Перекрестные отношения и гармоничность в структурировании объектов

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Рассматривается понятие перекрестных или двойных отношений, иногда называемых "вурфом", как способа привлечения внешней оболочки к внутреннему строению объектов. Своеобразного "планировщика" пространства в единении-гармонии "трёх В": Внешнего, Внутреннего плюс их Взаимодействия, начиная с проективной геометрии. Перекрестное отношение – понятие общенаучное и обусловливает гармоничные пропорции для многих природных процессов и структур. Критически проанализирован трехфакторный "золотой вурф". На поверку он оказался вырожденным математическим объектом сродни обычному золотому сечению и подпадает под бритву Оккама. Гармоничность структурирования в своей прагматической интерпретации проецируется на Украину с верой-надеждой в позитивные перемены.

Оглавление

«Избрали новых богов,
оттого война у ворот»
Книга судей Израилевых 5:8

И будет услышан каждый звук гармонии.
Но кто затыкает уши свои,
тот и сам не будет никем услышан…

Вступление

Проблема гармоничности в структурировании объектов природы не нова. Во все времена её разные аспекты становились предметом исследований многих авторов.

Рассмотрение данной темы, с точки зрения так называемых "вурфов" в терминологии проективной геометрии, было начато С. Петуховым [1–4] для живых объектов, частично продолжено в наших работах [5, 6] с общесистемных позиций, затем получило развитие в статьях А. Шелаева [7–9] в пирамидальной тематике и некоторых других авторов.

Отметим, что статья о "вурфах" и гармоничности в структурировании объектов [6] была подготовлена для коллективной монографии к третьему Международному Конгрессу «Проектирование гармоничных систем: инновационная сложность и конструктивная методология, управление и синергия, мера и качество» (8–10 октября 2014 г., Одесса).

В силу разных обстоятельств конгресс не состоялся. А буквально через месяцы над Украиной и вовсе сгустились военно-политические тучи.

Музыку гармонии сменил металлический скрежет танков, разрывы реактивных снарядов. Жизнь разделилась на "до" и "после".

Конечно, рано или поздно придет мирная жизнь.

Гармония и позитивный запал-настрой всё равно возьмут верх.

Но готовить это нужно сейчас. Каждому небезразличному на своем месте.

Учитывая перманентную изменчивость и быстротечность современного общества, остается надеяться на благоприятное развитие событий ускоренными темпами.

Представляется, что структурирование отношений на принципах гармоничности способно вывести вопрос любой сложности из чисто теоретических осмыслений на путь практических приложений-реализаций.

Начиная с перехода от военно-силовой риторики на язык гармонии в её многочисленных проявлениях.

Как глобальная цель в отдельных смыслах-категориях. Не исключено, что с некоторыми отголосками утопичных настроений-пожеланий.

Гармония – предтеча совершенства

Многие убежденно считают, что нужно жить в гармонии с внутренним и внешним миром. В симбиозе внешнего окружения-оболочки и внутреннего мира (состояния).

В созвучии внешних и внутренних ритмов.

Здесь важны правильно расставленные акценты в причинно-следственных отношениях.

Как звучит афоризм старого Китая: «Гармония – не цель, а средство. Когда ты будешь знать, что делать с ней, ты найдешь её».

Другими словами, предполагается движение не к гармонии, а на основе гармонии.

Допустим, по пути ноосферного развития и мышления по Вернадскому.

В единении общества и природы.

Нужно садиться в поезд "гармония", а не ехать до конечной станции с подобным названием.

Гармония обычно связывается с соразмерностью, соответствием целого и частей.

В таком ракурсе она воспринимается в эстетике, художественных объектах и др.

Сопоставимость целого и частей, а потом уж*е* ощущение красоты – главный вопрос гармонии во многих предметных областях.

Такой позиции придерживался русский философ А. Лосев, чьё определение приводится в Большой советской энциклопедии [10, с. 128]: «Гармония – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее проявление внутренняя упорядоченность и мера бытия».

Небезынтересно представление-описание гармонии [11] через её характерные признаки:
- согласованность, связанность, единство всех элементов гармоничной системы;
- единство и борьба противоположных начал, контрасты;
- мера, пропорциональность, равновесие;
- ясность, легкость восприятия;
- уместность, соответствие, природосообразность;
- прекрасное, возвышенное;
- совершенство.

Но вот гармония, подверженная математизации, становится несовершенной, поскольку всякая форма математики имеет свои ограничения. Кроме того, действительный ход мысли математика совсем не обязательно бывает гармоничным [12].

«В математике мы можем получить некоторую относительную гармонию продукта мысли, несмотря на то, что действительное движение мысли математика не обязательно бывает гармоничным... Эта гармония несовершенна, потому что всякая форма математики, как это доказано, имеет некоторые ограничения; вот почему я называю ее только относительной» [13].

Гармония и геометрия

Гармония – настолько субъективное и неоднозначное суждение, что выбор геометрических соотношений в качестве её меры не является общепринятым действом.

В то же время механизм математической пропорции часто служит эффективным, если не единственным способом проверки и установления степени гармоничности согласно принятым критериям.

Особое место отводится симметрии, равновеликости, а также золотому сечению (ЗС). Последнее имеет глубокие основы своего проявления. Посредством ЗС одномоментным образом устанавливается двойное проявление одного и того же соотношения, и ему соответствует единственное положительное число.

Точка равновесия элементов целого создает особое неповторимое структурирование и масштабирование.

К этому можно относиться различно. Но уникальность и красивость несимметричного деления налицо в разных ракурсах.

Любая пропорция, как правило, остается неизменной и в перспективе, при разной удаленности от объекта.

В живописи и архитектуре родилось целое направление проективной геометрии с её нетривиальной идеей бесконечно удаленных точек, где пересекаются параллельные линии (Ж. Дезарг, И. Кеплер).

На ограниченном участке холста или чертежа поразительно просто уживаются, казалось бы, несопоставимые вещи в виде ощутимых конечных размеров и бесконечности.

Последняя <категория> выступает вполне реалистичным проявлением безгранично-мыслимого внешнего окружения. Тем самым «первый план насыщается» подлинным смыслом безмерности бытия.

Проективная геометрия дополняет привычную евклидову геометрию, предоставляя красивые и простые решения для многих задач, характерных присутствием параллельных прямых.

Особенно изящна проективная теория конических сечений. И это не случайно.

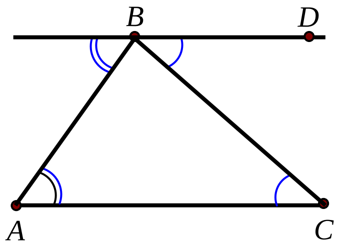
Именно конические сечения через эллипс (окружность), параболу и гиперболу удивительным образом объединяют три фундаментальные математические константы (Φ, π, e) [14], где Ф – константа ЗС.

Роль внешнего окружения

Во многих случаях внешняя оболочка помогает совершенно по-иному увидеть внутреннюю структуру самого объекта. Это хорошо видно на примере теоремы евклидовой геометрии о сумме углов плоского треугольника $=180^{\mathrm{o}}$.

Анализируя эту задачу, вначале даже и не знаешь, как подобраться к её решению.

Но стоит только через вершину фигуры *B* провести прямую *BD*, параллельную основанию AC, как всё становится донельзя просто.



Теперь достаточно рассмотреть равные внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей и параллельными прямыми.

В результате легко приходим к выводу, что сумма углов треугольника равна развернутому углу в 180°.

Тема важности внешнего окружения нашла широкое распространение в самых неожиданных проявлениях, включая гуманитарную сферу отношений, например:

- всё зависит от окружения: солнце на небе не столь высокого мнения о себе, как свечка, зажженная в погребе;
- короля играет свита;
- окружение делает человека себе подобным;
- скажи мне, кто твой друг, и я скажу тебе, кто ты (Еврипид, 480–406 до н. э.).

Деление отрезка в заданном отношении

В классическом квадратном уравнении золотого сечения (ЗС) $x^2 = x+1$ обычно рассматривают только положительное решение $\lambda = \Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 > 0$.

Отрицательный корень $-\phi = \left(1-\sqrt{5}\right)/2 < 0$ отбрасывается с ложной формулировкой об отсутствии физического смысла-содержания.

И напрасно…

Минусовый корень несёт важную информацию и новое понимание философии золотого сечения-деления, располагая делящую точку C вне отрезка (рис. 1). – Образуется так называемое внешнее деление [15] в отношении λ.

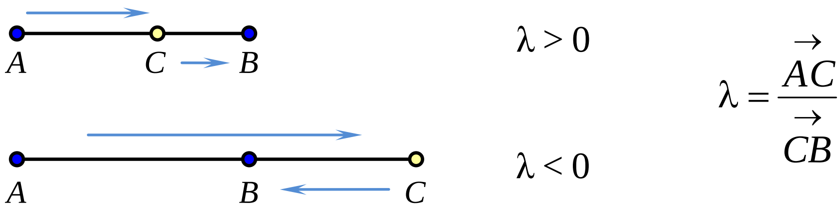


Рис. 1. Внутренне и внешнее деление отрезка AB

Отрицательное значение $\lambda < 0$ означает разнонаправленность сравниваемых отрезков. Сама длина отрезка, разумеется, остается положительной.

В частности, если $\lambda = 1$, то C – середина отрезка.

Если $\lambda = -1$, то точки A и B совпадают.

Итак, отрезок AB можно разделить в одинаковом отношении двумя точками внутренним и внешним образом.

В итоге приходим к гармонической четверке точек.

Гармоническая четверка

Древнегреческий философ Эмпедокл создал учение о четырех природных стихиях-первоэлементах – воде, земле, огне и воздухе. Великий Аристотель добавил к ним тончайшую пятую стихию или пятый элемент – эфир.

Согласно их воззрениям, элементы материальны, наделены свойствами филии-любви и фобии-вражды.

Две противоположности присущи всем телам, приводят материю в движение, образуя общую гармонию взаимодействий – упорядоченность, согласованность.

Античные концепции не обошли стороной и математику.

Упорядоченная четверка точек прямой $\{A, B, C, D\}$ называется гармонической, если делящая пара точек C, D делит базисный отрезок AB в отношениях, отличающихся только знаком [15; 16, с. 78–79].

Двойное отношение гармонической четверки[1] равно -1.

Можно показать, что гармоническая четверка полностью определяется тремя элементами.

Например, по трем точкам (A, B, C) находится четвертая точка D (рис. 2) в определенной последовательности.

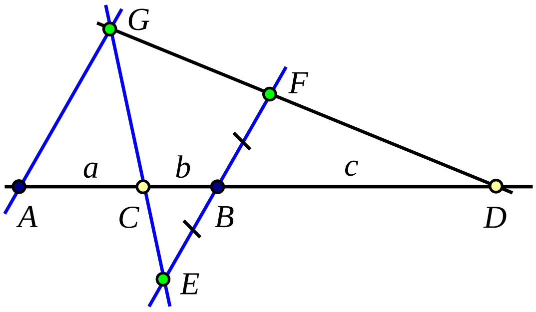


Рис. 2. Геометрическое построение четвертой гармонической точки D

Через точки A, B проводятся параллельные прямые, через точку C – прямая, которая пересекает их в точках G, E. Далее откладываем $FB = BE$.

Место пересечения D двух прямых GF и AB – искомая точка.

Действительно, треугольники подобны $AGC \sim BEC$, $AGD \sim BFD$ через равенство углов, откуда следуют пропорции:

$$\frac{AG}{BF} = \frac{AG}{BE} \equiv -\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}.$$

Получаем равнозначное деление отрезка AB точками C и D. Части AC, CB – коллинеарные однонаправленные; AD, DB – разнонаправленные.

Таким образом, гармоническую четверку вполне допустимо рассматривать как полное решение деления отрезка в заданном отношении через внутреннюю точку и адекватную ей внешнюю точку.

Этим самым достигается гармоничность в структурировании <делимого> целого с окружающей средой.

[1] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_harmonic_conjugate.

"Вурфы"

Частный случай двойного отношения на одной прямой иногда именуют "*вурфом*" (нем. *wurf* бросок). Название было предложено математиком Штаудтом (1856) в его геометрии, где он определял "вурф" четырех точек на прямой линии чисто проективным путем, а затем показывал его совпадение со сложным отношением.

То есть «Штаудт... отказался от термина "двойное отношение" и наименовал соответствующую характерную для проективной геометрии конфигурацию четырех точек словом *Wurf*» [17, с. 170].

Математик стремился «построить учение о проективной геометрии без помощи обычной метрики, предложил рассматривать группу из четырех элементов образа I ступени, взятых в определенном порядке, например, группу *ABCD* четырех точек на прямой, как самостоятельный объект – "вурф", по его терминологии». Этот объект призван «играть ту же фундаментальную роль, что и сложное отношение взятых четырех элементов, но получаемый чисто проективным путем» [18]. Определив равенство "вурфов", а также операции сложения и умножения над ними, он обосновал возможность рассматривать "вурфы", как проективные числа, и ввел в проективную геометрию метод координат.

В общем случае "вурф" – упорядоченная совокупность точек n-мерного проективного пространства при $n>1$ и четырех точек при $n=1$. В случае $n>1$ любые $n+1$ точек не принадлежат никакому $(n-1)$-мерному пространству.

Например, при $n=3$ никакие 4 точки из пяти не должны лежать в одной плоскости.

Четверка точек $\{A, B, C, D\}$ на прямой, взятая в определенном порядке, называется "вурфом" на прямой. Два "вурфа" на прямой линии или на коническом сечении в математике равны, если образующие их четверки точек проективны.

Работы Штаудта отличались устранением вычислений и метрических отношений.

Тем не менее, его методология допускает перевод "вурфов" на язык обычных алгебраических отношений.

С аналитически-содержательной стороны "*вурф*" *– это число-результат операции над триадой длин отрезков* (a, b, c), образованных четырьмя точками прямой $\{A, B, C, D\}$ в общепринятой записи:

$$w(a, b, c) = w_{abc} = \frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)}.$$

Или наш симметричный аналог с его комплиментарностью отображения

$$w_{abc} = \frac{(a+b)b^{-1}(b+c)}{a+b+c}$$

Здесь средний элемент-отрезок b представлен четыре раза в разных позициях, которые визуально скомпонованы в обрамлении треугольника по центру.

Знаменатель $a+b+c$ представляет сумму элементов или общее расстояние между крайними точками, которое для определенности допустимо принять равным единице.

Отличительной особенностью безразмерного значения "вурфа" является его неизменность при любых проективных преобразованиях коллинеарной четверки в пространстве, а также конформная симметрия между блоками из трех последовательных отрезков прямой, отражая гармонию их пропорций.

«Вурф имеет свойство не меняться при конформном преобразовании. Четыре точки A, B, C, D могут преобразовываться относительно окружности любым образом, но их вурф всегда остается неизменным» [19].

Гармонической называют конфигурацию $w(a,b,c)=2$, которая образуется для разных длин:

$$w(a,a,\infty) = w(2,1,3) = w(4,1,5/3) = w(5,1,3/2) = w(7,1,4/3) = ... = 2.$$

Столь непохожие наборы длин (по сравнению с первым вариантом) иллюстрируют важнейшую особенность проективной геометрии, а именно – не делать различий между объектами на конечных и бесконечно удаленных расстояниях.

Блоки-триплеты с разными размерами и соотношениями элементов конформно симметричны, если их "вурфы" равны. Путем преобразований такие блоки могут совмещаться между собой с полным совпадением всех точек.

«Вурфные пропорции позволяют выявить конформно-симметричные группы, иными словами, группы родственных отношений с единым исходным началом. Обычные двучленные пропорции показывают лишь различия, вурфные – общность некоторого множества трехчленных соотношений» [20].

Существует мнение (А. Пилецкий), что древнерусские зодчие использовали "вурфы" в своей будничной работе, имея для этого особые инструменты.

Что дают подобные пропорции? – Наблюдатель обычно рассматривает сооружения под разными углами обозрения. При этом меняются пропорции составных частей. Но если конструкция имеет "вурфное" отношение трехчленного деления, то при перемещениях созерцателя значение "вурфа" не изменяется. Так достигается эстетическая совершенность и гармоничность конструкции.

"Вурф" проявляется идеально лишь в геометрической плоскости, но нарушается в реальной перспективе: при приближении или внутри рассматриваемого объема.

Возникающие оптические искажения меняют пропорции "вурфа".

Терминологическая паутина

Как бы там ни было, но "вурфная" терминология в математике не прижилась.

Зато широкое распространение в геометрии получило *двойное (double ratio)* или *ангармоническое отношение*, в частности четырех точек на одной прямой [21, с. 343–344; 22, с. 154–159; 23, с. 51–56; 24, с. 14–23; 25]. Как альтернатива гармонической четверке[2].

Другое название – *перекрестное отношение (cross-ratio*[3]*)* [26], как фундаментальная концепция, играющая ключевую роль в проективной геометрии.

В духе двойственности перекрестное соотношение определяется для двух наборов объектов: 4-х коллинеарных точек и 4-х параллельных линий.

Перекрестное отношение для четырех коллинеарных точек $\{A, B, C, D\}$ вычисляется как "двойное отношение": $(ABCD) = CA/CB : DA/DB$.

Такая терминология точнее соответствует сути математической конструкции.

Равно как и «золотое отношение» – *double ratio* [27], наиболее широко и правильно распространенное в англоязычной литературе. Поскольку отражает не только сечение целого, но и отношение, в том числе в пропорции.

Более того, «словосочетания "золотое сечение" и "золотая пропорция" не равноценны семантически, поскольку первое относится к геометрии, где измерениям предшествует выбор масштаба, а второе принадлежит арифметике, где единица вводится аксиоматически и деление чисел не эквивалентно измерению» [28]. «Но вот в русском языке из всех возможных вариантов при переводе выбрали, можно сказать, наихудший аналог… Где термин "сечение" точно выглядит как стоп-сигнал у кроликов Фибоначчи» [29].

---

[2] URL: en.wikipedia.org/wiki/Projective_harmonic_conjugate.

[3] URL: mathworld.wolfram.com/CrossRatio.htm; en.wikipedia.org/wiki/Cross-ratio.

"Золотой вурф"

В биологии двойное отношение впервые было применено С. Петуховым [1] в 80-х годах с последующим развитием [2, 3].

Двойное отношение предложено именовать "золотым вурфом", считая, что он лежит в основе биологических симметрий и реализуется в качестве инварианта трехчленных кинематических блоков скелетных костей людей и животных.

Известен также анализ "вурфа" для описания птичьих яиц [30].

Интерпретируя три соседних числа Фибоначчи как длины трёх последовательных отрезка, "золотой вурф" g можно определить через предел

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(F_n + F_{n+1}\right)\cdot\left(F_{n+1}+F_{n+2}\right)}{F_{n+1}\left(F_n + F_{n+1} + F_{n+2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}F_{n+3}}{F_{n+1}2F_{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+3}}{2F_{n+1}} = \frac{\Phi^2}{2} \approx 1{,}31.$$

Легко показать, что

$$w\left(\Phi^{k\mp1},\ \Phi^k,\ \Phi^{k\pm1}\right) = \Phi^2/2 = (1+\Phi)/2 = g\ .$$

Справедливы также следующие тождества:

$$w\left(\Phi^{k+1},\ \Phi^k,\ \Phi^{k+1}\right) = w\left(\phi^{k-1},\ \phi^k,\ \phi^{k-1}\right) = \Phi;$$

$$w\left(\Phi^{k},\ \Phi^k,\ \Phi^{k-1}\right) = w\left(\phi^{k},\ \phi^k,\ \phi^{k+1}\right) = 2\phi;$$

$$w\left(\Phi^{k},\ \Phi^{k+1},\ \Phi^{k}\right) = w\left(\phi^{k},\ \phi^{k-1},\ \phi^{k}\right) = (3\phi-1)^{-1},$$

где константы золотого сечения равны: $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\quad \phi = \Phi^{-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Во многих канонизированных изображениях совершенного человека присутствуют простые геометрические фигуры: квадрат, круг, треугольник... Отношение размеров выражается определенными пропорциями в предположении, что они соответствуют закономерностям гармонии природного (физического) происхождения [31]. В скелете человека простой иллюстрацией трехчленных кинематических блоков являются фаланги пальцев, длины трехзвенных конечностей: руки (плечо – предплечье – кисть) и ноги (бедро – голень – стопа), а также трехчленное тело (верхний, туловищный и нижний участки).

Согласно гипотезе С. Петухова пропорции длин трехчленных блоков тела человека в процессе роста изменяются по правилам конформных преобразований: «ростовые удлинения звеньев согласованы так, что в распрямленном блоке сохраняется неизменным инвариант одномерных круговых и проектных преобразований, определяемым двойным отношением или вурфом» (см. рис. 2):

$$w = \frac{(B-A)}{(B-C)}\cdot\frac{(D-C)}{(D-A)} = \frac{a+b}{b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c} = \frac{(1+a')(1+c')}{1+a'+c'} = 1 + \frac{a'c'}{1+a'+c'}\ ,$$

где в скобках даны длины звеньев между точками $\{A, C, B, D\}$ трехчленного блока – триплета; $a' = a/b$, $c' = c/b$; b – средняя часть триплета.

Анализируя связи между длинами в трехчленных блоках тела млекопитающих и человека, а также птиц, С. Петухов установил, что двойное отношение (вурф) в этих блоках приблизительно равно 1,309 – как инвариант относительно конформных преобразований трехчленных объектов.

Таким образом, средняя величина "вурфов" трехчленных кинематических блоков тела человека примерно совпадает с величиной "золотого вурфа" g.

В течение жизни и роста двойное отношение практически не изменяется.

Известен даже музыкальный 8-ступенный строй "золотого вурфа" с коэффициентом $\Phi^2/2 \sim 1{,}309\ldots$[4].

Однако суженная концентрация внимания на этом числе, вызванная излишним преклонением перед феноменом ЗС, к сожалению, не позволили С. Петухову проникнуть в глубокую сущность "вурфа" в зоологии [30]. Так, он принял средний палец руки «эталонным трехчленным кинематическим блоком» с его гипотетическим значением "вурфа" $g = 1{,}309$ в качестве базовой величины. Затем установил, что отклонение от данной величины g остальных усредненных значений "вурфов" всех трехчленных блоков составляет 2–5 %. И только в случае самого малоподвижного и неразвитого пальца – достигает 9 % [1].

Итак "*золотой вурф*" – это последовательный ряд трех отрезков, находящихся в отношении золотого сечения.

По сути, это обычное k-золотое сечение единичного отрезка на $k = 3$ части [32]:

$$\frac{2b+c}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \Phi;$$

$$a = b + c = 0{,}5; \quad b = \frac{\phi}{2} \approx 0{,}309; \quad c = \frac{\phi^2}{2} \approx 0{,}191\,.$$

Отличительной особенностью данной структуры является наличие дополнительной аналитической связи $a = b + c$.

Насколько высока проба "золотого вурфа"

Обсуждение наводит нас на простые вопросы. Такой уж он золотой это "вурф"? Да и "вурф" ли вообще в априорном представлении?

Дело в том, что три отрезка де-факто сворачиваются в два отрезка так, что приходим к обычному золотому сечению отрезка на два золотых сегмента. Со всей лишь разницей, что делится не единичный отрезок, как обычно принято, а половинка. Однако это совершенно не влияет на результат, вследствие обычного пропорционального масштабирования.

Фактически "золотой вурф" трех элементов $\{\, a, b, c \,\}$ вырождается в двухэлементный математический объект

$$w_{abc} = \frac{(a+b)b^{-1}(b+c)}{a+b+c} \quad \xrightarrow[a=b+c]{} \quad w_{ab} = \frac{a+b}{2b}\,.$$

Это происходит за счет появления дополнительного равенства $a = b + c$ и соответствующего уменьшения числа степеней свободы структуры "вурф" до двух.

Образно говоря, буквально «сводятся концы с концами» (рис. 3), что приводит к обычному делению целого на две части. С той лишь разницей, что в проективной геометрии целое a является самостоятельным элементом-отрезком, равным сумме частей $a = b + c$.

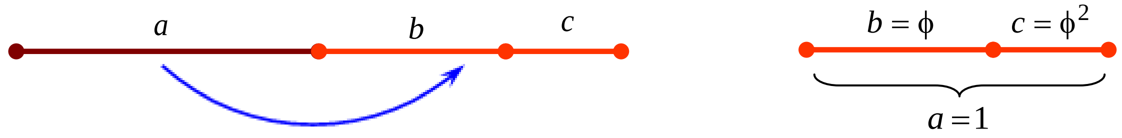


Рис. 3. Свертка золотого "вурфа" с приведением к обычному золотому сечению

Так таковой "вурф" в золотом отражении-измерении теряет свой первозданный вид, нивелируясь до тривиального золотого деления целого на две части.

Третий элемент не является самостоятельным объектом и равен сумме двух исходных частей.

Приняв для удобства-определенности $a = b + c = 1$, возвращаемся к обычному золотому сечению. Численное значение "вурфа" становится равным отношению целого или суммы двух частей к удвоенному значению большей части $w_{ab} = (1+\phi)/2\phi = \Phi^2/2$.

Получили ничего не значащее число. Похожих соотношений с разными коэффициентами существует множество.

Ну, и что с того? – Для идентификации золотой модели вполне хватает основного базового отношения: целое относится к большему как оно к меньшему.

Все остальные, включая так называемый "золотой вурф", вторичны.

Можно, конечно, носиться с этим числом, как с писаной торбой.

Только какой в этом принципиальный толк-смысл? – Если новое число выступает искусственным образованием от золотой константы. Превращаясь, фигурально выражаясь, в туманное марево. С улетучиванием первоначально ожидаемого очарования.

Иначе говоря, имеем в наличии случайный белый шум.

Более того, как будет показано ниже, можно составить миллиарды троек $\{a, b, c\}$ с данным числом $g = \Phi^2/2$, которые не имеют к золотой модели ни малейшего отношения.

Как положительный корень квадратного уравнения $x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0$.

Альтернативные воззрения

В работе [33, с. 47–48] обосновывается некорректность использования "вурфов", как интегральных показателей анатомического строения человека. Не говоря уж*е* о широком многообразии животных, птиц и насекомых.

Например, две разные пропорциональные структуры $w(\underline{1,1,1}) = 4/3 \approx 1{,}33$ и $w(\underline{1,2,4}) = 9/7 \approx 1{,}29$ имеют относительное отклонение от $p = 1{,}31$ не более 2 %. Хотя в первом случае выбраны равные составляющие, во втором – с соотношением $1:2$. Ничего общего в строении они между собой не имеют, но прекрасно «вписываются в золотой вурф»!

Данный пример также свидетельствует о слабой восприимчивости (чувствительности) показателя к исходным данным. А вот с задуманным обобщением у С. Ясинского фактически не получилось. Так, он записывает [33, с. 46]:

$$w_3 = \frac{l_1 + l_2}{l_2} \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \qquad w_4 = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_2 + l_3} \cdot \frac{l_2 + l_3 + l_4}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}.$$

Легко увидеть, что сумма $l_2 + l_3$ содержится во всех сомножителях w_4. После формального объединения двух отрезков $l_2' = l_2 + l_3$ мы получаем форму, которая геометрически ничем не отличается от структуры w_3.

То есть наблюдается простое видоизменение записи, не имеющее расширительной подосновы.

В работе [20, с. 44–48] описаны «вурфные отношения русской матрицы», увязанные с трехчастными членениями в древнерусской архитектуре. Указано, что «почленные части трехчастного деления тела (вурфа) образуют систему взаимного пропорционирования и потому оказываются неразделимыми».

"Золотой вурф" мы находим в таком "экзотическом" соотношении, как распределение счастливых и несчастливых людей в мире [34] или молекулярные массы 20 аминокислот, в строении молекула белка [19].

В общем случае термин "вурф" характеризует сложное ангармоническое соотношение частей трехчастных объектов, в то время как "золотому вурфу" приписывается гармоничное состояние частей в динамике целостного объекта.

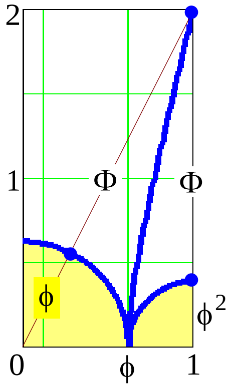
Гармоничность следует понимать в наделении структур свойствами, вытекающими из общих представлений о золотом сечении. И не более того.

Возможность применения в биологии или архитектуре указывает на то, что «вурф – понятие общенаучное и обусловливает гармоничное пропорционирование всех процессов и структур природы и не только по золотому сечению» [20].

С точки зрения строения скелетов живых существ "вурф" – чисто внутренняя конструкция. Но она образуется для связи с внешним миром. Можно сказать на вызовы окружающей среды для лучшей ориентации и передвижения в условиях действия сил притяжения. А вот в воде всё выглядит по-другому, поскольку влияние гравитации частично уравновешивается выталкивающей силой, тем самым как бы уменьшая размерность пространства. Вероятно, поэтому рыбьи плавники не имеют характерного строения через двойное отношение.

Всё это является прямым следствием эволюционной подстройки и гармонического структурирования объектов во внешней среде.

В статье [35] исследовано структурирование единичного отрезка при его делении на две неравные части и построением ассиметричного "золотого" трилистника (рис. 4), обладать наиболее отчетливыми золотоносными пропорциями, включая двойное отношение в виде "вурфа".



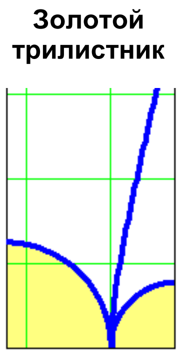


Рис. 4. Деление отрезка с изолинией, равноотстоящей от окружностей с радиусами большей и меньшей частей отрезка

"Вурф как планировщик" пространства

Соединение внешнего и внутреннего мы стараемся выразить инструментально. Например, в той же проективной геометрии. На плоском листе ватмана выражаем глубину трехмерного пространства перспективными построениями.

Глубина перспективы отражается в параллельном переносе точек плоскости по сетке перспективы. "Вурф" начинается на одной линии с точками. Но можно использовать эти соотношения и в других координатных пространствах: линейных и нелинейных.

Понятие "вурфа" оказывается многограннее его первоначального применения.

И не важно, на одной или разных линиях находятся точки, в одной плоскости или нет.

"Вурф" дает оценку принадлежности произвольной последовательности чисел к одному или разным множествам (рядам и т.д.). Внешнее и внутреннее сливаются в единый объем, и "вурф" позволяет отделить сущности...

Но пока не используем внешнего, не понимаем до конца внутреннего содержания.

В контексте нашего основного разговора "вурф", по сути, привлекает четвертую (внешнюю) точку и включает её в своё тело или внутреннюю структуру. Но при этом оставляя внешнее окружение. Далее, пятая точка и т.д.

То есть "*вурф" – это способ привлечения внешней оболочки к своему внутреннему строению*. Можно сказать, происходит своеобразное освоение или "пожирание" пространства. Но чтобы иметь постоянство "вурфа", надо знать форму координатного пространства. Если она неизвестна, то "вурф" будет меняться в зависимости от изменения координат его точек. В реальной трехмерной перспективе при больших углах схождения параллельных прямых сетки перспективы происходит искривление сетки.

Например, если фокусное расстояние объектива очень мало, а кривизна линзы большая, то появляется искривление, называемое «рыбьим глазом». Угол зрения объектива большой, но искажения делают все прямые линии гиперболическими или иными кривыми.

Нечто подобное происходит с нашим зрением, когда, находясь внутри комнаты, мы смотрим на стены и потолок. Или когда стоим на небольшом расстоянии от здания и разглядываем его силуэт.

Архитекторы хорошо знают этот эффект и вносят дополнительные коррективы.

Так, все колонны Парфенона имеют чуть коническую форму, но зрительно воспринимаются, как цилиндрические.

"Золотой вурф" как пример золотой алхимии

Внедрение в "вурф" золотых отношений приводит к дополнительной связи $a = b + c$, за счет чего "вурф" фактически вырождается.

С другой стороны, принятие величины $g = \Phi^2 / 2$ не влечёт за собой автоматическое образование золотой модели.

Например, в работе [8] делается такой спешный вывод : «пирамида Хеопса является идеальным геометрическим объектом, так как её "вурф" $W_{abc} = (a+b)(b+c)/b(a+b+c)$ по трём найденным характерным линейным размерам пирамиды a, b, c оказывается точно равным его идеальному значению $\Phi^2/2$». – Данное положение допустимо считать не более как необходимым условием. Достаточным оно, конечно, не является. В этом смысле приведенное утверждение не отвечает причинно-следственным отношениям между значением "вурфа" и понятием идеальности геометрического тела.

Данному числу $g = \Phi^2/2$ могут отвечать миллиарды других комбинаций трех отрезков, не имеющих к золотому феномену абсолютно никакого отношения (рис. 5).

То есть как сам термин, так и его значение не несут однозначно-приемлемой смысловой нагрузки.

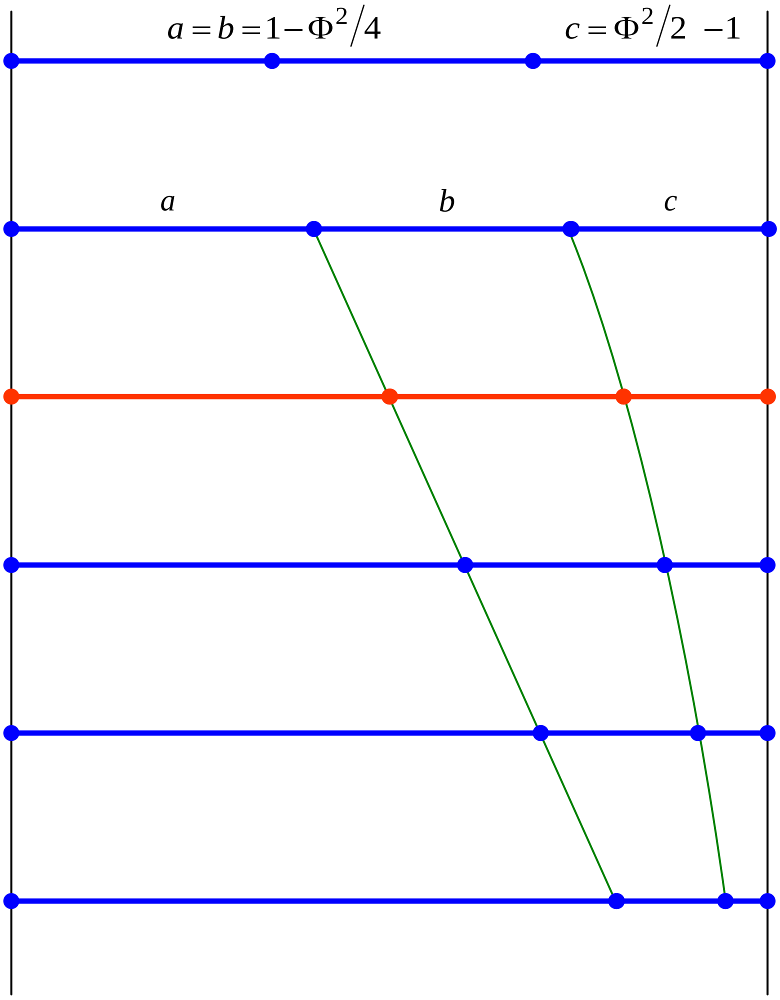
Поэтому закономерно, что термин "вурф" не нашел применения-распространения даже на своей родине – в западной математической литературе. Нет его практически и в русскоязычных источниках.

К гармонии "трёх В"

Гармония *Внешнего* и *Внутреннего*... Она есть, если имеет место *Взаимодействие* этих условных пространств. Когда одно не может существовать без другого. "Два В" – разные части, но они – единое целое. Тогда, в чём выражается взаимодействие? – Возможно, в проективном проникновении одного в другое.

Сродни богу, как проекции внешнего мира в наше внутреннее "Я".

"Вурф" дает нам не столько соотношение отрезков, сколько их взаимодействие в одном числе. Как внешнее может изменяться по законам внутреннего, так и внутреннее меняется по законам внешней среды, подстраиваясь под неё.



$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}34549 \\ 0{,}34549 \\ 0{,}30902 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}33850 \\ 0{,}26150 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}30902 \\ 0{,}19098 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}26402 \\ 0{,}13598 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}20812 \\ 0{,}09188 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}14427 \\ 0{,}05573 \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Примеры деления единичного отрезка на три части
с одинаковым значением "золотого вурфа" $g = \Phi^2/2$

Внешнее деление символизирует транзитный переход через тройственное представление – к двойной дихотомии, типа отрицание отрицания.

Если конструкция имеет вурфное отношение трехчленного деления, то при любых перемещениях наблюдателя значение "вурфа" практически не изменяется.

Этим самым достигается эстетическая совершенность и гармоничность конструкции. Поскольку перспектива всё-таки частично изменяет геометрию, строители добивались нужной соразмерности в перспективе, частично искажая геометрию.

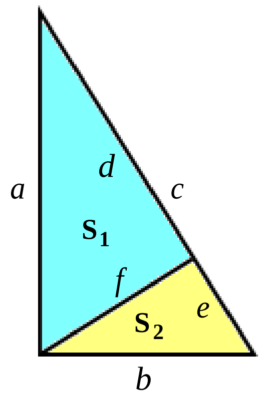
Треугольник Кеплера

Треугольник Кеплера нам понадобится для дальнейших рассуждений.

Сначала отметим одну яркую особенность прямоугольного треугольника.

Высота, проведенная из прямого угла к гипотенузе, обладает уникальными свойствами. Она делит треугольник на два треугольника, подобных исходному и друг другу.

Из этого вытекают полезные отношения:



- высота f – среднее геометрическое (пропорциональное) двух сегментов гипотенузы
$$f = \sqrt{de};$$
- каждый катет треугольника – среднее пропорциональное гипотенузы и смежных сегментов
$$a = \sqrt{cd}, \qquad b = \sqrt{ce};$$
- далее следуют дополнительные соотношения
$$f = \frac{ab}{c}, \qquad \frac{1}{f^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

В прямоугольном треугольнике Кеплера стороны наделяются дополнительными связями за счет перевода базового золотого соотношения $\Phi^2 = \Phi + 1$ на язык теоремы Пифагора $\Phi^2 = \left(\sqrt{\Phi}\right)^2 + 1^2$ с образующими сторонами $\Phi : \sqrt{\Phi} : 1$.

При этом гипотенуза и меньший катет находятся в золотом отношении.

Кроме того, высота f делит гипотенузу золотым сечением
$$\frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \Phi.$$

Примечательно, что площади треугольников также соотнесены в золотой пропорции. Действительно,
$$\frac{c}{d} = \frac{d}{e} \;\rightarrow\; \frac{ab \cdot c}{ab \cdot d} = \frac{d}{e} \;\rightarrow\; \frac{ab}{fd} = \frac{fd}{fe} \;\rightarrow\; \frac{S_1 + S_2}{S_1} = \frac{S_1}{S_2} = \Phi.$$

Треугольник Кеплера строится сравнительно просто [36].

Сторона квадрата единичной длины делится пополам (рис. 6).

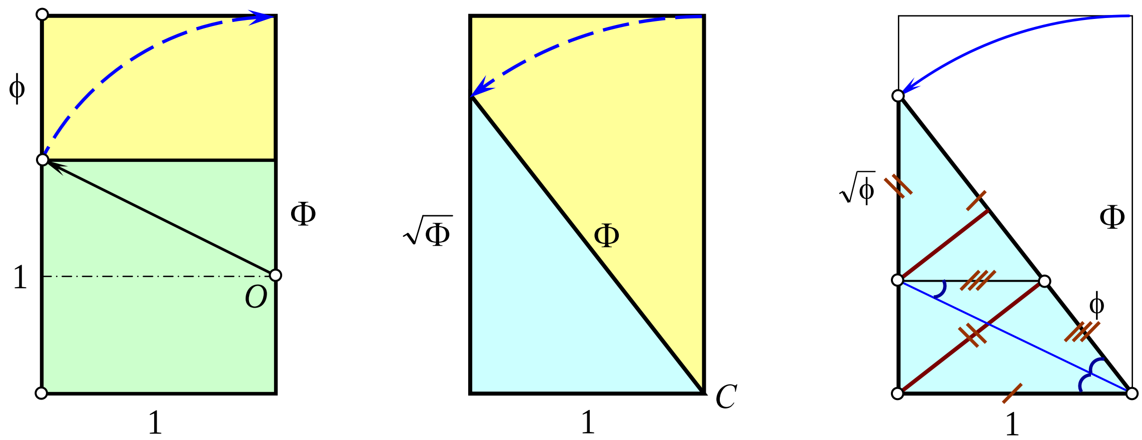


Рис. 6. Построение треугольника Кеплера и проведение в нем характерных линий

Из точки деления O проводится дуга, отсекая на продолжении стороны величину Φ.

Этим раствором циркуля чертится дуга (с центром C) до пересечения с продолжением противоположной стороны квадрата.

В результате такого построения стороны треугольника соотносятся в геометрической прогрессии $1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$.

Хотя сам И. Кеплер выполнял построения несколько иначе [37, с. 98]: «Если на отрезке, разделенном в крайнем и среднем отношении, построить прямоугольный треугольник так, чтобы прямой угол лежал на перпендикуляре, проведенном в точке разделения, то меньший катет будет равняться большему сегменту разделенного отрезка... Кеплер строит прямоугольный треугольник *ADB* с гипотенузой *AB* так, что прямой угол *D* лежит на перпендикуляре, проведенном из точки золотого сечения *C*. Затем он доказывает, что *BD* (короткий катет прямоугольного треугольника) равен *AC* (более длинному сегменту отрезка, разделенного в золотом сечении)».

Разбираясь в противоречивых мнениях по истории термина «золотое сечение», В. Зубов приводит оригинальный текст высказывания И. Кеплера [38]: «Существует два сокровища в геометрии: одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении. Из первой вытекает построение куба, пирамиды и октаэдра, а из второго – построение додекаэдра и икосаэдра. Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны... первую, гласящую, что стороны прямоугольника, будучи возведены в степень, равны квадрату линии, противолежащей прямому углу, – эту теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако без первой ничего не стоит». – J. Kepler, Mysterium Cosmographicum, 1596.

Построения проф. А. Шелаева

Предметная область "вурфов" широко представлена в работах д.ф.-м.н. проф. А. Шелаева[4], в частности, при обосновании золотой модели в египетской пирамиде Хеопса.

Тема, скажем, не новая, хотя и не имеет надежного историко-математического подтверждения. Тем не менее, профессору удалось получить уникальные математические результаты в продвижении данного вопроса.

Для нас представляют интерес его выкладки и заключения вокруг "золотого вурфа".

1) Так, в статье [7] красной нитью проходит значения "вурфа" $W_{abc} = \Phi^2/2 \approx 1{,}309$ как оптимальное (?), которое принято для многих объектов, в том числе согласно эмпирическим наблюдениям параметров различных объектов в архитектуре и даже живой природе [2, 3].

Одновременно, по мнению автора статьи, «сам термин вурф (от нем. *wurf* – бросок) является слишком абстрактным, более логичным, по крайней мере, в рассматриваемых задачах, было бы использование термина – отношение гармонических отношений в соответствии со следующей записью $W_{abc} = (a+b)/b : (a+b+c)/(b+c)$».

Но сути это не меняет! Как мы видели (см. рис. 5), само по себе значение $g = \Phi^2/2$ ещё не обеспечивает золотую гармоничность.

Поэтому терминологическая "оптимальность" здесь остается под большим вопросом. Во всяком случае, как отделенное суждение, в отрыве от других характеристик.

2) Результатом понятийной противоречивости, связанной с идеальным "вурфом", становятся также неточные выводы-посылы в статье [8]:

«пирамида Хеопса является идеальным геометрическим объектом, так как её вурф по трём найденным характерным линейным размерам пирамиды *a, b, c* оказывается точно равным его идеальному значению».

То есть, автор считает, если "вурф" идеальный (?), то и пирамида идеальная.

---

[4] URL: http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/1454-00.htm.

Однако можно нарисовать миллиарды пирамид с идеальным значением $g = \Phi^2/2$, которые и близко не похожи на пирамиду Хеопса. Ибо наличие-присутствие числовой величины g ещё не гарантирует причинно-следственный переход на золотоносные свойства тела, включая золотые отношения характерных отрезков (частей-элементов) между собой.

3) Рассматривая правильную квадратную пирамиду (рис. 7), автор выводит целый ряд интересных математических закономерностей.

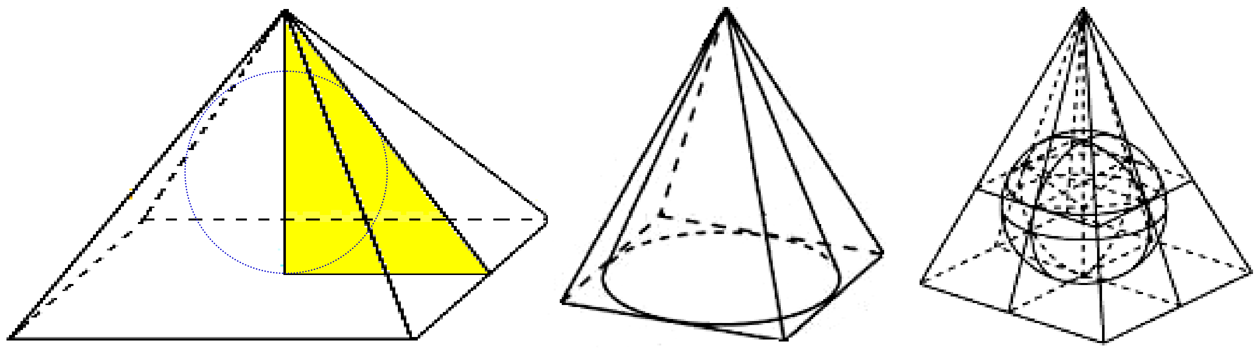


Рис. 7. Характерный треугольник в разрезе пирамиды вдоль её апофемы и высоты, вписанный конус и вписанный шар

При заданной длине стороны в основании пирамиды, характерными размерами, определяющими "идеальный вурф", становятся высота пирамиды и радиусы вписанных тел.

Автор сопоставляет величины с телами, вписанными в пирамиду (рис. 8):

r – радиус основания конуса, вписанного в пирамиду, равный половине длины основания пирамиды;

r_s – радиус вписанной сферы (s – *sphere*);

r_{ss} – радиуса вписанной полусферы (ss – *semisphere*), которая опирается на основание пирамиды.

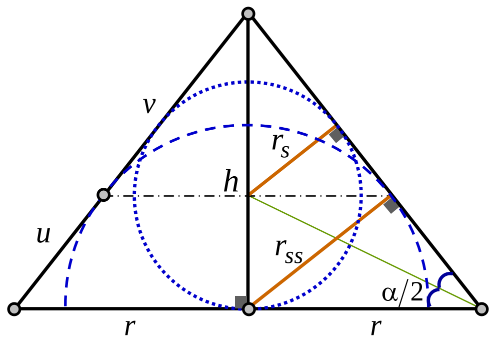


Рис. 8. Связь линейных размеров пирамиды с радиусами вписанных тел

Без потери общности рассуждений можно положить $r = 1$.

Тогда остальные радиусы численно равны: $r_s = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $r_{ss} = \sin\alpha$.

Их разность $\Delta = r_{ss} - r_s = \sin\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ варьирует в зависимости от угла наклона α апофемы и *достигает максимума*, определяемого из условия равенства нулю производной

$$\Delta' = \cos\alpha - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 0.$$

Отсюда следует квадратное уравнение золотого сечения (для большей части) относительно переменной $\cos\alpha$:

$$\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \quad \to \quad \cos\alpha = \phi \quad \to \quad \phi \approx 51{,}83^{\circ}.$$

Следовательно, радиусы равны:

$$r_{ss} = \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\phi};$$

$$r_s = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\phi}{1+\phi} = \phi^{3/2}.$$

Отрезок $u = \sqrt{1-r_{ss}^2} = \phi$. Из подобия треугольников следует $v = r = 1$.

Следовательно, апофема пирамиды $u + v = 1 + \phi = \Phi$ и высота $h = \sqrt{\Phi^2 - 1} = \sqrt{\Phi}$.

Итак, получили треугольник Кеплера со всеми его уникальными свойствами, включая соотношение сторон $1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$ в виде геометрической прогрессии со знаменателем $\sqrt{\Phi}$.

Выполняется также равенство

$$r_s + r_{ss} = \phi^{3/2} + \phi^{1/2} = \phi^{1/2}(\phi+1) = \sqrt{\Phi} = h.$$

Уяснив экстремально-специфические свойства треугольника Кеплера, пойдем теперь в обратном направлении.

В априори заданном треугольнике Кеплера (рис. 9) проведем перпендикуляр из прямого угла на гипотенузу и далее перпендикуляр длиной ϕ на больший катет.

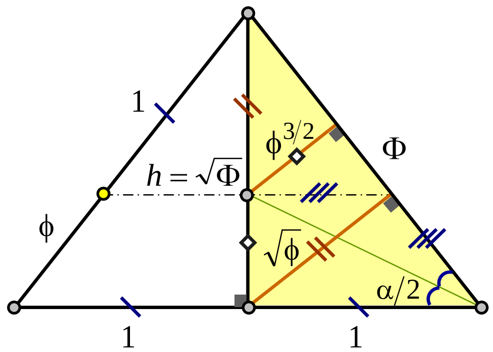


Рис. 9. Разрез правильной пирамиды – два сопряженных треугольника Кеплера

Соединив полученную точку с острым углом треугольника, получаем биссектрису угла α.

Известно, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанного круга. Следовательно, r_s – действительно радиус вписанной окружности и/или шара в пирамиде.

Таким образом, А. Шелаев фактически углубил и расширил замечательные свойства прямоугольного золотого треугольника Кеплера с выявлением новых золотоносных свойств по сравнению с другими прямоугольными треугольниками.

Что вполне закономерно.

Ибо треугольник Кеплера объединяет в себе одновременно теорему Пифагора и золотую пропорцию, исходя из базового представления модели золотого сечения:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \rightarrow \quad \Phi^2 = \left(\sqrt{\Phi}\right)^2 + 1^2 .$$

Присутствие этой фигуры в пирамиде Хеопса вполне возможно, но по-прежнему остается под вопросом, как и ранее.

Никаких более-менее прямых исторических указаний на этот счет нет.

Бег по кругу

Подчеркивая исключительно-полезные результаты исследований А. Шелаева, нельзя обойти стороной одно необычное заключение [8]:

«полагая $(a, b, c) = (h, r_{ss}, r_s)$, получаем ещё один весьма важный результат – пирамида Хеопса имеет идеальные значения вурфов: $w_{abc} = \Phi^2/2$, $w_{acb} = \Phi^2/2 + 1/2$, $w_{cab} = \phi + 1/2$. Полученные соотношения позволяют назвать эту великую пирамиду идеальным геометрическим объектом!!»

Странность вывода состоит в том, что данные значения "вурфов" соответствуют обычному золотому сечению высоты пирамиды – отрезка $a = b + c$ – большого катета треугольника Кеплера.

Однако его присутствие в пирамиде Хеопса ещё не факт. Поскольку [8] «исходным началом расчётов, проведённых на примере пирамиды Хеопса, было допущение (!) того, что измеряемый в наше время угол наклона боковых граней этой пирамиды к её основанию $\alpha_{\exp} \approx 51{,}8^{\circ}$ должен точно равняться очень близкому по величине углу

$$\alpha_{th} = \arccos \phi = \operatorname{arctg}\sqrt{\Phi} \approx 51{,}827^{\circ}».$$

То есть сначала золотоносный треугольник Кеплера с теоретическим углом α_{th} заложили в сечение пирамиды, априори! Далее в процессе исследований фигуру дополнили новыми замечательными свойствами. И уж*е* на волне экстремальных признаков данного треугольника формулируются золотоносные свойства самой пирамиды.

Получается, откуда плыли, туда и приплыли. Правда, с новым багажом знаний. При этом "золотой вурф" попросту оказался красивым, но малополезным бантиком, апостериори.

Без особых смыслов, причинно-следственных отношений и логических связей.

Поэтому за ненадобностью "золотой вурф" попадает по бритву Оккама.

В связи с этим невольно вспоминаются неутомимые алхимики прошлого. Вожделенного золота так и не получили. Однако в процессе проведения разнообразных экспериментов открыли химические элементы: фосфор, мышьяк, сурьму, висмут, цинк!

Так и здесь. Приобщение пирамиды Хеопса к золотоносным родникам-истокам осталось на прежнем уровне и пока нисколько не продвинулось.

Но во время кругового забега получилась замечательная математически выверенная теория прямоугольного треугольника Кеплера с её приложением к правильной пирамиде.

Вместо заключения

На наш взгляд, так называемый "золотой вурф" больше относится к разряду искусственных малополезных образований.

С одной стороны, вкрапление золотого сечения в "вурф" приводит к фактической потере исходной троичности. Золотая модель формирует дополнительную аналитическую связь $a = b + c$, за счет чего "вурф" вырождается с потерей одной степени свободы.

С другой стороны, само значение так называемого "золотого вурфа" $g = \Phi^2/2$ не гарантирует наличие золотых конфигураций, с возможным уходом структуры в совершенно иные от золотого сечения области взаимодействия.

Только одного значения g мало. Нужны дополнительные условия адекватной проверки на присутствие золотого фактора. Другими словами, есть только необходимое условие, однако, явно не достаточное. Вурфных кластеров $\{\, a, b, c \,\}$ со значением $\Phi^2/2$ бесконечно много, но без признаков отношений золотой пропорции.

Потому целиком закономерно, что в научной литературе не прижился не только сам термин "вурф", но и его золотоносная модификация-производная.

Понятие "золотого вурфа" и судьба его дальнейшего применения фактически были предопределены ещё на стадии зарождения. – Ни к чему не обязывающее число $g = \Phi^2/2$, как производная от константы золотого сечения Φ. Ну, и что с того?

Golden wurf – fake…

Золотые образы в терминах проективной геометрии, вроде «*golden double ratio*» или «*golden cross-ratio*», также не нашли какого-либо применения-развития, за редчайшими единичными исключениями [39, 40].

Оно и не мудрено. Трехчленный объект $\{\, a, b, c \,\} = \{1,\ \phi,\ \phi^2\}$ с очевидной связью $1 = \phi + \phi^2$ фактически вырождается, превращаясь в обычное золотое сечение – *golden ratio*.

То есть классическое золотое сечение целого – это одновременно и "золотой вурф" (!): целое плюс две его составные части, находящиеся в золотом отношении.

Стоит ли тогда сознательно усложнять суть вопроса ненужной терминологией, внося путаницу. Или, как говорится, городить огород, наводя тень на плетень…

"Золотому вурфу" – презумпция лезвия Оккама. Без тени сомнения и сожаления.

Литература

1. Петухов С.В. Биомеханика, бионика, симметрия. – М.: Наука, 1981. – 240 с.

2. Петухов С.В. Геометрия живой природы и алгоритмы самоорганизации. – М.: Знание, 1988. – 48 с.

3. Петухов С.В. Матричная генетика, алгоритмы генетического кода, помехоустойчивость. – М.- Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. – 316 с.

4. Петухов С.В. Элементы матричной генетики, натуральной генетической музыки и матрионного анализа // Симметрии: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. 2-го Междунар. семинара, 12-14 сент., Астрахань. – Астрахан. гос. ун-т, 2007. – С. 14-125 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14719, 19.02.2008. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321076.htm.

5. Василенко С.Л. Гармоничное структурирование во внешней среде // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16198, 05.12.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02021140.htm.

6. Василенко С.Л. Вурфы и гармоничность в структурировании объектов // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 05.11.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14246.html.

7. Шелаев А.Н. Кинематическая модель внутренних и внешних золотых сечений и соответствующих им вурфов – отношений гармонических отношений // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 21326, 21.10.2015. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321303.htm.

8. Шелаев А.Н. К раскрытию геометрических и физических тайн великих пирамид и их возможных аналогов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 21783, 13.02.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162903.htm.

9. Шелаев А.Н. К установлению причин различия геометрических и физических параметров великих пирамид // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 21962, 07.04.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162922.htm.

10. Лосев А.Ф. Гармония // Большая советская энциклопедия: 3-е изд. Т. 6. – М.: Изд. "Сов. энц.", 1971.

11. Миронова Л.Н., Иванов Д.Г. Теория гармонии. – 2008. – URL: http://mironovacolor.org/theory/harmony_theory/#.

12. Василенко С.Л., Сергиенко П.Я. Математика и гармония целостности // Мысли от Андрея Никитина. – URL: andrejnikitin.narod.ru/1-garmony.pdf / Клуб Константа. – URL: 314159.ru/vasilenko/vasilenko2.htm / Журнал о дизайне и архитектуре a3d.ru. – Новосибирск, 2010. – URL: a3d.ru/architecture/stat/258.

13. О разуме // О самом важном. Беседы Джидду Кришнамурти с Дэвидом Бомом: Пер. с англ. – 1996. – URL: lib.uka.ru/lib2/10/KRISHNAMURTI/oglawnom.html.

14. Василенко С.Л. Базовое тождество математических основ гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16069, 10.09.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.

15. Понарин Я.П. Гармонический четырехугольник // Квант. – 1991. – № 10. – С. 48-52.

16. Погорелов А.В. Геометрия. – М.: Наука, 1983. – 288 с.

17. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть 1: Пер. с нем. – М.: ОНТИ, 1937. – 432 с.

18. Депутатов В.Н. К вопросу о природе плоскостных вурфов // Московское математ. общество, 1925. – С. 109-118.

19. Задорожников К.Г. Генетическая система, как носитель принципа гармонии. Открытие Золотого Вурфа генетической системы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 11739, 24.12.2004.

20. Черняев А.Ф. Золото Древней Руси. Русская матрица – основа золотых пропорций. – М.: Белые альвы, 1998. – 144 с.

21. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии: 5-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2002. – 656 с.

22. Берже М. Геометрия: в 2-х т. Пер. с фр. – М.: Мир, 1984. – Том 1. – 560 с.

23. Клейн Ф. Неевклидова геометрия: Пер. с нем. – М.–Л.: ОНТИ, 1936. – 356 с.

24. Певзнер С.Л. Проективная геометрия: учеб. пособие. – М.: Просвещение, 1980. – 128 с.

25. Ефимов Н.В. Высшая геометрия: учеб. пособие. – Изд. 7-е, стер. – М.: Физматлит, 2003. – 584 с.

26. Weisstein E.W. Cross Ratio // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: http://mathworld.wolfram.com/CrossRatio.html.

27. Livio Mario. The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002.

28. Черепанов О. Структурный строй «золотой арифметики». Введение в секстетную теорию чисел Фидия // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16593, 26.06.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/1102-00.htm.

29. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17972, 07.04.2013. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

30. Митяй І.С. Цілісність як методологічна основа для опису пташиних яєць // Біологія та валеологія. – Х.: Нац. педагог. ун-т, 2009. – Вип. 11. – С. 72-80.

31. Дегтерева Л.Н. Анализ и синтез геометрических схем канонизированных схем изображений совершенного человека // Архитектон. – 2006. – № 16.

32. Василенко С.Л. Разбиение целого на множество аддитивных пропорциональных частей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22071, 06.05.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162943.htm.

33. Ясинский С.А. Золотое сечение в культурном и социально-экономическом развитии общества с приложениями в связи и логистике // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14661, 14.12.2007. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321077.htm.

34. Давыдов А.А., Садовская И.А. Сколько на свете счастливых людей // Вестник АН СССР. – 1990. – № 4. – С. 89-92.

35. Василенко С.Л. Гармоничное структурирование во внешней среде // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16198, 05.12.2010.

36. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

37. Ливио Марио. φ – Число Бога. Золотое сечение – формула мироздания. – М.: АСТ, 2015. – 185 с.

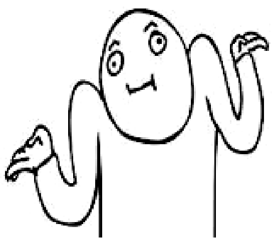
38. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 10.01.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13255.html.

39. Lawrence S. Evans, John F. Rigby. Octagrammum Mysticum and the Golden Cross-Ratio // The Mathematical Gazette. – Vol. 86, No. 505 (2002), 35-43.

40. Gunter Weiß. Golden Hexagons // J. for Geometry and Graphics. – Vol. 6, No. 2 (2002), 167-182.

Харьков, Украина

Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html



P.S. *или З.Ы. по-русски.*

Профессор А. Шелаев (Москва, РФ), как-то справедливо подшучивая над нашими увлечениями-исследованиями свойств 12 (числа) в основаниях мироустройства, предложил для разнообразия расширить спектр и "пробежаться", к примеру, по числу 21.

Анализ этого числа, по иронии, мог бы приблизить к решению проблемы карточной игры в "очко", а также проблематики трех карт в "Пиковой даме" А. Пушкина.

Сдается, потоки социальной энергии всё-таки переносятся.

Во всяком случае, мы получили первый "очковый" результат. – Пока в виде номера последней страницы данной статьи. – Всё вышло само собой. Без преднамеренной подгонки.

Ну что ж, лиха беда – начало. Видимо, продолжению быть…