Триномы старших степеней:

от деления пополам и золотого сечения – до модели единичного абсолюта

С.Л. Василенко, д.т.н.

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Исследуются триномиальные математические модели – трёхчлены. Показано, что они обладают характерным свойством всеобщности, охватывая жизненно-важные конструкции и формализованные объекты. Триномы включают в себя биологическое деление клеток пополам и золотую пропорцию в филлотаксисе растений. Содержат два минимальных числа Пизо с их особенными вычислительными свойствами. В предельном случае имеет место условно-божественная модельная структура единицы-константы, как универсальная монада: «Я есмь всё».

Мир бесконечен, поэтому любое событие
неизбежно, даже невозможное

Постановка задачи: как корабль назовешь, так он и поплывет

В своих публикациях мы не раз, хотя и несколько фрагментарно, обращались к анализу триномиальных моделей в виде алгебраических полиномов, содержащих три слагаемых.

Трином в математике (греч. *treis* – три и *nomos* – член) – трехчленное выражение.

Приобщение к данной теме в основном обусловливалось исследованием подходов к математическому моделированию тринитарной структуры, которая в частности, нашла широкое распространение в философии, системотехнике, математической логике, современном христианстве и др.

В данном случае для нас представляет интерес триномиальная структура $x^m - x^{m-1} - 1$ с её обособленным случаем – золотым сечением (ЗС) при $m = 2$.

Примечательно, но именно вследствие этой преемственности, некоторые исследователи искусственно «выкрашивали золотой терминологией» все остальные решения тринома, включая деление пополам ($m = 1$).

Этим самым наводился исторический лоск-налет на представляемый материал с посылом на древние знания, и в то же время маскировалось-прикрывалось откровенное заимствование чужих идей и результатов, без каких было ссылок.

Одновременно нарушались установившиеся традиции в мировой науке, да и просто здравый смысл, согласно которым золотое сечение, кроме прочего, – это математическая константа. Последняя в принципе не подлежит обобщению, и получила данное общепринятое название с момента своего первого появления в публикациях Мартина Ома (1835), как «goldener Schnitt» [1].

Задачей настоящей работы является анализ-объединение и развитие разрозненных знаний об упомянутой триномиальной структуре, названной нами «триномом старших степеней» [2]. Конечная цель – раскрытие подлинных свойств тринома, полезных для обобщения, и устранение терминологического нигилизма в этой области знаний.

На кроличьей ферме Фибоначчи: кролики – это не только ценный мех…

Задача <золотого сечения> в историческом измерении восходит к античным сочинениям греческих математиков и наиболее полно представлена в геометрических построениях, изложенных в "Началах" Евклида [3].

Позже в 12-м веке задача получила своё неожиданное развитие-проявление в целочисленных рядах. Прежде всего, в числах, носящих имя Фибоначчи, – элементах рекуррентной последовательности (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 ...), где каждое последующее число равно сумме двух предыдущих, начиная с априори заданной пары (0, 1).

Следует сказать, что сами числа были хорошо известны ещё в Южной Азии [4, с. 126], в частности, древней Индии, где они применялись в метрических науках.

За многие века до того, как впервые появились в Европе с известной задачей о размножении кроликов. Так что "ушастая тема" была придумана ученым Фибоначчи уже на готовом числовом материале из Азии, скорее всего почерпанном из уст «купеческого информагентства», более других приобщенного к таинствам натурального счёта [5].

Хотя в смысле жизненности биологической популяции кроликов задача получилась, мягко говоря, несообразной и далекой от реальной жизни.

Ибо кролики до своего репродуктивного возраста слишком уж быстро не растут. Потомство у них всегда больше двух. Длинноухие животные вечно не живут и т.п.

Но тем впечатлительнее вычислительные аспекты задачи, переводящие более-менее реальные вещи в абстрактно-отвлеченную математическую плоскость.

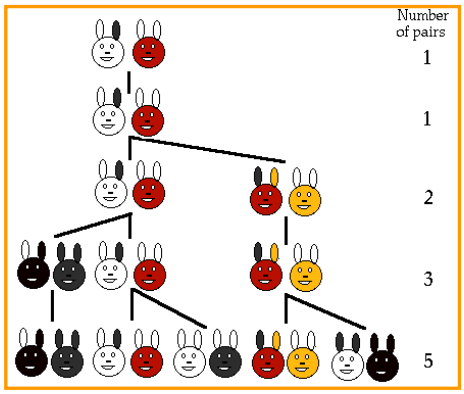
Как пример идеализации. С разнообразными интерпретациями.

Например, если условно рассаживать животных, например, по схеме: кролик–анфас – 1 и кролик–профиль (вид с боку) – 2, то можно выстраивать разнообразные двоичные последовательности. Наподобие костяшек обычного домино.

Примечательно, но представление разных способов суммирующей сборки из 1 и 2 (положений кроликов) описывается числами Фибоначчи [6].

Соответственно отношение вариантов аддитивной сборки двух соседних целых чисел в виде последовательности единиц и двоек стремится к константе золотого сечения.

Решение задачи в формулировке Фибоначчи описывается рекуррентной формой $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с эквивалентно-характеристическим алгебраическим уравнением $x^2 = x + 1$.



В качестве единицы измерения выступают пары кроликов f_n в дискретные моменты времени n – месяцы.

Здесь важны два начальных обстоятельства:

– взрослая пара кроликов ежемесячно приносит одну пару приплода, – слагаемое f_{n-1}.

– новорожденная пара месяц взрослеет, и ещё через месяц также рождает пару кроликов, то есть даёт потомство через два месяца, – слагаемое f_{n-2}.

В итоге популяция кроликов в замкнутом изолированном пространстве описывается замечательной двучленно-аддитивной рекурсией $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, которая легла в основу теории разностных (возвратных) уравнений [7] вместе с арифметической прогрессией и др.

Более того, своим предельным отношением-аттрактором соседних элементов она оказалась связанной с замечательной математической константой золотого сечения $\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 \approx 1{,}618$ – положительным корнем квадратного уравнения $x^2 = x + 1$.

При этом обратная величина равна $\phi = \Phi^{-1} = \Phi - 1 = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0{,}618$ так, что $\phi + \phi^2 = 1$. – Это и есть золотое аддитивное разбиение-сечение отрезка единичной длины.

Структурно данная математическая форма отличается минимально возможной простотой в классе аддитивных конструкций, имея принципиальные отличительные особенности в правой формообразующей части [8]:

– два слагаемых как наименьшая совокупность, – меньше просто не бывает;

– два рядом стоящих дискретных момента времени с минимальными запаздываниями;

– два целочисленных единичных коэффициента.

Другими словами, налицо три пары "минимальных возможностей" [5].

Коровье стадо Нараяна

На кроликах дело не закончилось. Со временем в ход пошли более крупные животные.

Индийский математик Нараян в 14 веке предложил следующую задачу.

Корова производит одного теленка каждый год.

Через три года, начиная с четвертого, каждая выросшая особь производит одного теленка ежегодно. Сколько коров будет через 17 лет?

Подразумевается, что юное поколение коров, в отличие от быстроразмножающихся кроликов, "проскакивают" одну стадию, как промежуточную фазу созревания.

Когда юные пары дорастают до незрелых особей, после чего становятся взрослыми, и лишь затем могут размножаться (рис.1).

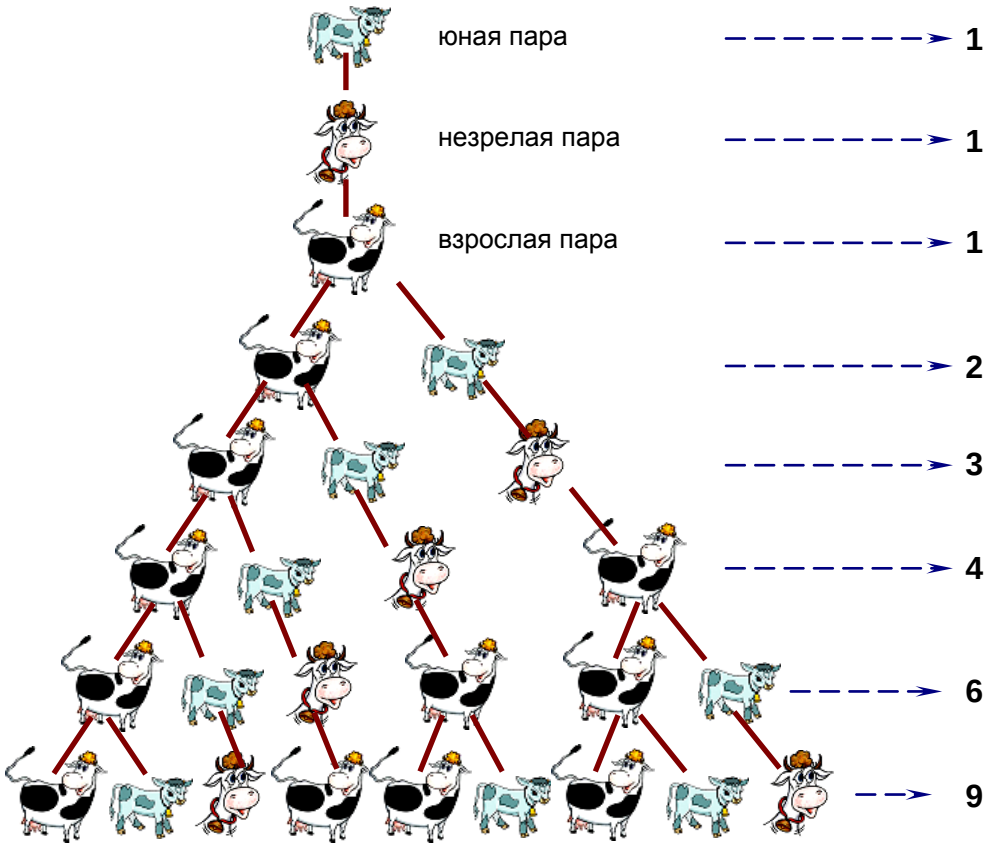


Рис. 1. Начало последовательности коров Нараяна

Соответствующую рекурсию $f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$ для характеристического алгебраического уравнения $x^3 = x^2 + 1$ иногда называют «коровьей последовательностью» [9, с. 47].

Соответственно употребляются термины: «сверхзолотое число» и «сверхзолотой прямоугольник» [9, с. 51].

Хотя на наш, взгляд подобная оценка, да ещё с позолотой, скорее всего, носит эмоциональный характер и подчеркивает, что числа Фибоначчи с их золотым аттрактором не единственны и допускают расширение в похожем числовом подмножестве.

Коровья последовательность Нараяна имеет вид, A000930 [10]:

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873, 2745 …

Так что, если все животные выживут, то через 17 лет их будет 406.

Степенное направление развития модели ЗС: направо пойдешь – трином найдешь, налево – ЗС потеряешь, прямо пойдешь – жив будешь, но в лженауку попадешь…

Если взять за основу модель золотого сечения и попытаться придать ей динамику развития, то можно выйти на самые различные уровни, вплоть до алгебраического уравнения общего вида. Понятно, что от самой структуры ЗС, не говоря уже о константе золотого сечения Ф, при этом остаются «рожки да ножки».

Усложнять модель можно разными путями-способами. Один из них заключается в наращивании целой степени многочлена, оставляя по-прежнему три члена, как и в квадратном уравнении.

Для квадратного уравнения ЗС $x^2 = x + 1$ и золотой пропорции $x = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ имеем два отношения: сумма (единичное целое $a + b = 1$) – к части, и отношение самих частей. Повышать порядок модели можно двояко: относительно правой или левой частей.

1) Пусть переменная равна отношению целого к части $x = 1/a$.

Тогда имеем $(1/a)^{m-1} = \frac{a}{b} = \frac{a}{1-a} = \frac{1}{1/a - 1}$ или $x^{m-1} = \frac{1}{x-1}$, откуда получаем триномиальное уравнение с сохранением "связки" старших степеней $x^m = x^{m-1} + 1$.

При этом часть целого равна $a_x = x^{-1}$, изменяясь от 0,5 до 1 (рис. 2).

В понятиях-образах гиперкуба имеет место формула $a_x^m = 1^{m-1} \cdot b_x$.

2) Пусть переменная равна отношению частей $z = a/b$. Тогда имеем $(a/b)^{m-1} = \frac{a+b}{a} = \frac{a/b + 1}{a/b}$ или $z^{m-1} = \frac{z+1}{z}$, откуда получаем триномиальное уравнение с сохранением "связки" младших степеней $\left(z^1,\ z^0\right) = (z,\ 1)$ или двучленно-аддитивную модель с запаздыванием (задержкой) $z^m = z + 1 \ \leftrightarrow\ z_n = z_{n-m+1} + z_{n-m}$.

При этом часть целого равна $a_z = z(1+z)^{-1}$, изменяясь от 1 до 0,5.

В понятиях-образах гиперкуба справедливо равенство $a_x^m = 1 \cdot b_x^{m-1}$.

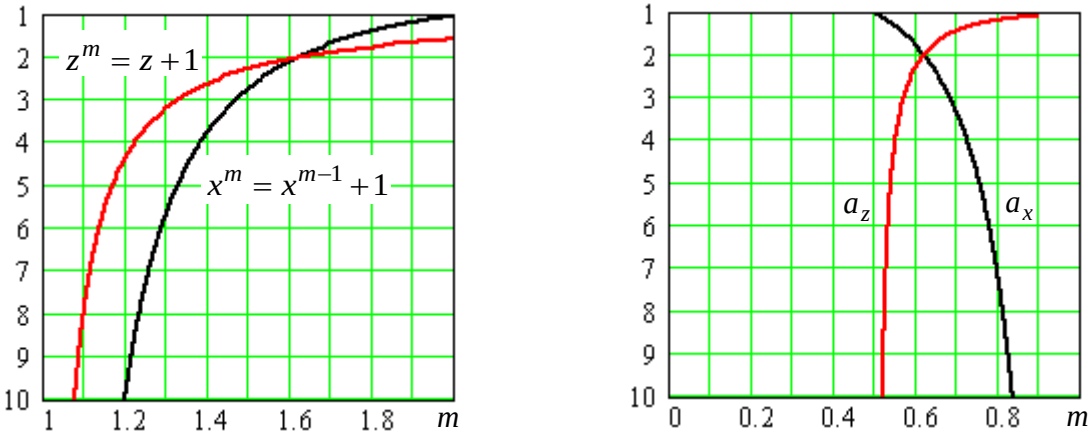


Рис. 2. Корни триномиальных полиномов для степенного развития модели золотого сечения и одна из двух соответствующих частей целого

В частности, трином $z^3 = z + 1$ и эквивалентная ему рекурсия $z_n = z_{n-2} + z_{n-3}$ – дают последовательность Падована A000931 [10]. Другие степени представлены числовыми рядами: A079398, A103373–A103380.

Гей, славяне! Вот и мы.

В славянской "золотой" группе русскоязычных исследователей (профессор А. Стахов и др.), с их стародавней терминологической идеей "золотить" чуть ли не все алгебраические уравнения, корни рассматриваемых триномов без обоснований объявлены «золотыми p-сечениями».

На наш взгляд, слово "золотые" – совершенно лишнее, поскольку в общем случае решения выходят далеко за рамки традиционного золотого сечения, связь с которым бесповоротно обрывается для всех триномов, выше третьей степени.

Запись "p" вообще произвольна, лишена смысловой нагрузки и определена исключительно вольным использованием буковки p в аналогичной модели $x^{p+1} = x^p + 1$.

Плюс подборка очевидных и давно известных сведений с их выстраиванием в некую область с условным названием «математика гармонии» и её крайне скудным арсеналом вычислительных возможностей и объективно ограниченным развитием [11].

Поэтому основные авторские усилия ушли на мало результативное отстаивание позиции запоздалого первенства в конструировании данного тринома, о чем подробно изложено в работах [12, 13, 14].

Плюс к этому многолетние недоразумения с цитированием математика Дж. Пойа.

Хотя после длительных упорств и подводится итог: [15]: «к p-числам Фибоначчи раньше меня пришли математики-фибоначчисты (в частности, Вернер Хоггатт) при исследовании диагональных сумм треугольника Паскаля, но понятие "золотых p-сечений", насколько мне известно, было введено мною впервые».

То есть содержательная часть обменивается на название…

Воистину, научный путь тернист!

Тем не менее, приставка "золотые" остаётся рудиментом, не имеющим особого смысла.

Слово "сечение" вообще под вопросом, поскольку физическая интерпретация чисел не сводится только к сечению геометрического отрезка, а их толкование выходит далеко за пределы геометрии.

Ассоциация Фибоначчи: профи-разговор…

В своих замечаниях всегда нужно быть или, по крайне мере, стараться быть беспристрастным. И максимально сохранять объективность. Особенно, когда это касается критических высказываний.

В связи с этим особо отметим, что расширение «золотистой терминологии» порой имеет место и в такой профессиональной среде, как математическая организация «The Fibonacci Association», основанная в далеком 1963 г.

Хотя, нужно сказать, «золотой окрас» все же там используется более-менее корректно.

Например, в работе [16] «Обобщение золотого сечения», по сути, рассматривается обобщение задачи ЗС. Однако само решение терминологически уже не называется золотым.

П. Энгстром хотя и несколько обтекаемо, но достаточно строго, разделяет [17] сечения с алгебраической формой $x^2 = x + q$ «на золотое и не очень золотые».

Тем самым он подчеркивает, что сечения похожи на ЗС своим происхождением, но таковыми всё-таки не являются.

На уровне условно называемых «золотых полиномов» известны также обобщения, задаваемые рекурсией типа [18, 19]

$$f_n(x) = x \cdot f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$$

с начальными условиями $\{f_0(x),\ f_1(x)\} = \{1,\ x\}$ – полиномы Фибоначчи, $\{f_0(x),\ f_1(x)\} = \{2,\ x\}$ – полиномы Лукаса и другие всевозможные варианты с любопытным рекурсивным уравнением [18]:

$$x = 1 + \underbrace{\cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{x}}}}}}_{n-1\ x's}.$$

Максимальные вещественные корни g_n этих полиномов иногда называют «золотыми числами» [19] или «золотыми отношениями более высокой размерности-порядка» [18] с их предельным значением $g_n \to 1{,}5;\ n \to \infty$. Например, по аналогии с золотым кубоидом Хантли, рассматривается «платиновый кубоид».

Следуя [18], в статье китайские авторы [20] допускают возможность словосочетания «обобщенных золотых чисел» для решения «золотых полиномов» с начальными условиями $\{f_0(x),\ f_1(x)\} = \{-a,\ x-a\}$, где a – вещественное число.

При этом сама золотая константа Ф по их терминологии всё равно выделяется особым образом и называется «оригинальным золотым числом»! Кстати, в пределе вещественные корни полиномов стремятся к единице только в одном случае, когда a = Ф.

Решения квадратных полиномов $x^2 - px - 1$ для различных коэффициентов p С. Бредли называет приближенными ЗС (около ЗС – nearly golden sections) [21].

Исторический *p*-изоморфизм

Прежде всего, вызывает недоумение сам факт суматохи-суеты "золотосеченцев" с упомянутой алгебраической структурой. «Каким-то не характерным для науки постоянным и неотступным освидетельствованием её наличия-присутствия в безмерном океане человеческих знаний» [14].

Всё это так удивительно, ибо триномиальные формы старших степеней $x^{p+1} = x^p + 1$ глубоко и основательно исследованы в ряде работ (только вдуматься!) более полувека назад.

В том числе, как частные случаи разных вариантов общих характеристических уравнений, например,

$x^s = x^r + 1$, *Dickinson* (1950) [22];

$x^{p+1} = ax^p + b$, *Raab* (1963) [23];

$x^p(x-1)^q = 1$, *Harris* (1964) [24].

Примечательно, что у этих авторов никогда не возникала мысль называть корни данных уравнений – "золотыми сечениями".

Хотя все они содержат ЗС отдельным частным эпизодом. Как впрочем, и алгебраическое уравнение общего вида в своих бесконечных вариациях в зависимости от степени полинома, количества слагаемых, значений коэффициентов и т.д.

Так, согласно модели Харриса $x^p(x-1)^q = 1$ [24] аналитическая форма для чисел эквивалентной обобщённой последовательности Фибоначчи (по типу формулы Муавра–Бине) с традиционно единичными начальными условиями $f_k = 1,\ k = \overline{0, v-1}$ имеет вид

$$f_n = \sum_{i=1}^{v} \frac{\lambda_i^{n+1}}{v\lambda_i - p}, \qquad (1)$$

где λ_i – корни характеристического уравнения, $v = p + q$ – количество этих корней.

Данное соотношение находится путём составления системы уравнения на основе начальных условий и её решения по правилу Крамера с вычислением определителя матрицы Вандермонда, составленной построчно из термов-членов геометрической прогрессии.

В этой связи невольно вспоминается работа [25], которая была специально посвящёна получению формулы Бине типа (1) для числовых p-рядов, но так и не выведена. Между тем, ей полвека.

Элементы последовательности Фибоначчи можно также вычислять с помощью комбинаторной формулы через элементы треугольника Паскаля

$$f_n = \sum_{i=0}^{n/v} C_{n-ip}^{iq} . \tag{2}$$

Отметим, что в работах современных золотоискателей часто и верно говорится о комбинаторной связи p-рядов Фибоначчи с треугольником Паскаля. Но аналитической конечно-суммирующей формулы (2) вы там просто не найдёте. Хотя ей ~ 50 лет отроду.

Имеем также сравнительно простую аналитическую форму для суммирования элементов ряда:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \, C_{q-1}^{i} f_{n+v-i}$$

с её разнообразными вариациями [24] и т.д.

Все эти, как впрочем, и многие другие давно известные равенства, в своём частном случае $q = 1$, безусловно, справедливы для триномиальной модели старших степеней $x^{p+1} = x^p + 1$ или p-сечений.

Свойства тринома старших степеней

Рассматриваемые трёхчленные полиномы [2,26] основаны на характеристическом алгебраическом уравнении триномиального типа с наличием двух старших степеней и эквивалентной ему разностной схеме:

$$\begin{aligned} x^m &= x^{m-1} + 1, \\ z_{n+m} &= z_{n+m-1} + z_n, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Степень у последнего третьего члена полинома естественно является нулевой. Иначе можно просто сократить на x.

Форма (3) соответствует давно известной в математике [27, с. 329–347] взаимосвязи между алгебраическим уравнением с постоянными коэффициентами и линейным возвратным (разностным) аналогом, порождающим рекуррентные последовательности.

Индексы n, m – не обязательно годы, но периоды-интервалы дискретности (не путать со словом "дискредитация").

Достижение репродуктивного возраста согласно рекурсии (3) теперь вариабельно: новорожденные кролики дают первое потомство через m дискретных интервалов: $m-1$ на взросление и один – на вынашивание.

В общем случае алгебраическое уравнение $x^m = x^{m-1} + 1$ высоких порядков не имеет аналитического решения и его положительный корень (аттрактор последовательности) определяется численными методами.

Отдельные описания модели можно найти в целочисленной энциклопедии:

$x^3 = x^2 + 1$, A000930; $x^4 = x^3 + 1$, A003269; $x^5 = x^4 + 1$, A003520; $x^6 = x^5 + 1$, A005708 …

Сделав замену переменных $y = x^{-1}$ и приведя исходный трехчлен к виду $y^m = 1 - y$, решение тринома старших степеней можно представить посредством встроенных корней:

$$x = \left(\sqrt[m]{1 - \sqrt[m]{1 - \sqrt[m]{1 - \ldots}}}\right)^{-1}.$$

В общем случае имеем семейство последовательностей с рекурсивной формой $f_n = f_{n-1} + f_{n-m}$, единичными начальными условиями и генерирующей функцией $\dfrac{1}{1 - x - x^m}$.

Это семейство биномиальных сумм или рекурсий дает количество способов покрытия (без наложения-пересечения) линейной решетки длиной n молекулами длиной m.

Или покрытия отрезка n множеством интервалов-отрезков m.

Числовые последовательности с единичными начальными условиями имеют вид:

m=1) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536 …

2) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946 …

3) 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873, 2745 …

4) 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, 36, 50, 69, 95, 131, 181, 250, 345, 476, 657, 907, …

5) 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, 34, 45, 60, 80, 106, 140, 185, 245, 325, 431, …

6) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 16, 21, 27, 34, 43, 55, 71, 92, 119, 153, 196, 251, 322 …

Одна из интерпретаций элементов данных рядов связана с разбиением числа – его представление в виде суммы положительных целых чисел, называемых частями.

При этом в отличие от композиций (упорядоченных разбиений) порядок следования частей не учитывается.

Имеют место следующие закономерности:

f_{n+m} – количество композиций числа n на части, каждая из которых не меньше величины m, то есть $\geq m$, $n \geq m$;

f_n – количество композиций числа n на части 1 и m;

f_n – количество композиций числа $n+1$ на части $= 1 \pmod m$;

$2f_{n-m}$ – количество 2-цветных композиций числа n со всеми частями $\geq m$, так что нет соседних частей, имеющих одинаковый цвет, $n \geq m$. Композиции n, в котором каждый натуральное число, окрашенные одним из c различных цветов называется c-цветные композиции n.

f_{n+m} – количество двоичных слов длиной $n+1$, имеющих, по меньшей мере, $m-1$ нулей между каждыми двумя последовательными единицами.

Например, для модели пятого порядка $m = 5$ и $n = 12$:

имеем $f_{12} = 11$ композиций числа 16 на части, которые не меньше пяти:

16 = 11+5 = 10+6 = 9+7 = 8+8 = 7+9 = 6+10 = 5+11 = 5+5+6 = 5+6+5 = 6+5+5;

имеем $f_{12} = 11$ композиций числа 11 на части 1 и 5:

111111111111, 1111115, 1111151, 1111511, 1115111, 1151111, 1511111, 5111111, 155, 515, 551.

Для модели третьего порядка $m = 3$ и $n = 9$ имеем 19 композиций на части, равные 1 (mod 3), то есть части вида $3k+1$: 1, 4, 7, 10 …:

1111111111, 1111114, 1111141, 1111411, 1114111, 1141111, 1411111, 4111111,
1144, 1414, 1441, 4114, 4141, 4411, 1117, 1171, 1711, 7111, (10).

При единичных начальных условиях $f_j = 1,\ j = \overline{1, m}$ имеет место формула в виде биномиальной суммы

$$f_n = \sum_{j=0}^{n/m} C_{n-j(m-1)}^{j}.$$

Разумеется, несколько первых d начальных значений могут быть нулевыми. Соответственно на эту величину сдвигается индексы элементов f_{n+d}.

Выполним суммирование:

$$+\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-m}, \\ f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-m-1}, \\ \dots \\ f_{n-m+1} = f_{n-m} + f_{n-m+1}, \end{cases}$$

$$f_n = f_{n-m} + f_{n-m-1} + \dots + f_{n-2m+1}.$$

Последняя запись похожа на модель m-боначчи, но только с m-запаздыванием.

Представляет интерес определения элементов ряда в матричном исчислении. В частности, через производящую матрицу, которая в своём построении универсальна и применима к алгебраическому уравнению общего вида (см. приложение).

Пример вычислений числовых элементов триномиальной рекурсии пятого порядка с единичными начальными условиями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 185 \\ 245 \\ 325 \\ 431 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{27} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1001 \\ 1326 \\ 1757 \\ 2328 \\ 3084 \end{pmatrix}$$

Как демонстрационная версия, для модели $x^4 = x^3 + 1$ и произвольных начальных условий $\delta = (4\ 3\ 2\ 1)^{\mathrm{T}}$: 4, 3, 2, 1, 5, 8, 10, 11, 16, 24, 34, 45, 61, 85, 119, 164, 225, 310, 429 …

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 45 \\ 61 \\ 85 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{15} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164 \\ 225 \\ 310 \\ 429 \end{pmatrix}$$

Кубический вариант $x^3 = x^2 + 1$ (A000930) имеет положительный корень:

$$\lambda = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{29}{2}\right) + \frac{1}{3} \approx 1{,}46557\ldots - \text{A09252}.$$

В геометрической интерпретации триномиальная модель старших степеней представима как деление целого на две составные части $a+b=1$: целое относится к квадрату одной части, как она – к другой (рис. 3).

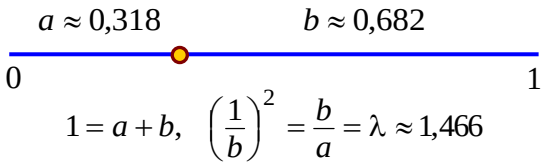


Рис. 3. Геометрическое представление триномиальной модели старших степеней $x^3 = x^2 + 1, \quad x = 1/b$

Если в модели золотого сечения $a = b^2$, то здесь $a = b^3$.

В общем случае, перейдя от переменной-отношения целого и его части $x = 1/b$ к самой части b, получаем тождественные преобразования

$$b^{m+1} + b = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{b}{1-b}.$$

Возможная интерпретация пропорции определяется так:

часть так относится к своему отклонению,
как квадрат (гиперкуб) на целом – к квадрату-гиперкубу на этой части.

Введение дополнительного целочисленного коэффициента p

$$x^{m+1} = px^m + 1 \quad \Rightarrow \quad x - x^{-m} = p$$

позволяет делать сравнение: число и m-я степень обратного числа имеют равные мантиссы.

Или в другой записи с целочисленным коэффициентом q

$$x^{m+1} = x^m + q \quad \Rightarrow \quad x^{m+1} - x^m = q,$$

где две "соседние" степени числа имеют равные мантиссы.

В зависимости от значений коэффициентов p, q получаем два бесконечных множества чисел x, удовлетворяющих разным вариациям в сравнении мантисс.

Числа Пизо

Напомним, целое алгебраическое число $\alpha > 1$ называется числом Пизо [28, с. 162] или Писота [29], если все его сопряжённые, отличные от самого α, лежат внутри круга $|z| < 1$, то есть по абсолютной величине строго меньше единицы.

Другими словами, число Пизо – положительное алгебраическое целое число, большее единицы, такое, что все его сопряженные элементы по абсолютной величине меньше 1.

Числа Пизо обладают одним удивительным свойством: **их степени «почти целые»** [30]. Именно эта уникальная особенность делает их удобными кандидатами в качестве иррациональных оснований систем счисления. Для степеней не выше пятой $m \le 5$ исходный трином старших степеней приводит к числам Пизо:

$$x^5 = x^4 + 1 \;\Rightarrow\; 1{,}32471795724474602 60\ldots$$

$$x^4 = x^3 + 1 \;\Rightarrow\; 1{,}38027756909761411 57\ldots$$

$$x^3 = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; 1{,}46557123187676802 67\ldots$$

$$x^2 = x + 1 \;\Rightarrow\; 1{,}61803398874989484 82\ldots$$

Первое из этих чисел является одновременно положительным корнем уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ и наименьшим число Пизо.

Множество чисел Пизо замкнуто и потому содержит наименьший элемент.

С повышением порядка тринома старших степеней $x^m = x^{m-1} + 1$ его корни уменьшаются, из чего следует, что для степеней $m > 5$ трином уже не даёт числа Пизо.

Вследствие этого, максимальные по модулю корни тринома в этом случае перестают быть подходящими кандидатами в качестве иррациональных оснований систем счисления [31].

Действительное решение алгебраического характеристического уравнения $x^3 = x + 1$. также известно как пластиковая константа (пластическое число ρ), равная $\rho = \dfrac{\sqrt[3]{9-\sqrt{69}} + \sqrt[3]{9+\sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} = \dfrac{c}{6} + \dfrac{2}{c} \approx 1{,}3247$, где $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}$ или в виде бесконечно вложенного радикала $\rho = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \ldots}}}$.

Название *пластическое* было дано Гансом ван дер Ланом (1928) и соотносилось с пластикой или приданием трёхмерной формы вследствие кубического порядка образующего уравнения.

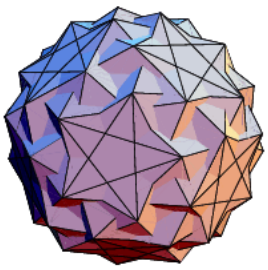
Поэтому называть пластическое число ρ серебряным, как это иногда делается, ни исторически, ни онтологически не верно [32].

Известны все 38 числа Пизо, не превышающие константу золотого сечения (Dufresnoy & Pisot, 1955) [31, прилож.].

За исключением образующего полинома $x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$, все остальные полиномы имеют вид:

$$R_{n+1}(x) = x^n \cdot \Phi_x + 1 \quad \text{или} \quad S_{n+2}(x) = x^n \cdot \Phi_x + x^2 - 1,$$

где $\Phi_x = x^2 - x - 1$ – "золотой" трином.



Примечательно, что в своей записи они имеют встроенный полином золотого сечения $x^2 - x - 1$.

Минимальное число Пизо ρ удивительным образом взаимоувязано с золотым сечением через метрические свойства необычного тела – snub icosidodecadodecahedron [33].

С одной стороны, в своей геометрии оно содержит явные признаки константы ЗС, через правильную пятиугольную звезду.

С другой стороны, радиус описанной сферы равен: $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\rho - 1}{\rho - 1}}$.

Связи-разнообразия степеней: как аукнется, так и откликнется

Вид отдельных рекурсий может быть изменен к форме ближайших элементов f_{n+1} и f_n, в частности, с характеристическим уравнением $x^5 = x^4 + 1$.

Действительно:

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-3} = (f_{n-4} + f_{n-5}) + f_{n-3} = (f_{n-3} + f_{n-4}) + f_{n-5} = f_{n-1} + f_{n-5}.$$

Или в алгебраической форме:

$$x^3 = x + 1, \quad x^4 = x^2 + x \quad \Rightarrow \quad x^5 = x^3 + x^2 = x + 1 + x^2 = \left(x^2 + x\right) + 1 = x^4 + 1.$$

Триномиальная модель старшей пятой степени раскладывается на произведение двух триномов $x^5 - x^4 - 1 = \left(x^3 - x - 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$, в результате чего имеет вещественный корень, совпадающий с корнем алгебраического уравнения $x^3 = x + 1$, и пластиковую константу ρ.

Рекуррентный ряд $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$, $(f_0, f_1, f_2) = (0, 0, 1)$ – прообраз Фибоначчи, только с запаздыванием на один шаг, известен как числа Падована (A000931). Относительно кроликов можно интерпретировать как месячный отдых между очередными рождениями потомства, или увеличение периода вынашивания на один месяц [5].

Триномиальная рекурсия $x_n = x_{n-1} + x_{n-3}$ после последовательных преобразований имеет вид $x_n = x_{n-3} + x_{n-4} + x_{n-5}$ или в алгебраической форме $x^3 = x^2 + 1 \;\rightarrow\; x^5 = x^2 + x + 1$, то есть становится суммой трёх последовательных элементов ряда, но с запаздыванием на два интервала.

Аналогично рекурсия $x_n = x_{n-1} + x_{n-4}$ преобразуется как $x_n = x_{n-3} + x_{n-4} + x_{n-5} + x_{n-6}$ или в алгебраическом виде $x^4 = x^3 + 1 \;\rightarrow\; x^6 = x^3 + x^2 + x + 1$, представляя сумму четырёх последовательных элементов числового ряда с запаздыванием на два интервала.

Единичная последовательность: универсальный абсолют…

Для $m \to \infty$ и единичного начального условия рекурсия $f_n = f_{n-1} + f_{n-\infty}$ дает наипростейшую последовательность A000012 (http://oeis.org/A000012) положительных чисел, все члены которой равны единице $f_n = 1$.

Несмотря на свою очевидность, числовой ряд имеет множество реальных математических свойств, например:

– количество способов написания n в виде произведения простых чисел;
– количество способов написания n в виде суммы различных степеней числа 2;
– основа-предтеча цепной дроби для константы золотого сечения

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} \approx 1{,}618;$$

– наименьший делитель n;
– пример бесконечной последовательности натуральных чисел, чьи различные парные конкатенации (сцепления, присоединения) – все простые числа 11;
– биномиальное преобразование [34] "нулевой" последовательности – характеристической функции нуля $0^n = 1,0,0,0,0,0,\ldots$;
– обратное биномиальное преобразование двоично-степенной функции $2^n = 1,2,4,8,16,\ldots$;
– абсолютное значение определителя матрицы $\begin{pmatrix} n & n+1 \\ n+1 & n+2 \end{pmatrix}$;
– разница соседних чисел натурального ряда; сами парциальные (текущие) суммы образуют натуральный ряд $\sum_n f_n = n$;
– десятичное расширение-представление дроби $1/9$;
– квадрат транспозиции $\sigma_i^2 = 1$ (меняющей местами i-й и i+1-й элементы) симметрической группы S_n;
– число 0-регулярных графов на n вершинах, – нуль-граф состоит из изолированных вершин (без ребер);
– нулевая степень натуральных чисел $f_n = n^0 = 1$;
– последовательность предельных значений $f_n = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = 1$.

Примечательно, что первоначальное определение метра был одной десятимиллионной частью расстояния от экватора Земли к Северному полюсу. Согласно этой исторической дефиниции, длина одного градуса широты, то есть 60 морских миль, равна 111111,111... м.

Имеет место также одно любопытное наблюдение [31].

Согласно теореме Кузьмина [35, с. 13] вероятность появления среди элементов a_i натурального числа k задается эффективной формулой

$$v_k = \lg_2\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) = \lg_2\left(\frac{k+1}{k}\frac{k+1}{k+2}\right).$$

То есть в цепных дробях совокупного множества вещественных чисел наиболее вероятным является всё-таки присутствие единицы

$$v_1 = \lg_2\frac{4}{3} \approx 0{,}42.$$

А уже потом следуют двойки, тройки и т.д.

Но, есть единственно уникальное образование – бесконечная цепная дробь для постоянной Ф, когда все элементы a_i представляют собой единицы.

Иначе говоря, в этом случае «плотность единиц равна единице» (по Кузьмину).

Такой редчайший эпизод приводит к константе золотого сечения Ф!

Терминологическое антизолочение: не мытьем, так катаньем…

Легко заметить, что при синтезе структур для ЗС складывается каждое второе начальное условие и соответствующая ему ячейка-монада (допустим по четным номерам), затем – то же самое, но уже по нечетным номерам.

И так многократно, – до формирования некоторой целостной структуры, например: растения, животного, планеты и т.п. [12].

Для исходного уравнения $x^3 = x^2 + 1,\ m = 3$ и его обобщенного вида

$$x^{3k} = \sum_{j=1}^{k} x^{3j-1} + 1 = x^{3k-1} + x^{3k-4} + x^{3k-7} + \ldots + 1$$

суммируется уже каждая третья ячейка из выбранного многообразия любой природы и любой сложности, – пусть даже порядка количества молекул в Млечном Пути.

Затем группируются следующие ячейки: также через две, но со сдвигом, и так далее до образования законченного формирования.

Собственно это и есть физический смысл чисел, характеризуемых триномом старших степеней, когда **обобщается не ЗС, а задача многомерного синтеза структур**.

Что касается интерпретации на геометрическое сечение, то это – из области математической пропорции, когда каждой секущей точке соответствует самостоятельная и единственная в своем роде пропорция, – ни с чем не сравнимая, и на что не похожая.

Хотя по отдельным признакам она может создавать некоторые классификационные группы с другими числами

Заметим, что изложенный подход отличается от [36] и других подобных работ методологически, поскольку направлен на бережное сохранение связки двух старших степеней алгебраических уравнений, что дает важные преимущества на уровне физической реализуемости моделей и алгоритмов. В переводе во временные категории такое деяние означает, что будущее главным образом зависит от настоящего, а уже потом от прошлого.

В теории гармонической пропорции это удивительным образом сочетается с тем, что преемственность прошлого–настоящего входит в будущее с одним весом.

Именно с этим связана уникальность и неповторимость ЗС. В то время как "обобщенные" ЗС относятся к категории псевдо, мифов и искусственных "позолот ".

Такое уникальное сочетание системы «вчера – сегодня – завтра» неповторимо в принципе, откуда и вытекают все замечательные свойства чисел Фибоначчи (именно чисел! – а не других последовательностей Фибоначчи, отличных от двучленно-аддитивной структуры) и золотого сечения.

Малейший сдвиг, хотя бы на уровень уравнения $x^3 = x^2 + 1$, означающего новую системную связь типа «позавчера – сегодня – завтра» и ЗС со своими "фибоначчатами" испаряется, уступая место новым закономерностям, которые также имеют право на существование, наличествуют в природе, но уже не имеют к ЗС никакого отношения.

Условная смена "вчера на позавчера", – это не просто внешняя форма альтернативного решения, а это иная качественная философия, которая может иметь место в структурировании систем с запаздыванием, но почти полностью выключается из процесса непрерывного дления-времени.

Божественные интерпретации-аналогии или единство в многообразии…

Итак, общим свойством кроличьей и коровьей последовательностей является наличие условно-дискретного времени на развитие животных до половой зрелости.

Естественно, чем дольше это развитие, тем меньше прирост «живого населения». А значит, больше разрыв между рождением и способностью к размножению.

Следовательно, снижается отношение поголовья соседних лет – дискретных моментов. То есть значение корня уравнения уменьшается и в пределе стремится к 1.

Возникает предельно-постоянная структура $f_n = const$. Или для заданного начального значения 1 – условно-единичная «формула бога – Я есмь»

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-\infty} = 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

В рамках общей теории единичный бесконечный ряд служит формально-косвенным подтверждением идеи возможного существования бога. Во всяком случае, наука не в состоянии устранить это допущение и предполагает теоретический тезис наличия бога.

Одновременно не исключается отсутствие божественной концепции в иной системе координат метафизических воззрений.

Поскольку они равноправны, то всё сводится к вере в её классической транскрипции: «Если веришь, то бог есть. Если не веришь, бога нет»:

«Я есмь Сущий», Исх. 3:14; «Я есмь хлеб жизни», Ин. 6:35, 6:48;

«Я есмь дверь: кто войдет Мною, тот спасется», Ин. 10:9;

«Я есмь воскресение и жизнь», Ин. 11:25; «Я есмь путь и истина и жизнь», Ин. 14:6;

«Я есмь Альфа и Омега, начало и конец», Откр. 1:8, 21:6;

«Я есмь Альфа и Омега, Первый и Последний», Откр. 1:10.

Иначе говоря, «Я есмь» не просто где-то в стороне. Но везде. В каждом атоме, в каждой клеточке. «Я есмь везде».

Ноль и/или единица?

«Мы почитаем всех нулями, А единицами – себя» (А.Пушкин, Евгений Онегин).

Следуя Фреге, прежде чем говорить о единице, своего определения требует ноль.

Логико-аналитическое определение ключевых чисел выглядит следующим образом:

- «0 – это число, соответствующее понятию "не равное себе"» [37, с. 210], поскольку, под понятие "не равное себе" не подпадает ни один предмет.
- «1 – это число, соответствующее понятию "равное 0"» [37, с. 213].

Единственным предметом, который подпадает под понятие "равное 0", является само число 0, которое определено выше.

То есть «есть понятие "равное 0" и некий предмет 0, под него подпадающий».

Такие определения полностью отвечают единичному бесконечному ряду, состоящему исключительно из одних единиц. Несмотря на известные противоречия или парадоксы в определении чисел, и даже некоторые сомнения в математической состоятельности единицы.

Главное здесь – это «оставить арифметику в сфере чисто аналитических истин» [38].

Кстати, для древних греков единица тоже не была числом, а только – зародышем числа, так как в их представлении не имела свойств множественности.

Тем не менее, в логике единице присвоили "истину", а нулю – "ложь". Понятно, что это условно. Тем не менее, ноль – это ложь. Единица – истина. А множество единиц – истина абсолютная.

Тогда единичный ряд полностью адекватен (как кандидат) условно-божественной модельной структуре: единицы–константы «Я есмь ВСЁ».

Не случайно в математике принято считать $0^0 \equiv 1$, так как $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$.

В этой связи не менее интересно и значимо проявление-воплощение нуля как *предельной формализации* невидимого (глазами земного наблюдателя) божьего мира!

«Ноль как непревзойдённый архетип и ноумен» [39]:

- Бог – имманентное начало всему. Идеальный и/или абсолютный ноль.
- Нулевая формула "Бог = 0" формально объединяет в себя любые теологические формы.
- Бога нет, но его присутствие повсюду.
- Бог есмь, но не тождественен сам себе. В каждом проявлении он разный.
- Он – единственная нетривиально-глубочайшая истина, противоположность к которой в виде отрицания или обратного утверждения – есть не менее глубокая истина (по Н.Бору).

Выводы

Итак, формально-триномиальная модель $x^m = x^{m-1} + 1$ имеет широчайший спектр неординарных проявлений. От обычного деления пополам ($m = 1$) – через золотое сечение ($m = 2$), два минимальных числа Пизо – до условно-божественной модельной структуры ($m \to \infty$) с единицей-константой «Я есмь ВСЁ»:

$x = 2$, $f_n = 2 f_{n-1}$ – деление пополам;

$x^2 = x + 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ – кроличий ряд Фибоначчи с золотым аттрактором $\Phi \approx 1{,}618$;

$x^3 = x^2 + 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$ – коровья последовательность с аттрактором $\approx 1{,}466$;

$x^4 = x^3 + 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-4}$ – второе наименьшее число Пизо $\rho_2 \approx 1{,}380$;

$x^5 = x^4 + 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-5}$ – наименьшее число Пизо $\rho_1 \approx 1{,}3247$;

… … … … … … … … … …

$x^5 = x^4 + 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-\infty} \equiv 1$ – модельная структура единичного абсолюта.

Таким образом, триномиальная модель старших охватывает жизненно-важные конструкции биологического деления пополам и золотой пропорции, которая, в частности, наблюдается в филлотаксисе растений.

Трином содержит два наименьших числа (константы) Пизо, степени которых «почти целые» и наиболее пригодны в качестве иррациональных оснований систем счисления.

Наконец, трином старших степеней включает в себя бесконечный единичный абсолют, что допускает концепцию-интерпретацию божественной гипотезы.

На наш взгляд, эти представления выделяют суть главных свойств триномов старших степеней, в отличие от искусственных терминологических наслоений-золочений, которые больше подходят на анекдотическую тезу: «куры передохли, высылайте новый телескоп»…

Литература:

1. Fowler D.H. A Generalization of the golden section // Fibonacci Quarterly. – **20.2** (1982), 146–158. – http://www.fq.math.ca/Scanned/20-2/fowler.pdf.
2. Василенко С.Л. Триномиальные аналогии с золотым сечением // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 31.05.2014. – artmatlab.ru/articles.php?id=115&sm=2.
3. Василенко С.Л. «Золотой разговор» с Евклидом // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.
4. Goonatilake S. Toward a global science: mining civilizational knowledge. – Bloomington: Indiana University Press, 1998. – 318 p.
5. Василенко С.Л. Кролики в год кролика, или вечная жизнь по золотому сечению // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16303, 18.01.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161767.htm.
6. Василенко С.Л. Кролики Фибоначчи на Великой китайской стене // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16102, 08.10.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161710.htm.
7. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
8. Василенко С.Л. Периодические структуры на циферблате Фибоначчи // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15998, 14.07.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161676.htm.
9. Крилли Т. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – Пер. с англ. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с.
10. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) / Founded in 1964 by N.J.A. Sloane. – http://oeis.org/.
11. Василенко С.Л. "Математика гармонии": на распутье // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17151, 28.12.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322104.htm.
12. Василенко С.Л. Миф про обобщения золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.07.2011. – artmatlab.ru/articles.php?id=32&sm=2.
13. Василенко С.Л. Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.
14. Василенко С.Л. "Фантомы" золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 01.07.2012. – artmatlab.ru/articles.php?id=77&sm=2.
15. Музей гармонии и золотого сечения. Статьи и доклады профессора Стахова. Отчет о презентации книги проф. А.П. Стахова «Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении». Истоки научного направления. – goldenmuseum.com/2006Sourse_rus.html.
16. Fowler D.H. A generalization of the golden section // Fibonacci Quarterly, **20.2** (1982), 146–158. – fq.math.ca/Scanned/20-2/fowler.pdf.
17. Engstrom P.G. Sections, golden and not so golden // Fibonacci Quarterly, **25.2** (1987), 118–127. – fq.math.ca/Scanned/25-2/engstrom.pdf.
18. Moore G.A. A Fibonacci polynomial sequence defined by multidimensional continued fractions; and higher-order golden ratios // Fibonacci Quarterly, **31.4** (1993), 354–364. – fq.math.ca/Scanned/31-4/moore.pdf.
19. Prodinger H. The asymptotic behavior of the golden numbers // Fibonacci Quarterly, **34.3** (1996), 224–225. – fq.math.ca/Scanned/34-3/prodinger.pdf.
20. Hongquan Yu, Yi Wang, Mingfeng He. On the limit of generalized golden numbers // Fibonacci Quarterly, **34.4** (1996), 320–322. – fq.math.ca/Scanned/34-4/yu.pdf.
21. Bradley S. A geometric connection between generalized Fibonacci sequences and nearly golden sections // Fibonacci Quarterly, **38.2** (2000), 174–179. – fq.math.ca/Scanned/38-2/bradley.pdf.

22. Dickinson D. On sums involving binomial coefficients // American mathematical monthly, vol. 57 (1950), 82–86.

23. Raab J.A. A Generalization of the connection between the Fibonacci sequence and Pascal's triangle // Fibonacci Quarterly, **1.3** (1963), 21–31. – fq.math.ca/Scanned/1-3/raab.pdf.

24. Harris V.C., Styles C.C. A generalization of Fibonacci numbers // Fibonacci Quarterly, **2.4** (1964), 277–289. – fq.math.ca/Scanned/2-4/harris.pdf.

25. Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers // Chaos, Solitons & Fractals. – 2005, 27(5), 1162–1177. – trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321036.htm.

26. Василенко С.Л. Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17556, 03.07.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161975.htm.

27. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Физматлит, 1959. – 400 с.

28. Касселс Д.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Изд. ин. лит, 1961. – 213 с.

29. Weisstein E.W. Pisot Number / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/PisotNumber.html.

30. Егоров А. Числа Пизо // Квант. – 2005. – № 5, с. 8–13; № 6, с. 9–13.

31. Василенко С.Л. Золотое сечение как начало полезных структур // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17512, 09.06.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321259.htm.

32. Василенко С.Л. Серебряные миражи // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 14.08.2011. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11286.html.

33. Wenninger M.J. Polyhedron Models. – Cambridge, England: Cambridge University Press, 1971, 177-178.

34. Binomial transform / From Wikipedia, the free encyclopedia. – ru.wikipedia.org/?oldid=53771857.

35. Арнольд В.И. Цепные дроби. – М.: Центр непрерывного математического образования, 2001. – 40 с.

36. Stakhov A., Rozin B. The "golden" algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals, 27(5), 2006, 1415–1421.

37. Фреге Г. Основоположения арифметики: логически-математическое исследование о понятии числа // Фреге Г. Логико-философские труды. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. – С. 125–238.

38. Ладов В.А., Эннс И.А. Аналитическое определение числа, парадокс Рассела и теория типов // Вестник Томского гос. ун-та. – 2012. – № 2(18). – С. 13-20.

39. Василенко С.Л. Ноль как непревзойдённый архетип и ноумен// Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.02.2013. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12565.html.

Приложение

Производящая матрица

Рассмотрим алгебраическое уравнение общего вида – прообраз разнообразных рекуррентных последовательностей.

Весьма любопытен подход к определению элементов числовых рядов с использованием специально построенной матрицы [2].

Структурно производящая матрица *A* (рис. 4) включает единичную матрицу размером $k \times k$, которая слева дополнена нулевым столбцом, а снизу строкой, состоящей из коэффициентов a_i характеристического алгебраического уравнения

$$x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k .$$

Или в его эквивалентной форме разностного (возвратного) уравнения-аналога

$$f_n = a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \ldots + a_k f_{n-k}\,.$$

0	1	0	…	0
0	0	1	…	0
…	…	…	…	…
0	0	0	0	1
a_k	a_{k-1}	…	…	a_1

Рис. 4. Структура производящей матрицы A

Данная схема позволяет генерировать рекуррентные последовательности – линейные рекурсии с постоянными коэффициентами и дискретным "временем" n.

Все диагонали матрицы A, включая "ломанные", содержат нулевые элементы, кроме главной диагонали единичной матрицы, дополненной элементом a_k. Произведение элементов этой "ломаной" диагонали численно равно коэффициенту a_k.

Поэтому определитель матрицы равен $(-1)^k a_k$.

Например, матрица для генерации чисел Фибоначчи имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Здесь единичная матрица в виде 1 в правом верхнем углу дополнена слева нулевым вектором, состоящим из одного элемента, а внизу пристроена пара единичных коэффициентов.

В общем случае для вектора произвольных начальных условий $\delta = \left(f_1 \ldots f_k\right)^{\mathrm{T}}$ как первых членов рекурсии, которые одновременно не равны нулю, имеет место простое матричное соотношение для вычисления кортежа элементов числового ряда

$$\boxed{C^n \delta = \left(f_n \quad f_{n+1} \quad \cdots \quad f_{n+k} \right)^{\mathrm{T}}},$$

где т – символ транспонирования матрицы или вектора.

Например, для модели k-боначчи $x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1$ все величины $a_j = 1$, для тринома старших степеней – от нуля отличны только два коэффициента a_1, a_k; для обычного тринома с запаздыванием – пара коэффициентов a_{k-1}, a_k.

© ВаСиЛенко, 2016
Харьков, Украина

Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html