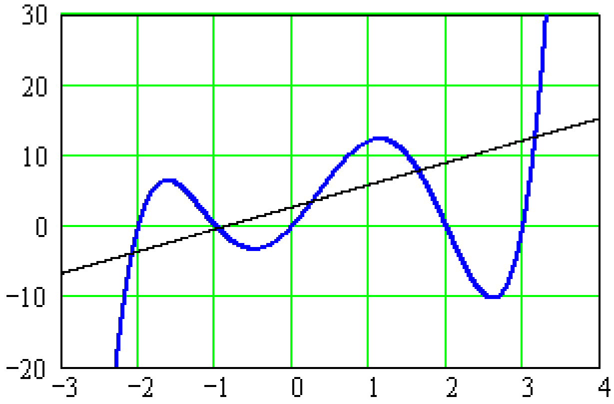
Отсюда получаем основное правило проведения ЗС на графике полинома:

$$2(n-1)\le n+2 \quad \text{или} \quad n\le 4.$$

При $n=3$ имеет место перебор условий, потому линий золотой пропорции бесконечное множество. Но главное, что они есть.

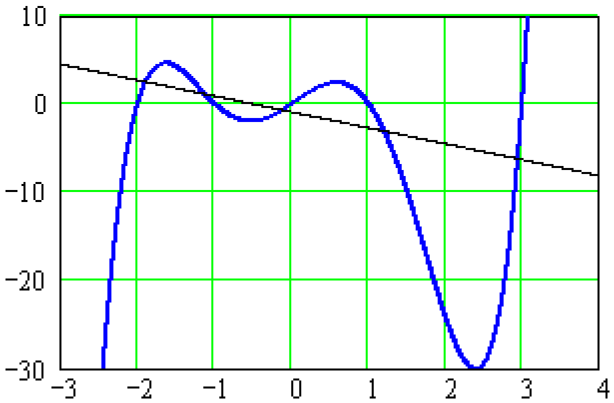
Полином четвертой степени $n=4$ дает оптимальный набор условий, что приводит к двум секущим линиям золотого сечения.

$$f(x)=(t+2)(t+1)\,t\,\underline{(t-2)}(t-3)$$



$$\begin{cases} x_1\approx-2{,}0812 & x_2\approx-0{,}9728 \\ x_3\approx0{,}2606 & x_4\approx1{,}6331 \\ x_5\approx3{,}1603 & q\approx2{,}1127 \\ \alpha\approx2{,}7234 & \beta\approx3{,}1300 \\ A\approx1{,}1085 & B\approx1{,}2334 \\ C\approx1{,}3725 & D\approx1{,}5272 \end{cases}$$

$$f(x)=(t+2)(t+1)\,t\,\underline{(t-1)}(t-3)$$



$$\begin{cases} x_1\approx-1{,}8961 & x_2\approx-1{,}1294 \\ x_3\approx-0{,}1216 & x_4\approx1{,}2030 \\ x_5\approx2{,}9441 & q\approx2{,}3144 \\ \alpha\approx-0{,}9224 & \beta\approx-1{,}8071 \\ A\approx0{,}7667 & B\approx1{,}0077 \\ C\approx1{,}3246 & D\approx1{,}7411 \end{cases}$$

Рис. 7. Примеры секущей полинома пятой степени на отрезки в геометрической прогрессии

При $n\geq5$ имеет место недобор условий, поэтому линия золотой пропорции на графике полинома в общем виде не проводится.

$$f(x)=(t+3)(t+1)\,t\,(t-1)(t-3)$$

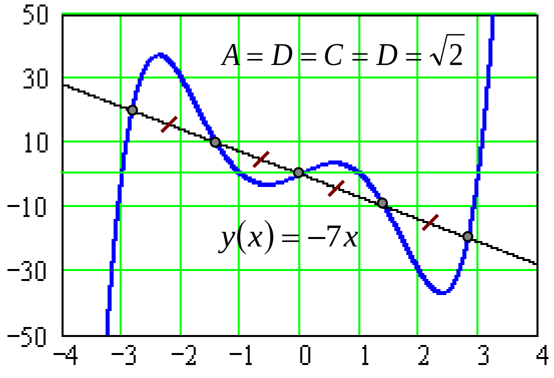


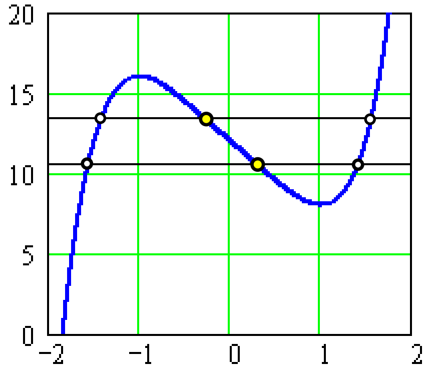
Рис. 8. Сечение нечетной функции пятой степени на равные отрезки

Следует сказать, что пропорциональная секущая на графике полинома всё-таки проводится с геометрической прогрессией её элементов-отрезков $q\neq\Phi$ (рис. 7).

При этом для нечетных функций $f(x)$ знаменатель прогрессии равен единице, то есть характерные отрезки секущей $y(x)$ равны между собой (рис. 8).

В статье [14] приведено одно любопытное уравнение $x^5-5x+12=0$.

Единственное вещественное решение содержит константу ЗС и имеет вид:



$$-x\gamma = \sqrt[5]{(\gamma+\alpha)^2(\beta-\gamma)} + \sqrt[5]{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)^2} + \sqrt[5]{(\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)^2} - \sqrt[5]{(\gamma-\alpha)^2(\beta+\gamma)},$$

где $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\sqrt{2\phi},\ \sqrt{2\Phi},\ \sqrt[4]{5}\right)$.

Можно провести множество линий золотого сечения под различными наклонами к оси x.

В частности, имеются две секущие линии, параллельные оси абсцисс:

$y_1 \approx 10{,}6038$ (–1,5583; 0,2796; 1,4154);

$y_2 \approx 13{,}3962$ (–1,4154; –0,2796; 1,5583).

В скобках даны соответствующие значения аргумента. Как видим, они зеркально симметричны относительно нулевой вертикали x = 0. Причем, y1 + y1 = 24.

Размышлизмы

Итак, кварта-полином четвертой степени $p(x) = x^4 + k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0$ с коэффициентами $k_2 < 3k_3^2/8$ в графическом исполнении обладает двумя несовпадающими точками перегиба, в которых вторая производная равна нулю.

Проходящая через них прямая пересекает полином в общей сложности в четырех точках, образуя три конечных отрезка с золотой пропорцией. Это решение обосновано строго аналитически.

С другой стороны, общее алгебраическое уравнение пятого порядка уже неразрешимо в радикалах. То есть оно не имеет явно выраженной формулы (через коэффициенты), построенной на основе лишь четырех арифметических действий и извлечения корней.

Последнее хорошо изучено и аргументировано математиками.

Существует множество доказательств [15].

Доказано-то да. Причем абсолютно точно.

Но вот что именно на стыке степеней 4–5 заставляет всколыхнуть-сформировать такой качественный скачок (разрешимости–неразрешимости), сдается, до сих пор не до конца осмыслено-изучено.

То есть доказать некое положение, вовсе не означает вскрыть настоящий побудительный мотив или внутренний механизм: почему происходит так, а не иначе.

Анализ формирования возможных линий золотого сечения на графике полиномов разного порядка позволяет высказать утверждение-гипотезу, что первооснова неразрешимости общего уравнения степени $n \geq 5$ взаимообусловлена золотой пропорцией.

А точнее, её отсутствием или возможностью однозначного формирования.

В квадратичной модели линии золотой пропорции вообще нет.

Зато есть частное уравнение $x^2 = x + 1$, генерирующее золотую константу Φ.

Кроме того, парабола всегда симметрична, независимо от сдвига относительно начала координат, что само по себе отражает гармоничное начало.

В кубическом уравнении через точку перегиба можно провести две пересекающиеся линии ЗС, на каждой из которых образуется своя золотая пропорция с соответствующим расположением меньшего отрезка справа или слева от данной точки (рис. 9).

Кварта-полином или полином четвертой степени формирует линию золотого сечения через две точки перегиба с двумя вариантами симметрично-золотой пропорции.

Наконец квинта-модель, как и последующие полиномы (более высоких порядков), не способны образовать единую прямую линию, на которой допустимо создать последовательные линейные отрезки с золотой пропорцией.

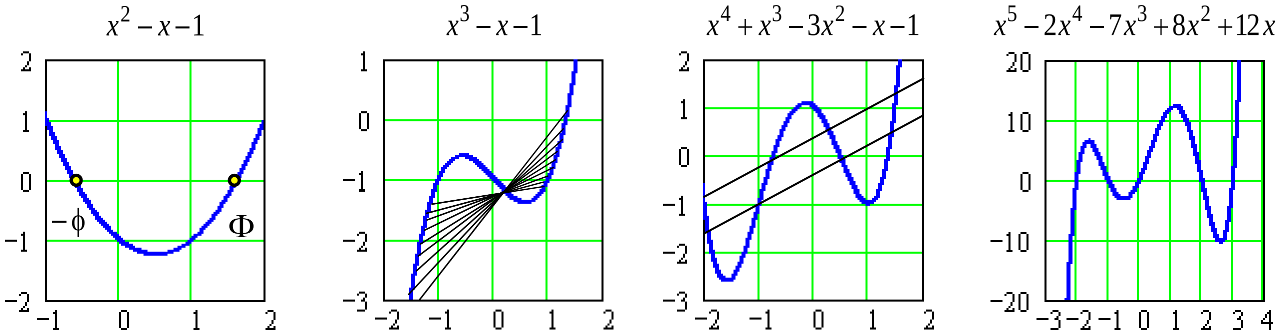


Рис. 9. Модель золотой пропорции в алгебраических полиномах

На наш взгляд, именно это становится одной из первопричин отсутствия решений алгебраических уравнений в радикалах выше четвертой степени.

Хотя *k*-золотое сечение (золотое *k*-разбиение) целого на *k* составные пропорциональные части с константой золотого сечения выполняется достаточно просто [16, 17].

Таким образом, суть озвученного положения сводится к следующему:

отсутствие решения алгебраического уравнения более четвертого порядка в радикалах вызвано потерей гармоничного начала, которое обусловлено невозможностью проведения единой линии (секущей) золотой пропорции на графике полинома.

Это, можно сказать, описательная характеристика выявленной закономерности.

Обоснование, как было показано, достаточное простое.

Конечно, не решенным остается вопрос: насколько золотая пропорция с её гармоничным началом является внутренним причинно-следственным механизмом в разрешимости и структурировании полиномов? – Что наиболее отчетливо проявляется для полиномов четвертого порядка.

Отсюда вырисовывается другая задача настоящей работы, а именно привлечение внимания профессиональных математиков к золотоносной проблематике.

С надеждой, что золотая пропорция со временем займет достойное место в математике и физике будущего [18].

Литература:

1. Блох А. Полное собрание законов Мерфи: Пер с англ. – 4-е изд. – Минск: Попурри, 2008. – 608 с. – URL: http://www.klex.ru/et1.

2. McMullin L., Weeks A. The Golden Ratio and Fourth Degree Polynomials // On-Math Winter 2004-05, Vol. 3, N 2.

3. Bogomolny A. Inflection Points of Fourth Degree Polynomials. – URL: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Calculus/FourthDegree.shtml.

4. Василенко С.Л. Золотые пропорции полинома четвёртой степени (кварта-модель) // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 22.11.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=92&sm=2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 17.12.2012. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12446.html.

5. Quartic function / Wikipedia. – URL: en.wikipedia.org/wiki/Quartic_function.

6. Корн Г, Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров): Пер с англ. – 6-е изд. стер. СПб.: Лань, 2003. – 832 с.
7. Shmakov S.L. A Universal Method of Solving Quartic Equations // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2011, **71,** 251–259.
8. Депман И.Я. Рассказы о математике. – Л.: Детгиз, 1954. – 144 с.
9. Артин Э. Теория Галуа: Пер. с англ. – 2-е изд. стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 66 с.
10. Постников М.М. Теория Галуа. – М.: Физматлит, 1963. – 220 с.
11. Математика, ее содержание, методы и значение. Под ред. Александрова А.Д., Колмогорова А.Н., Лаврентьева М.А. – М.: Изд. Академии наук СССР, 1956; т.1 – 296 с. – URL: edu.alnam.ru/book_math_al_1.php?id=112.
12. Тихомиров В.М. Абель и его великая теорема // Квант. – 2003. – № 1. – С. 11–15.
13. Соловьев Ю. Эварист Галуа // Квант. – 1986. – № 12. – С. 2–8.
14. Quintic equation / Wikipedia. – URL: en.wikipedia.org/wiki/Quintic_equation.
15. Тихомиров В.М., Успенский В.В. Десять доказательств основной теоремы алгебры // Матем. просв., сер. 3. Вып. 1. – М.: МЦНМО, 1997. – С 50–70.
16. Василенко С.Л. Разбиение целого на множество аддитивных пропорциональных частей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22071, 06.05.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162943.htm.
17. Василенко С.Л. Золотое сечение-разбиение целого на множество составных частей // Научно-техн. б-ка SciTecLibrary. – 14.08.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14022.html / Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.08.2014. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=120&sm=2.
18. Смирнов В.С. Золотое сечение – основа математики и физики будущего. Спираль развития Вселенной. – СПб: РИО ГОУИПТ, 2002. – 116 с

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html

P.S. *или З.І. по-украински*.
Для тех, кто моет машину, чтобы вызвать дождь [1, с. 537].
"ВаСиЛенко" – авторский логотип.
Прописные буквы соответствуют ФИО – Василенко Сергей Леонидович.
Понятный и по-своему самобытный образ.