Конечное и бесконечное в модели золотого сечения

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Традиционная модель золотого сечения многогранна в своем проявлении. В силу своих замечательных свойств она удивительным образом сочетает в себе конечные и бесконечные проявления, интерпретации, толкования. Среди них: золотое деление целого на бесконечное число частей, золотое самоподобие и бесконечномерное деление пополам, современные модели и др.

Оглавление

Мир бесконечен, поэтому даже
невозможное событие возможно.

Бесконечность – не предел.

Бесконечное рядом с нами

Прокомментируем в общих чертах эпиграфы.
На первый взгляд, они изначально содержат парадокс.
Однако на поверку это далеко не так.
Дело даже не в художественных образах.

Напомним, что в теории вероятности невозможным называют событие, которое не может произойти в результате эксперимента.

То есть невозможное событие не содержит ни одного элементарного исхода, что соответствует пустому множеству.

Вероятность такого события равна нулю.

Однако обратное неверно. Из нулевого значения вероятности не следует, что данное событие является невозможным в принципе.

Так, событие «монета бесконечное число раз упадет цифрой вверх» имеет нулевую вероятность. Но чисто теоретически оно может произойти.

Такая простая бухгалтерия, как «триумф математики над разумом»...

Чтобы это как-то упорядочить, в вероятностных методах часто вводят дополнительное понятие «*практически* невозможного события».

С научных позиций современного мироощущения подобное не выглядит для нас чем-то необъяснимым и сверхъестественным.

Представление конечного атрибута в бесконечности уже не становится непреодолимой преградой в постижении мироздания.

«Ныне представление о конечности Вселенной не менее законно, чем представление об её бесконечности» [1].

Современная математика и философия позволяют объяснить возможность таких свойств как «конечная бесконечность Вселенной» и отсутствие строгой ориентации.

С другой стороны, «бесконечность – это математическая абстракция, которая не имеет соответствия в реальности. Точно так же в физической реальности не существует математических точек или отрезков с площадью, равной нулю, поскольку любой физический объект, даже самый маленький, имеет длину, ширину и высоту. И даже если одно из этих трех измерений окажется крошечным, оно всё равно не будет равным нулю, поскольку не может быть меньше диаметра атома» [2, с. 83].

Близкий и понятный образ золотого сечения

Притягательность феномена золотого сечения (ЗС) состоит, прежде всего, в его простоте, наглядности и одновременной фундаментальности.

Считать ЗС особой гармонией в широком понимании – вопрос риторический. Скорее всего, из области субъективных вкусов и предпочтений.

Существует великое множество разных пропорций. Золотая пропорция – одна из них.

На свой лад отличительное сопоставление отношений.

По-своему уникальная модель. Оригинальная структура со всех сторон.

Но всё-таки одна из многих.

Золотое сечение – это больше чем обычная задача о пропорциональном делении геометрического отрезка, как изначально ставилась и решалась в "Началах" Евклида.

Тем не менее, основы были заложены именно в античные времена и содержали две основные конфигурации-формулировки:

1) Первая форма связана с отношением и равенством площадей [3, с. 75]:

Предложение 2.11. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

2) Вторая форма известна как задача деления отрезка в крайнем и среднем отношении, с её первым описанием следующим образом:

Определение 3.6. Говорится, что прямая делится в крайнем и среднем отношении, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [3, с. 173].

В работе [4] проанализировано утверждение Евклида в его первозданном виде, который согласуется с остальной геометрией, и представлено наглядным геометрическим способом, оставляя максимальным историчный дух и подход древних греков (рис. 1).

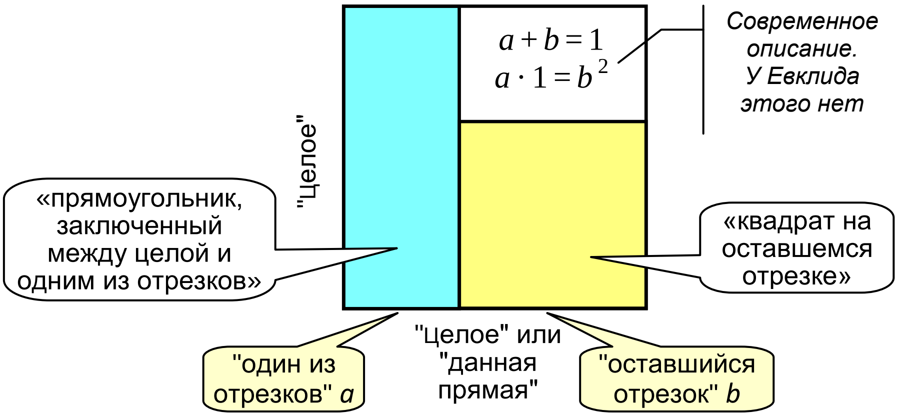


Рис. 1. Геометрическая интерпретация предложения 2.11 Евклида:
«данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке»

Речь не идет о подмене смыслов или фантазировании за древнего ученого. Его слова, геометрические построения и физическая интерпретация облекаются в совершенно адекватную описательную форму.

Исторически константа золотого сечения была увязана с числами Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ... , где каждое последующее число равно сумме двух предыдущих.

С тех пор часто считают, что именно эта последовательность натуральных чисел является источником воспроизведения ЗС.

На самом деле в основе золотой модели лежит двучленно-аддитивная рекурсия

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \tag{1}$$

При любых числах – начальных условиях, которые не равны одновременно нулю, данная рекуррентная форма приводит к золотому аттрактору $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ – в виде предельного отношения соседних членов возрастающей бесконечной последовательности.

Траектория отношения соседних элементов таких последовательностей Фибоначчи (не путать с числами Фибоначчи) с некоторого дискретного момента n является пилообразной.

Однако, на бесконечности, в реально недостижимом пределе, она заканчивает свое существование в аттракторе Φ.

Из-за наличия неустранимого квадратного корня из пяти, число Φ – иррационально.

Это значит, что его нельзя представить в виде конечного десятичного числа.

Золотая константа записывается в виде бесконечной десятичной дроби 1,6180339887...

При этом бесконечная строка десятичных знаков не содержит периодически повторяющихся групп цифр.

Полностью «записать это число практически невозможно, не потому, что оно слишком большое, – оно чуть больше единицы, – а потому, что оно состоит из бесконечного ряда цифр, которые никогда не образуют повторяющуюся группу» [5, с. 9].

Таким образом, число Φ является непериодическим десятичным числом, которое невозможно вычислить до конца [5, с. 24].

Золотоносные образы

Итак, образ ЗС воссоздают не числа Фибоначчи, как частный случай проявления свойств ЗС, а именно двучленно-аддитивная рекурсия. В общем случае с произвольными начальными числами: целыми, рациональными, иррациональными и/или комплексными.

Единственное ограничение: два исходных элемента рекуррентной последовательности не равны одновременно нулю.

Данное дополнение вполне очевидно. – Исходя из здравого смысла, трудно ожидать от сложения двух нулей какого-то сверхъестественного проявления.

Аддитивные слагаемые в рекурсии имеют отличительную особенность в наличии единичных коэффициентов и отсутствии степеней.

Это дает возможность перейти к простому отношению соседних членов рекурсии (последующего – к предшествующему элементу)

$$x = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n},$$

в их предельном значении при $n \to \infty$ в виде простого квадратного уравнения

$$x^2 = x + 1.$$

После деления на x, непосредственно отсюда следует цепная (непрерывная) дробь – простейшая из всех правильных дробей [6–9]:

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}.$$

Данная дробь отвечает бесконечному применению-сочетанию единиц.

Как писал американский прозаик Ричард Бах (Мост через вечность, 1984) «Один плюс один, если только это те единицы, может равняться бесконечности».

Тождественное равенство $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ можно переписать в парно-тринитарной форме

$$1 = \Phi - \Phi^{-1}.$$

Обратим внимание на содержание трех пар одинаковых символов, которые все вместе объединены знаком равенства:

- две единицы;
- две константы Φ;
- два знака "минуса".

В геометрическом плане классическим прообразом золотого сечения является пропорциональное деление конечного линейного отрезка на две части: целое – к большему как большее – к меньшему.

В зависимости от выбора-принятия неизвестной переменной уравнения выходим на три различных решения:

1) – относительно большей части b (отрезка)

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b}, \qquad b^2 = -b + 1, \qquad b = \phi; \qquad z_{n+1} = -z_n + z_{n-1}, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = -\Phi < 0;$$

2) – относительно меньшей части a (отрезка)

$$\frac{1}{1-a}=\frac{1-a}{a},\quad a^2=-b+1,\quad a=\phi^2;\qquad z_{n+1}=3z_n-z_{n-1},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n}=\Phi^2>1;$$

3) – для отношения частей $x=b/a$ (отрезков)

$$x=\frac{1}{b}=\frac{b}{1-b},\quad x^2=x+1,\quad x=\Phi;\qquad z_{n+1}=z_n+z_{n-1},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n}=\Phi.$$

С точки зрения формальных алгебраических представлений всё верно.

Однако лишь в последнем случае геометрически-алгебраическое решение полностью совпадает с рекурсивной моделью.

Первые два варианта дают значения соответственно большей и меньшей частей – положительных величин, меньших единицы для целого = 1. Но рекурсии "не работают" и выводят на внешние решения задачи ЗС, а отрицательные корни – на внешнюю оболочку.

То есть образуется золотое сечение отрезка внешними точками деления, лежащими за пределами делимого отрезка.

Величина $b=\phi$ имеет два характерных описания:

- как метрика, это бо́льшая часть целого;
- как безразмерная характеристика, отношение большей части к целому и/или меньшей части – к большей.

Численно это одно и то же значение.

Квадратное уравнение $x^2=x+1$ или $1=\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2$ в геометрической интерпретации дает разбиение единичного отрезка на два отрезка с длинами $1/x$, $1/x^2$ и пропорциональным отношением Φ. Это алгебраически целое число, как корень алгебраического уравнения общего вида с целыми коэффициентами.

Пространственно-временные аналогии

Аддитивная форма Фибоначчи (1) допускает естественные аналогии-толкования.

Прежде всего, имеют место три наиболее характерные изменения состояния непрерывного перманентного времени (рис. 2).

$$s_{n+1}\quad=\quad s_n\quad+\quad s_{n-1}$$

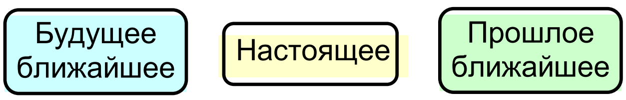


Рис. 2. Временна́я интерпретация аддитивной модели золотой пропорции

Последующее действие рождается-возникает из настоящего по памяти предыдущих действий. Будущее состояние обусловливается текущим состоянием с подключением памяти ближайшего прошлого.

Некая аналогия с законами Мерфи: если сложить темное прошлое со светлым будущим, получится "серое" настоящее.

В образах человеческих сообществ аддитивную модель ЗС можно представить в виде преемственности поколений (рис. 3), когда потомки формируются предками и условными "теперьками".

$$s_{n+1} \quad = \quad s_n \quad + \quad s_{n-1}$$

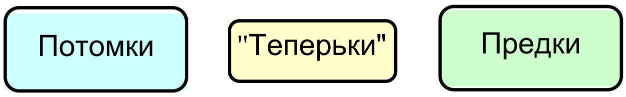


Рис. 3. Преемственность поколений как пример аддитивной модели золотой пропорции

По такой форме продуцируется время или то, что под нм понимает человек.

Первый президент Украинской академии наук, академик В. Вернадский рассматривал проблему времени в современной науке и указывал на его наиболее яркое свойство в виде длительности, называемой им "длением".

Этим термином знаменитый ученый подчеркивал «бренность жизни» и активность живого вещества, которое своим существованием длит время, продолжает его и заставляет течь. «Дление характерно и ярко проявляется в нашем сознании, но его же мы, по-видимому, логически правильно должны переносить и ко всему времени жизни и к бренности атома. Дление – бренность в её проявлении – геометрически выражается полярным вектором, однозначным с временем энтропии, но от него отличным. С исчезновением из нашего представления абсолютного времени Ньютона дление приобретает в выражении времени огромное значение. Грань между психологическим и физическим временем стирается» [10, с. 249].

Величайшее и загадочное превращение «вчера - сегодня - завтра» распространяется практически на всю природу.

Согласно этой же схеме происходят взаимные перетекания энергии и массы в физических процессах.

Подобным образом осуществляется взаимосвязь «масса – время» и/или «информация – время». Только в роли прошлого уже выступает его отдаленный аналог.

Например, реликтовую модель жизни электрона допустимо принять в виде

$$s_{n+1} \ = \ s_n \ + \ s_{n-\infty}\,.$$

Настоящее тоже подвержено модельному изменению.

В частности, время может как бы «не проживаться», замедляя ход. Не случайно триномиальная модель $s_{n+1} \ = \ s_{n-1} \ + \ s_{n-2}$ часто называется моделью с запаздыванием.

То, что искусственно синтезируется в технических системах, находит свое подтверждение в реальных условиях.

Так, медитация сводится к сознательному пропуску моментов настоящего.

Проживает только бестелесная информация, не имеющая энергии и массы, так таковых.

Примерно как сон, когда в основном действуют информационные процессы.

В состоянии анабиоза «настоящее также не проживается».

Информация становится явно выраженным функционалом времени $F(t)$, который в свою очередь является неявной функцией золотого сечения.

Выход из "настоящего" должен особым образом резонировать на минимальное число Пизо – корень характеристического алгебраического уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ или триномиальной модели младших степеней – аналога возвратного (разностного) уравнения.

Линейные комбинации чисел Фибоначчи

Среди своих многочисленных свойств числа Фибоначчи обладают одной примечательной "золотоносной" особенностью, которая практически не освещена в научных публикациях.

Оказывается, какие бы *линейные комбинации конечных взвешенных сумм* из чисел Фибоначчи F_n не составлялись, в последующем процессе *бесконечного применения* рекурсия снова и снова выходит на аттрактор золотого сечения.

То есть для любого конечного набора весовых коэффициентов a_k – целых, рациональных, иррациональных или комплексных чисел, в основе синтезируемых последовательностей типа

$$D_n = \sum_k a_k F_{n-k} \,,$$

по-прежнему, лежит устойчиво-неизменный аттрактор – константа золотого сечения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{D_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,.$$

Доказательство следует из аналитического представления чисел по формуле

$$F_k = \frac{\Phi^k - (-\Phi)^{-k}}{\sqrt{5}}$$

и последующего нахождения пределов, раскрывая неопределенности ∞/∞ по правилу Бернулли–Лопиталя (1696) путем взятия $k-1$ раз производных числителя и знаменателя, в результате чего остается $\Phi/1$.

В этом замечательном свойстве чисел Фибоначчи хорошо просматривается общий принцип суперпозиции (наложения) для линейных систем, когда «реакция системы на любую комбинацию внешних воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий, поданных на систему порознь» [11, с. 25].

Золотой рост

Точка Φ – точка золотого роста единичного отрезка согласно золотой пропорции $\frac{\Phi}{1}=\frac{1}{\phi}$: новое (увеличенное) целое Φ так относится к старому целому 1, как оно – к приращению ϕ.

В результате бесконечного вложения золотого сечения по степеням константы ϕ, мы выходим на финальный "золотой рост" исходного единичного отрезка.

Если провести полуокружность радиусом ϕ из точки-центра 0 (рис. 4), то сразу же получаем "золотой рост" единичного отрезка в абсолютных единицах.

Таким образом, имеет место одинаковый результат, как в алгоритмически бесконечном вложении золотого сечения, так и в одномоментной модели.

В этом состоит дуализм конечной и бесконечной форм синтеза-образования золотой структуры, в основе которой лежит аналитическая связь

$$\phi^{-1} = \Phi = 1+\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \,.$$

Данная связь характерна исключительно для константы золотого сечения.

Отсюда также следует, что ряд степеней золотого сечения обладает замечательным свойством – конечной протяженностью при бесконечном развитии.

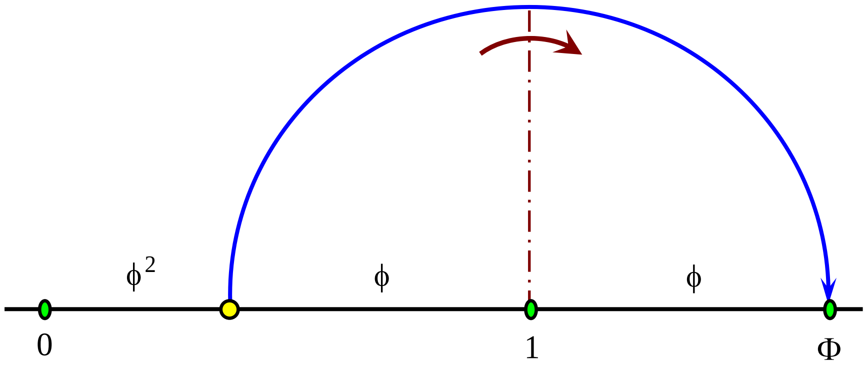


Рис. 4. Одномоментный "золотой рост" единичного отрезка на числовой оси

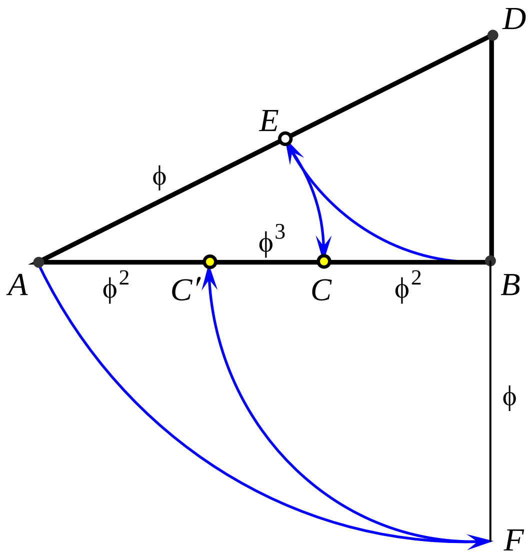
Треугольные построения золотого деления и роста

Существую разные вариации геометрического построения золотого сечения.

1. Один из классических способов золотого деления отрезка единичной длины использует прямоугольный треугольник с катетами 1 и 1/2. Сумма их квадратов является прародителем квадратного корня из пяти – главной иррациональной подосновы численного значения золотой константы Φ.

Далее, как говорится, дело техники и творчества-искусства исследователей.

Отметим, что традиционный способ деления предполагает внутри-трегольное расположение линий построения для определения местоположения золотой точки *C* на евклидовой плоскости (рис. 5).



$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BC'}=\frac{BC'}{AC'};$$

$\overset{\frown}{BD} \to E,\ \overset{\frown}{EA} \to C$ – *внутри-треугольное деление* – наиболее распространенное;

$\overset{\frown}{AD} \to F,\ \overset{\frown}{FB} \to C'$ – *внешне-треугольное деление* – практически не встречается;

– запись $\overset{\frown}{MN}$ обозначает поворот-дугу радиусом MN вокруг точки N

Рис. 5. Деление прямой AB двумя зеркально-симметричными точками золотого сечения $C,\ C'$ с применением прямоугольного треугольника с катетами 1 и 1/2

Не менее эффектным выглядит внешне-тругольное деление, которое в итоге приводит к зеркальному золотому сечению в точке C'.

В определенном смысле оба построения дополняют друг и друга и одновременно противоположны. – Нечто диалектического единства и борьбы противоположностей.

В первом варианте построение начинается поворотом циркуля радиусом меньшего катета на гипотенузу.

Во втором варианте больший катет раствором циркуля переводится на продолжение меньшего катета.

Далее следуют повороты радиусами $EA = FB = \phi$ на единичный катет с фиксацией двух золотых точек C и C'.

2. Рассмотренный пример в его дуальных вариациях относится исключительно к разбиению отрезка. В обоих случаях точки деления являются внутренними. То есть они лежат в пределах расчленяемого единичного отрезка, что отвечает исходному понятию «золотого деления».

Следует сказать, что в этом термине кроется принципиальный недочет-недостаток, который обусловлен некачественным переводом с иностранных языков: немецкого и английского.

Гораздо точнее и лучше вести речь о «золотом отношении» – *golden rotation*.

Такой подход позволяет без особых терминологических дополнений распространить данное отношение частей к наружному окружению, в частности на внешние точки золотого отношения (деления).

Не случайно д.т.н. В.Я. Ярош высказывался, что порожденная и уродливая, на его взгляд, «Школа золотого сечения» фактически вытеснила «Школу золотой пропорции» – *Divina Proportione* Платона.

Действительно, как мы обычно узнаём, что имеет место именно золотое сечение? – Через равенство двух отношений или пропорциональность. Можно говорить и о численном значении. Однако в любом случае в основе ЗС лежит отношение.

Именно поэтому в английской литературе наибольшее распространение получил термин "*gold ratio*" (золотое отношение). В такой транскрипции мы выходим на более широкое понимание кода-генома золотой константы.

Золотое отношение – это не обязательно сечение как задача анализа (деления).

Золотое отношение – это задача синтеза (приумножения).

То есть более универсальное понятие, одинаково распространяющееся в обе стороны масштабирования, что соответствует концепции подобия микро- и макромира. – В их конечном и бесконечном проявлениях.

Так мы приходим к модели золотого роста (рис. 6): единичный отрезок увеличивается в золотом отношении до численного значения, равного Ф [12–14].

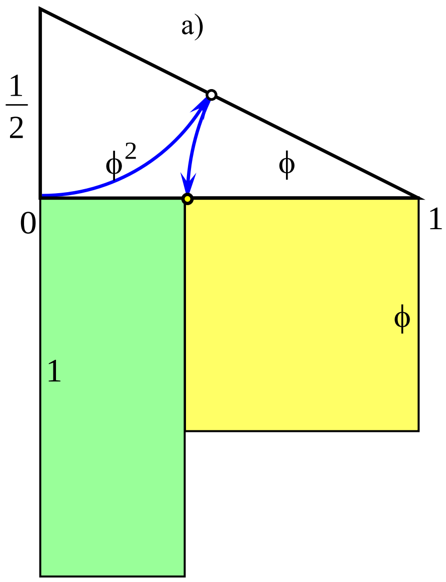
Рисунок 6-б, кроме построения внешней точки золотого сечения, одновременно дает геометрическое построение отрезка длиной Ф.

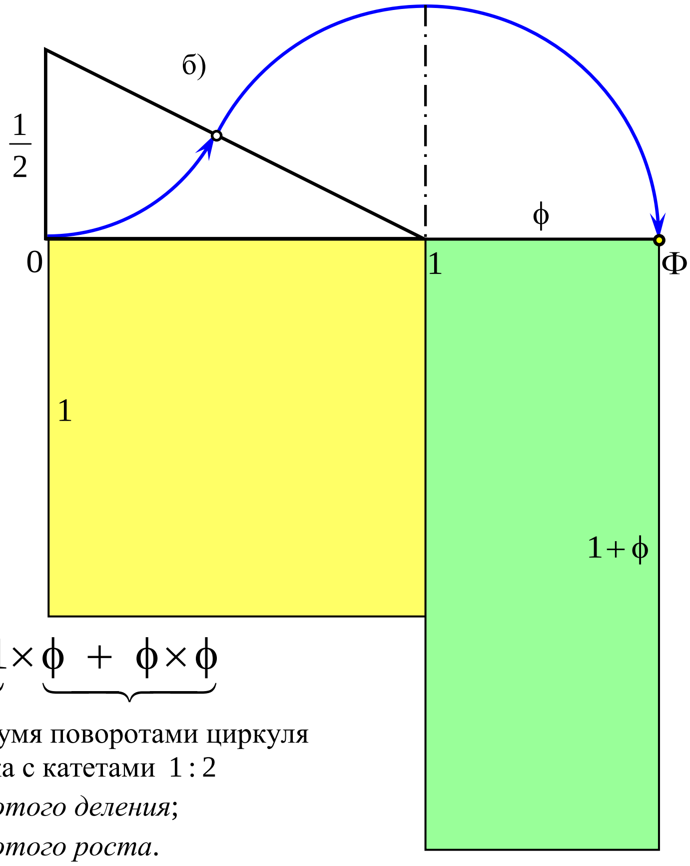
Безразмерная величина Φ – это отношение частей целого и/или целого – к большей части. Метрическая (размерная) величина Φ – это сумма целого и большей части ЗС.

Обратим особое внимание на комплементарную (взаимодополняющую) структуру дульно-триномиальной формы, которая вытекает из золотого тождества $1 = \phi + \phi^2$ в его площадной (прямоугольной) интерпретации:

$$\boxed{\underbrace{1 \cdot 1 = 1}_{1} \;\; \underset{\Leftrightarrow}{\cdot} \;\; \underbrace{\phi + \phi \cdot \phi}_{\phi}}\,.$$

В этой аналитико-геометрической структуре удивительным образом связывается (сочетается) единица с малой золотой константой, образуя красивое и неповторимое единение двух замечательных констант: целой и иррациональной. В их конечном и бесконечном численном представлении.





$$\underbrace{1\times 1}\ =\ 1\times\underbrace{\phi\ +\ \phi\times\phi}$$

Рис. 6. Построение золотого отношения двумя поворотами циркуля
на базе прямоугольного треугольника с катетами $1:2$
а) внутренней точки – модель *золотого деления*;
б) внешней точки – модель *золотого роста*.

Порождение бесконечного ряда

Выберем на числовой оси фиксированный отрезок 01 единичной длины (рис. 7).

Разделим его в золотом отношении $1=\phi+\phi^2$, где $\phi=\left(\sqrt{5}-1\right)/2\approx 0{,}618$.

Проведем полуокружность радиусом ϕ из точки-центра ϕ.

Дуга выйдет за пределы единичного отрезка вправо на величину

$$2\phi-1\ =\ 2\phi-\left(\phi+\phi^2\right)\ =\ \phi-\phi^2\ =\ \phi^3.$$

Сумма двух соседних отрезков ϕ^2 и ϕ^3 также образуют ЗС в точке 1 их сопряжения.

Очертим полуокружность радиусом ϕ^2 из точки-центра 1.

Дуга выйдет за пределы отрезка ϕ^3 на величину ϕ^4, образуя ещё одно золотое сечение.

Аналогичным образом продолжим синтезировать последовательность встроенных окружностей, пока не достигнем некоторой предельной точки.

Обозначив через x сумму геометрической прогрессии – степеней константы ϕ и выполнив простые преобразования, получаем:

$$x=\phi+\phi^2+\phi^3+\phi^4+\ldots\ =\ \phi+\phi\left(\phi+\phi^2+\phi^3+\phi^4+\ldots\right)\ =\ \phi+\phi\cdot x\,.$$

Отсюда находим $x = \dfrac{\phi}{1-\phi} = \dfrac{\phi}{\phi^2} \;=\; \Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618.$

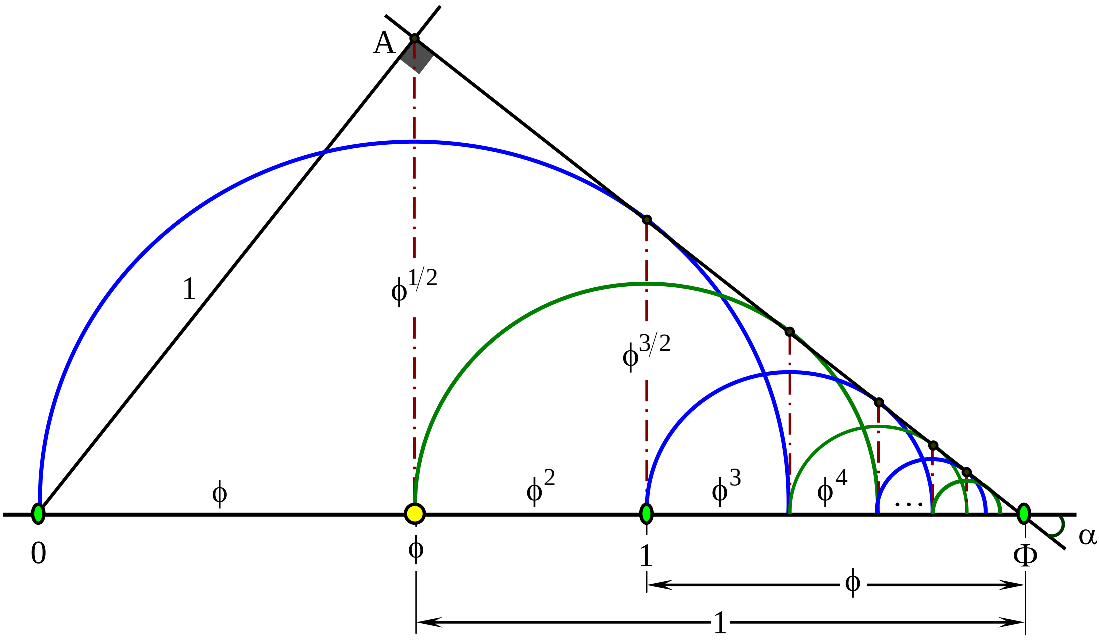


Рис. 7. Бесконечное тиражирование-вложение золотого сечения на числовой оси

То есть "золотая" последовательность встроенных окружностей стягивается в точку Ф.

Подобным построениям В. Шенягин дал удачный термин: "золотые склейки" [39].

Один из популяризаторов золотой тематики В. Лаврус отмечал [15], что Кеплер называл золотую пропорцию *продолжающей саму себя*. Она устроена так, что два младших члена этой нескончаемой пропорции в сумме дают третий член, а любые два последних элемента, если их сложить, дают следующий элемент. Причем та же пропорция сохраняется до бесконечности.

Высота перпендикуляра из точки 1 до касательной АФ по теореме Пифагора равна

$$\sqrt{\phi^2 - \phi^4} = \phi\sqrt{\phi}\,.$$

Аналогично из точки ϕ до касательной – $\phi^{3/2}/\phi = \sqrt{\phi}$.

Угол наклона касательной

$$\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\phi} \;\approx\; 0{,}666 \;\to\; 38{,}172^{\,o}\,.$$

Примечательно, что угол наклона в градусах совпадает с линейной мерой $\phi^2 \approx 0{,}38197$ с точностью почти четырех значащих цифр.

Расстояние 0А составляет $\sqrt{\phi + \phi^2} = 1$. Следовательно, треугольник 0АФ – прямоугольный с геометрической прогрессией сторон $1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$. – Этот *золотой прямоугольный треугольник* впервые описан Кеплером (1571–1630) и носит его имя [16].

Заметим, что все геометрические построения выполнены на основе классического «построения с помощью циркуля и линейки» – раздела евклидовой геометрии, известного с античных времен.

Циркуль и линейка считаются идеальными инструментами, в частности:
– у линейки нет делений, и она имеет только одну сторону бесконечной длины;
– циркуль может чертить окружности произвольного радиуса.

Построение с помощью циркуля и линейки – раздел евклидовой геометрии в задачах на построение с возможными (разрешенными) операциями [1], [URL: http://ru.wikipedia.org/wiki]:

- отмечать (выбирать) произвольную *точку* на плоскости, точку на одной из построенных линий или находить точку пересечения друг с другом уже построенных линий (лучей, отрезков, окружностей, дуг) и использовать ее в дальнейших построениях;
- с помощью *циркуля* проводить окружность с центром в построенной точке с радиусом, равным расстоянию между двух уже построенных точек, а также, установив иглу и стило в две уже построенные точки, не меняя раствора циркуля, переносить иглу в третью уже построенную точку и чертить окружность;
- с помощью *линейки* проводить прямую линию через две построенные точки.

Данный перечень допустимых операций с чисто логической точки зрения в целом произволен. Однако коль скоро он исторически выбран, то уже не меняется.

В частности, несложная по исполнению операция проведения через точку касательной к окружности не входит в перечень разрешенных операций.

Итак, бесконечное тиражирование-вложение золотого сечения на числовой оси привело нас к геометрической "треугольной" аналогии (см. рис. 7)

Обратим особое внимание, что в подобной интерпретации имеется, по меньшей мере, два принципиально различных варианта:

- равнобедренный золотой треугольник с углами $(36^{\circ}, 72^{\circ}, 72^{\circ})$;
- прямоугольный золотой треугольник с соотношением сторон $1:\sqrt{\phi}:\phi$.

Первый из них множится за счет деления углов, второй – путем масштабирования сторон. Например, $(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi)$, $(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi})$ и множество других частных вариаций.

Золотое сечение и окружность

Опишем вокруг квадрата 1×1 полукруг так, чтобы две вершины находились на окружности, а другие две вместе с основанием – на диаметре (рис. 8).

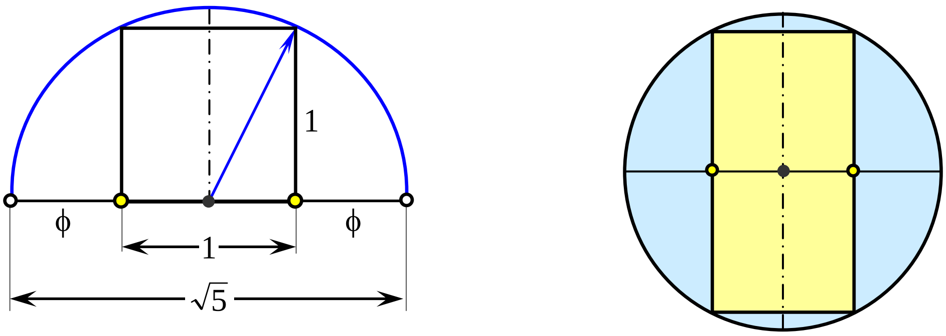


Рис. 8. Вписанный в полукруг квадрат 1×1 и вписанный в окружность прямоугольник 1×2 образуют на диаметре две точки золотого сечения

В результате каждая из вершин квадрата, лежащая на диаметре, становится точкой золотого сечения радиуса: $\Phi = 1 + \phi$, $\sqrt{5} = \Phi + \phi$.

Данный подход распространяется и на весь круг.

То есть прямоугольник 1×2, вписанный в окружность по четырем вершинам, делит её радиусы золотым сечением.

Разные интерпретации золотого прямоугольника

Золотой прямоугольник имеет соотношение сторон $1:\Phi$.

Классическое толкование сводится к тому, что при отрезании-удалении квадрата от данной геометрической фигуры, оставшаяся часть остается золотым прямоугольником, подобным исходному аналогу.

Таким образом, *золотой прямоугольник* – такой прямоугольник, при отрезании от которого квадрата с меньшей стороны или добавлении квадрата с большей стороной образуется прямоугольник, подобный исходному аналогу.

В обоих случаях площади квадратов соотносятся как $1:\Phi^2$.

Теперь возьмем в качестве исходной фигуры квадрат 1×1 с диагональю (рис. 9).

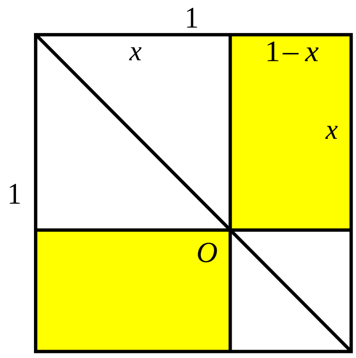


Рис. 9. Образование золотых прямоугольников на базе квадрата

Выделим слева прямоугольник $1\times x$.

Через точку пересечения O проведем горизонталь.

Отрезанный прямоугольник будет подобен нижнему желтому прямоугольнику в одном единственном случае согласно пропорции

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x} \quad\rightarrow\quad x^2+x-1=0 \quad\rightarrow\quad x=\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

В результате такого пропорционального отсечения образуются три подобных золотых прямоугольника, из которых два желтых равны.

Примечательно, что прямоугольник справа от вертикальной линии имеет соотношение сторон $1:\phi^2$ или $1:\Phi^2$.

То есть квадрат делится на два прямоугольника: *золотой* с соотношением сторон $1:\Phi$ и "*квадратично-золотой*" с отношением сторон $1:\Phi^2$.

Продолжим бесконечно отрезать квадраты от каждого следующего золотого прямоугольника, и каждый раз будем проводить в них диагонали.

Все диагонали ложатся на одну из двух основных диагоналей, которые пересекаются под прямым углом в одной и той же предельно-сходящейся точке (рис. 10) с координатами

$$\left(\phi^2;\ \phi\right)/\sqrt{5}\ \approx\ (0{,}171;\ 0{,}276),$$

которые образуют между собой золотое отношение.

Таким образом, диагонали всех прямоугольников перпендикулярны.

Место их пересечения вполне допустимо сравнить с некой «геометрической черной дырой, точкой притяжения, куда уходит бесконечная последовательность "золотых" прямоугольников» [5, с. 58].

Центры квадратов и/или точки сопряжения образуют золотую спираль.

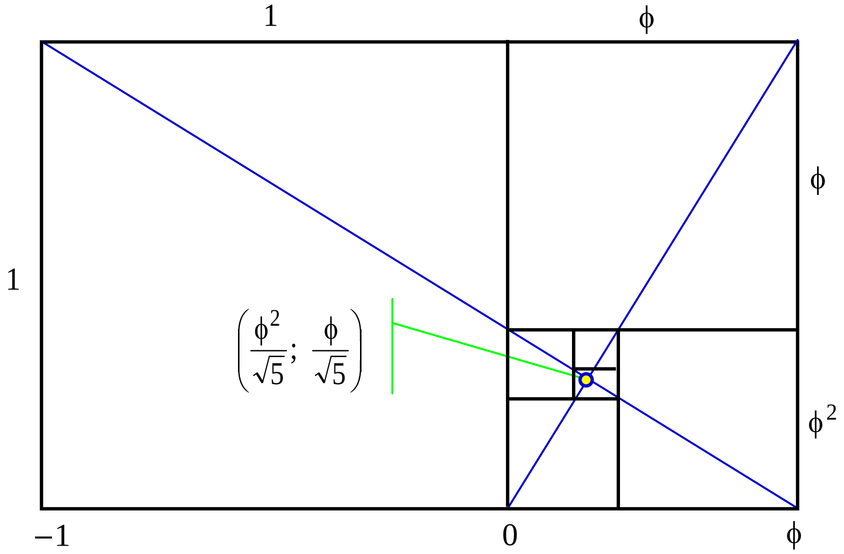


Рис. 10. Схождение бесконечной последовательности золотых прямокгольников в точку притяжения – геометрически черную дыру

В нашей работе [17] подобные построения рассмотрены в терминологии "0-мега-золотого треугольника" с катетами Ф:1 – такого, что при уменьшении большого катета на величину меньшего катета отношение между ними не изменяется (рис. 11). Хотя мы не относим себя к адептам словесных усилений типа мега-, ультра- и т.п. В данном случае приставка терпима, поскольку среди всех треугольников уже выделен "золотой".

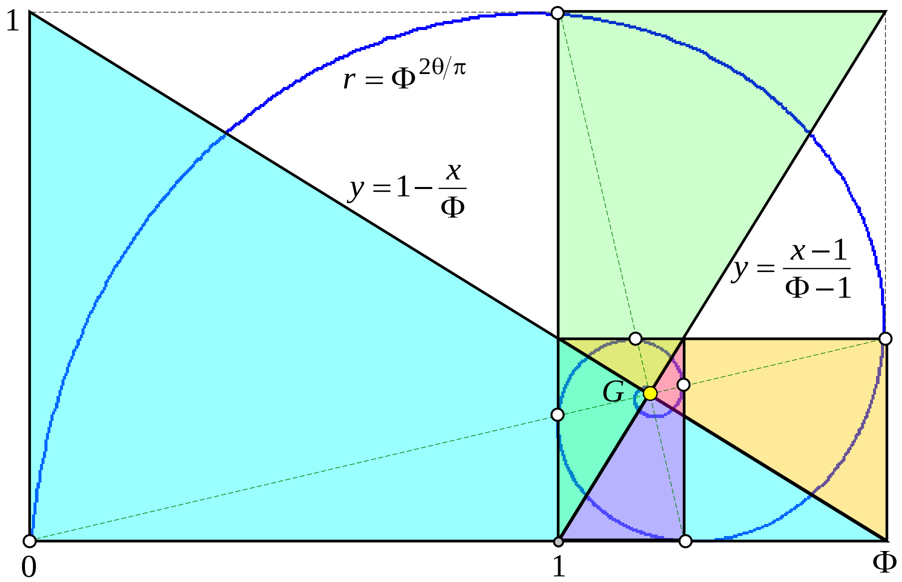


Рис. 11. Последовательное урезание "0-мега-золотого треугольника" и совмещённая с ними золотая логарифмическая спираль

Гипотенузы пересекаются под прямым углом [18, с. 240–242], образуя полюс вращения

$$G(x_0,\ y_0)\ \Rightarrow\ \left(\frac{1+\phi^2}{\sqrt{5}},\ \frac{\phi}{\sqrt{5}}\right) \approx (1.171,\ 0.276).$$

Логарифмическая спираль для "0-мега-золотых треугольников" определяется простой формулой $r = \Phi^{2\theta/\pi}$, где r – радиус-вектор точки, θ – угол отклонения точки от нуля [19].

Логарифмическая спираль соприкасается с меньшими катетами, образуя прямой угол с большими катетами.

От толкования квадратичной модели к кубической...

Золотые фигуры треугольника и прямоугольника на евклидовой плоскости выглядят вполне естественно и органично. Подобные планиметрические построения моделей третьего порядка становятся проблематичными. Тем значительным становится интерес геометрической интерпретация кубического уравнения [20, с. 51]. Причем с любопытным терминологическим окрашиванием – в "сверхзолотой" вариант.

В некотором прямоугольнике проведем вертикальную линию, а из точки её пересечения O с диагональю – горизонтальный отрезок (рис. 12).

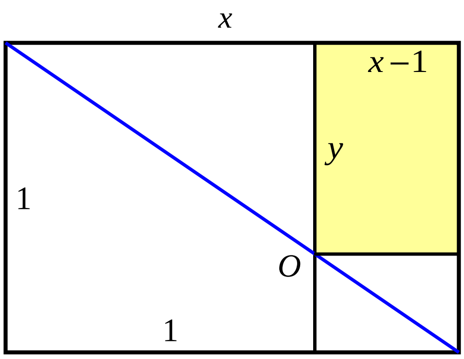


Рис. 12. Геометрия "сверхзолотого" прямоугольника

В любом прямоугольнике $x \times 1$ выполняется пропорция $\frac{y}{1} = \frac{1}{x}$ или $xy = 1$.

"Сверхзолотой" прямоугольник (желтого цвета) получается, если он пропорционален исходному прямоугольнику, то есть $\frac{x-1}{y} = \frac{1}{x}$ или $x^3 = x^2 + 1$, – с одним положительным корнем $\psi = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{29}{2}\right) + \frac{1}{3} \approx 1{,}4656$ – аттрактором "коровьей" последовательности $z_n = z_{n-1} + z_{n-3}$ согласно общей триномиальной модели старших степеней [21].

В общем виде любому прямоугольнику можно от диагонали образовать подобный.

Но только один из них способен при этом отрезать квадрат, и нужное решение исходит из уравнения $x^3 = x^2 + 1$.

Эквивалентные рекурсии имеют вид:

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2} = 2z_{n-2} + z_{n-3} \text{ – "кролики";}$$

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-3} \text{ – "коровы".}$$

Кстати, "коровья" модельная интерпретация – более реалистична, чем вечно живущие кролики Фибоначчи, ибо предполагает естественное отмирание особей, начиная с пятого подуровня предков

$$z_n = (z_{n-1} + z_{n-2}) - z_{n-5}, \quad n \ge 5.$$

Дальнейшее геометрическое представление триномиальных моделей старших степеней вида $x^{m+1} = x^m + 1$ натыкается на серьезные трудности. Возникает также необходимость привлечения численных методов для поиска вещественных корней.

Так что отношение-сопоставление "конечного – бесконечного" в данном случае остается в пользу первого...

Резонатор Пизо

Уже много лет мы пытаемся разрешить-описать способ повышения жизненного тонуса (лечения) методом рациональных квантований золотого сечения.

Интуиция подсказывает реалистичность выбранного пути-подхода. Однако не достает научных экспериментов, теоретических и практических обоснований.

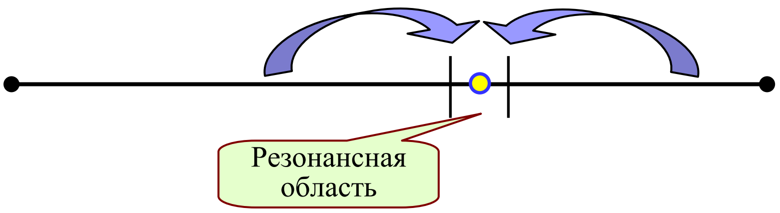
Ключевой лейтмотив. Организм человека в процессе биологического старения стремится в своей физической идеализации на основе безукоризненного в своей точности золотого сечения, где практически не остается места живому.

Резонансная область работает как засасывающая воронка. Похожий образ – модель черной дыры в астрофизике.

Прообразом черной дыры здесь выступает своего рода «локальный золотой пылесос».

Задача предполагаемого "золотого модулятора" или резонатора Пизо – расшатать-расшевелить ситуацию, перенастроив человеческий организм на меньшие числа Фибоначчи, выводящие его за пределы смертельно-резонансной области, включающей золотое сечение.

Тем самым происходит поддержка или расширение диапазона устойчивости.



Можно предложить разнообразные формы физической реализации на базе псевдозолотого сечения, включая частотный модулятор, амплитудный модулятор и т.п.

В основу полагаются периодически повторяемые отношения чисел Фибоначчи.

Первые пробы-прикидки теоретического обоснования изложены, в частности в нашей работе [22], где сформулирован принцип деления пополам на основе золотого сечения.

Совместное рассмотрение равномерного растяжения объекта в противоположные стороны приводит к модели удвоения целого согласно золотой пропорции, как прототипу роста и последующего деления биологической клетки пополам.

Высказана гипотеза, что главное предначертание золотого сечения – быть геномом-кирпичиком в строении, формировании и развитии живых объектов, внося только ему свойственный динамизм в ассиметричную симметрию живого.

Главная задача – заставить организм "понять" и "воспринять" внешние воздействия, выводящие его за пределы границ опасно-резонансной золотоносной области. То есть следует обеспечить идентификацию и узнаваемость посылаемых сигналов извне.

Безусловно, необходим также определенный психологический настрой. Человек должен понимать-воспринимать «анализ алгеброй гармонии».

Условно говоря, «поверил алгеброй гармонии» и ввел в определенное состояние.

Отсюда, в частности, следует и понятное размежевание подходов в гармонии:

– гармония ЗС как лад и соразмерность составляющих;
– гармония ЗС как некая субъективная красота, которая вовсе не обязательна.

За неимением достоверного фактического материала, воспользуемся принципом аналогии, проведя дополнительные параллели.

Золотое сечение (ЗС) является феноменом хотя бы потому, что одна «золотая часть» научного и культурного сообщества его не воспринимает и не видит, как говорится "в упор". Другая не менее «золотая часть» творческих людей наоборот возвеличивает ЗС, фетишизируя до уровня божественного проявления.

Такое разно-полярное суждение не только естественно необходимо, но и самодостаточно, подчеркивая самую суть ЗС, уравновешивая противоположные образы-суждения в особом промежутке пропорционального равновесия.

В точке, где достигается абсолютная согласованность неравных величин через их пропорциональные отношения. Как мыслительно-гипотетическая точка.

Она существует для любого объекта или конечной совокупности предметов. Хотя в реальности может себя явно не проявлять.

Более того, её идеальное достижение при определенном стечении условий-обстоятельств может означать нарушение системных связей и разрушение объекта как такового. Или момент бифуркации, если речь идет о развитии некоего процесса с равновероятностным выбором неравнозначных линий.

Если физический вакуум принять условной мерой равенства в проявлении системного отношения «хаоса – порядка», то золотое отношение допустимо характеризовать как предельное динамическое равновесие этих категорий-состояний.

Попадание человеческого организма в резонансную область и приведение в состояние золотой пропорции означает для него «выход в вакуум» (в народе говорят "вышел в тираж") и далее физическую смерть.

Остается тешиться мыслью, что «наступая в будущем, смерть оставляет человека в прошлом, – на всю оставшуюся жизнь» (С. Василенко). – Не на этом ли посыле зиждется религиозная вера-идея вечной жизни?…

Такой себе "симбиоз" (сочетание, сожительство) конечного и бесконечного в модельно-золотоносной концепции человеческого бытия.

От исходной пропорции к очевидности золотого отношения

Математическая пропорция по определению предполагает наличие-равенство двух отношений, составленных из четырех величин-переменных $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}$.

Деление целого, условно принятого равным 1, на две аддитивные части дает нам три объекта $\{1, a, b\}$.

Чтобы из них составить физически разрешимую пропорцию, необходимо уравнять какие-либо два объекта x_i в исходной пропорции.

Нетривиальных вариантов здесь оказывается всего два.

В одном случае приходим к обычному делению пополам $a=b,$ которое вытекает из частного проявления пропорции $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$.

Другая возможная вариация дает нам не менее простое членение – золотое сечение $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ b=a^2$ согласно золотой пропорции $\frac{1}{a}=\frac{a}{b}$.

Аналогично для зеркального отображения $\frac{1}{b} = \frac{b}{a}$.

Рассмотрение основных вариантов-комбинаций (а их пять) составления математической пропорции с целым 1 и его аддитивными частями $a + b = 1$ убеждают, что золотая пропорция – практически единственна и безальтернативна [23]. Не считая обычного деления пополам $1 : a = 1 : b$.

То есть модель ЗС совершенно естественна в своём образовании. Потому и была предметом изучения ещё античных учёных...

Таким образом, **в абстрактно-формализованном аспекте золотое отношение двух неравных частей целого по своей сути – элементарная в построении и единственно возможная между ними взаимосвязь**.

Вероятно, именно из-за своей единственности-уникальности золотой пропорции здесь допустим сравнительный образ древних о проявления некой божественности. Дело лишь за терминологическими смыслами-проявлениями.

При этом важным остается суждение: не забывать о самоочевидности появления-построения золотой пропорции.

Она уникальна не столько в своей необычности, сколько в практически исключительной безальтернативной своего построения.

В том числе последовательного построения, мотивированного математическими единицами в виде бесконечной цепной (непрерывной) дроби

$$\Phi \ = \ 1 + \frac{1}{\Phi} \ = \ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

и/или бесконечно-встроенного радикала

$$\Phi \ = \ \sqrt{1 + \Phi} \ = \ \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}} \ .$$

Золотое деление целого на бесконечное число частей

В работах [24, 25] предложена общая форма деления целого на несколько аддитивных пропорциональных частей. Получены простые аналитические соотношения для вычисления составных частей целого.

Наибольшая часть целого, равного единице и составленного из k аддитивных частей $v_1 + v_2 + \ldots + v_k = 1$, где $v_n = v_1 q^{n-1}$, равна

$$a_k = \frac{1-q}{1-q^k} \, .$$

"Крайние" случаи деления единичного целого на минимальное $k = 2$ и бесконечное $k \to \infty$ число частей дают соответствующие значения: $a_2 = (1+q)^{-1}$, $a_\infty = 1 - q$.

Примечательно, что сумма данных величин равна единице $a_2 + a_\infty = 1$ <u>исключительно для константы золотого сечения</u>:

$$(1+q)^{-1} + 1 - q \ = \ 1 \qquad \to \qquad q^2 + q - 1 = 0 \qquad \to \qquad q \ = \ \phi \ = \ \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \, .$$

Наибольшая часть k-золотого сечения $q=\phi$ изменяется от $a_2=\phi$ до $a_\infty=\phi^2$ при золотом делении единичного целого соответственно на две части и бесконечное (в пределе) количество частей.

Так, мы приходим к новой интерпретации классического золотого сечения:

$$\underline{\phi+\phi^2 \;=\; 1 \;=\; a_2+a_\infty}\,.$$

То есть, две части обычного золотого сечения отрезка единичной длины равны бо́льшим частям при его k-золотом делении соответственно на $k=2$ и $k\to\infty$ части (рис. 13). Как единение конечного и бесконечного проявления в модели ЗС.

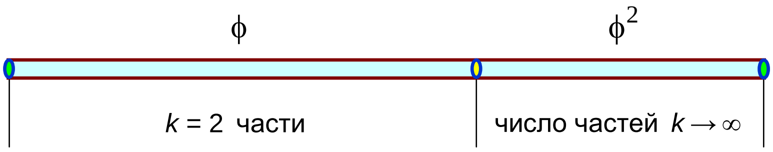


Рис. 13. Максимальные отрезки
в золотом сечении единичного отрезка

Другими словами, меньшая часть классического золотого сечения на две пропорциональные части становится наибольшей частью в аналогичной задаче деления на бесконечное $k\to\infty$ число частей.

Во многом это обусловлено симметричностью предельного значения знаменателя, что характерно именно и исключительно для золотой константы $\phi^2+\phi^3+\ldots=1$:

$$\lim_{k\to\infty}\ \frac{1}{1+\phi+\phi^2+\ldots+\phi^k} \;=\; \frac{1}{1\;+\;\phi\;+\;1}.$$

Золотое самоподобие и бесконечномерное деление пополам

«Золотому сечению посвящено много статей и книг. Для демонстрации его красоты обычно приводят ряд простых построений из геометрии, различные субъективно-эстетические и философские аргументы. Иногда вспоминают, что его разложение в цепную дробь состоит только из единиц.

Однако в научно-популярной литературе практически отсутствует описание трех важных характеристик, демонстрирующих абсолютную уникальность и истинную красоту константы Ф в мире чисел.

Во-первых, Ф входит в определение конечных групп Кокстера H_2, H_3, H_4, которые напрямую связаны с квазикристаллами, содержащими локальные оси симметрии 5 и 10-го порядков или икосаэдрические структуры. Хотя H_2 имеет обобщение на правильные многоугольники на плоскости, ассоциированные с другими иррациональными числами, никаких других аналогов групп H_3, H_4 нет.

Во-вторых, Ф – есть специфическое число, вокруг которого скапливается бесконечное количество чисел Пизо – важного подкласса алгебраических целых больше единицы, для которых другие решения определяющего уравнения лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.

В-третьих, Ф – есть минимальный представитель подкласса чисел Пизо, для которых все корни определяющего алгебраического уравнения действительны.

Перечисленные свойства раскрывают глубокую симметрию, заложенную в числе Ф, и дают законное право этому числу оказаться характерной шкалой растяжения для процессов, идущих по самоподобной схеме в силу каких-либо внешних условий» [26].

Золотоносно-самоподобные структуры, в частности, нашли применение в оптике [27].

Развитие современных моделей

Золотое сечение – это больше чем задача о пропорциональном делении геометрического отрезка. Или аттрактор наиболее простой двучленно-аддитивной рекурсии, берущей начало от чисел Фибоначчи.

Золотое сечение – это признак симметрии пятого порядка с её реализацией в виде правильного пятиугольника и характерным проявлением в живых системах.

Золотое сечение – это развитие новых современных моделей:

- круговая модель золотого отношения отрезков переменной ломаной линии [28];
- матричные модели золотого сечения [29];
- модель структурного роста [13];
- игровая алгоритмическая модель образования Вселенной модель или "сотворения мира" и ядро генома мироздания [30, 31];
- модель мгновенного времени плюс бесконечные проявления "золотого времени" на часовых циферблатах [32];
- модель конусной упаковки бесконечного евклидова пространства [33];
- центр масс однородных тел с самоподобными вырезами [34] и др.

Отметим, в работе [28] речь де-факто идет не о множестве разных "золотых сечений", которое в математике одно и равно Ф, а его конкретных проявлениях для разных конфигураций сопряженных отрезков на плоскости. Что, конечно, не одно и то же.

Вместо заключения

По мере разработки золотоносной тематики в её конечном и бесконечном проявлениях, вспомнилась одна дискуссионная реплика с её императивом, будто верной терминологии отвечает только «божественная пропорция» – возвышенная аллегория монаха 15 века Луки Пачоли. А древним грекам «знаний не хватало – ни языка, ни арифметики, …и знания можно понять только на языке науки – русском языке» [35].

Другой автор предлагает собственный математический алгоритм решения задачи – предложения II.11 Евклида согласно русскому проекту [36].

Тем самым математическое описание золотого сечения наделяют не свойственными ему этническими и религиозными признаками. На наш взгляд, этот вектор ведет только к инволюции золотоносной проблематики с ориентацией на философию изоляционизма.

На сегодня нет оснований отказываться от привычного и понятного в математике термина "золотой пропорции (сечения)".

А также их различных производных: золотое число, золотой прямоугольник, золотоносный треугольник и даже золотой двуугольник [37].

Данные положения прочно вошли в теорию и практику прикладной математики.

Они легко идентифицируются и воспринимаются без дополнительных слов-эпитетов независимо от языка, вероисповедания и/или частных умонастроений.

И время над ними, похоже, не властно...

Как порождение конечной золотой константы Ф в бесконечной двучленно-аддитивной рекурсии Фибоначчи.

Эти знания удобопонятны на любом земном наречии, ибо в их основе лежит четкий и гармоничный язык математики.

Язык, который удивительным образом сочетает способность адекватного представления-описания конечных и бесконечных форм-образований.

С надеждой-поправкой, что золотое сечение со временем займет достойное место в математике и физике будущего [38].

Литература:

1. Успенский В.А. Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый Мир. – 2007. – № 11-12.
2. Мир математики: в 45 т. Т. 41 / Густаво Пиньейро. Шар бесконечного объема. Парадоксы измерения: Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.
3. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
4. Василенко С.Л. "Золотой разговор" с Евклидом // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.
5. Мир математики: в 40 т. Т. 1: Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты: Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.
6. Арнольд В.И. Цепные дроби / Б-ка «Математическое просвещение». – М.: МЦНМО, 2001. – Вып. 14.
7. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1972.
8. Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. – М.: Высшая школа, 2000.
9. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978.
10. Вернадский В.И. Философские мысли натуралиста. – М.: Наука, 1988. – 520 с.
11. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – 4-изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2016. – 560 с.
12. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.
13. Василенко С.Л., Никитин А.В. Модельные структуры пропорционального роста. Часть 1. Синтез // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=107&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 22.09.2013. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13091.html.
14. Василенко С.Л. Золотое отношение как основа синтеза и созидания // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 19.11.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14289.html.
15. Лаврус В. Золотое сечение. – 2000. – URL: http://n-t.ru/tp/iz/zs.htm.
16. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.
17. Василенко С.Л. Золотоносные треугольники на евклидовой плоскости // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 15.10.2012. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12293.html.
18. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – URL: http://eek.diary.ru/p165970944.htm.
19. Золотая спираль – URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral

20. Крилли Т. Математика. 50 идей, о которых нужно знать: пер. с англ. / Т. Крилли. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с. – URL: http://padaread.com/?book=223256&pg=14.

21. Василенко С.Л. Триномы старших степеней: от деления пополам и золотого сечения – до модели единичного абсолюта // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 07.06.2015. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/15014.html.

22. Василенко С.Л. Золотое сечение в задачах сжатия-растяжения и деления целого пополам // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 28.08.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14046.html / Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 05.10.2014. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=122&sm=2.

23. Василенко С.Л. Пропорциональное деление целого // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.10.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=108&sm=2.

24. Василенко С.Л. Золотое сечение-разбиение целого на множество составных частей // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 14.08.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14022.html / Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.08.2014. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=120&sm=2.

25. Василенко С.Л. Разбиение целого на множество аддитивных пропорциональных частей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22071, 06.05.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162943.htm.

26. Спиридонов В. Самоподобие, всплески и квазикристаллы // Компьютерра. – 1998. – № 8(236). – URL: http://old.computerra.ru/1998/236/193921/.

27. Короленко П.В. Золотое сечение и самоподобные структуры в оптике / П.В. Короленко, Н.В. Грушина. – М.: Либроком, 2010. – 136 с.

28. Шелаев А.Н. Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17431, 29.04.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162995.htm.

29. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Матрица золотого сечения G_{10} // Информационно-управляющие системы. – 2013. – № 6(67). – URL: http://cyberleninka.ru/article/n/matritsa-zolotogo-secheniya-g-10.

30. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 13.07.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html.

31. Василенко С.Л., Никитин А.В. О расшифровке генома Вселенной // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 06.10.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11402.html.

32. Василенко С.Л. Золотое время // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16343, 08.02.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161786.htm.

33. Василенко С.Л. Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.07.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=31&sm=2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 17.07.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11225.html // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17147, 26.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322102.htm.

34. Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В. Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16023, 30.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm.

35. Черняев А.Ф. "Сердитая" реплика // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17054, 03.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322060.htm.

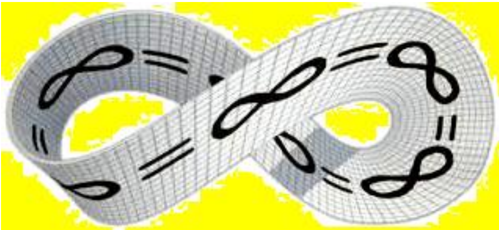
36. Сергиенко П.Я. Мировоззренческий смысл и алгоритм решения предложения II.11 Евклида. Русский проект // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.21389, 04.11.2015. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321305.htm.

37. Василенко С.Л. Золотые двуугольники, египетский треугольник и модель всевидящего ока // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22038, 25.04.2016. – URL: trinitas.ru/rus/000/a0000001.htm.

38. Смирнов В.С. Золотое сечение – основа математики и физики будущего. Спираль развития Вселенной. – СПб: РИО ГОУИПТ, 2002. – 116 с.

39. Шенягин В.П. Семь периодов корня из пяти // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22345, 28.07.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163008.htm.

Харьков, Украина



Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html