Триномы младших степеней:

от Большого взрыва и золотого сечения – до абсолютного хаоса

С.Л. Василенко, д.т.н.

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Исследуются триномиальные математические модели – трехчлены с целыми степенями. Показано, что они обладают характерным свойством всеобщности, охватывая жизненно-важные конструкции и формализованные объекты. В частности, исследуемые триномы отображают Большой взрыв и золотую пропорцию в филлотаксисе растений. Они содержат минимальное число Пизо, как прообраз позиционной системы счисления с иррациональным (нецелочисленным) основанием. В предельном случае имеет место модельная структура "абсолютного" детерминированного хаоса.

Эй, вы, трое! Оба ко мне.
Да-да... Я тебе говорю...
(армейские будни)

Введение в тему

Ставшее крылатым выражение «поверить алгеброй гармонию» восходит к монологу Сальери: «Звуки умертвив, Музыку я разъял, как труп. Поверил я алгеброй гармонию» (А. Пушкин, 1832).

Формально перед нами художественное описание попытки идентифицировать музыку по релевантным признакам физического звучания.

Основной образный смысл – проверить разумом и/или точными расчетами то, что выражено чувствами. Метафора имеет иронические или критическое отношение к человеку, пытающемуся предать математизации область чувств.

Уместно привести цитату: «В знаменитых произведениях искусства время от времени обнаруживаются те или иные сравнительно простые математические закономерности. И хотя природа этих странных связей во многом остается загадочной, возможно, в будущем строгие закономерности прекрасного будут, наконец, поняты и описаны сухим языком науки» [1].

С другой стороны, «поверка алгеброй гармонии» предполагает, что математическое мышление, рациональный расчет и развитие логики способны погубить созидательное начало. Как диктат "железной логики" подавляет живое творчество в науке...

Всё это так... Однако попробуем подойти к этому предмету отношений иначе. А именно, расставив акценты в обратном направлении.

Насколько алгебра в её простых проявлениях-интерпретациях способна описать сложность и многообразие процессов бытия. Конечно, с долей некоторых воображений-фантазий и принятием предустановленных гипотез-предположений.

Первая такая попытка предпринята нами в работе [2], где исследованы триномиальные математические модели – алгебраические трёхчлены. Показано, что в определенном ракурсе анализируемых форм модели обладают характерным свойством всеобщности, охватывая жизненно-важные конструкции и формализованные объекты.

В частности, алгебраические триномы включают в себя биологическое деление клеток и золотую пропорцию в филлотаксисе растений. Содержат два иррациональных минимальных числа Пизо [3] с их особенными вычислительными свойствами.

В предельном случае имеет место условно-божественная модельная структура единицы-константы, как универсальная монада: «Я есмь всё».

Здесь вполне предсказуемым и естественным является извечный пилатовский вопрос из «Мастера и Маргариты»: что есть истина? (Ин. 18:38)...

Для одних это правда.

Для других – нечто неизведанное и недостижимое.

Третьи увязывают непреложную аксиому с религиозным просветлением.

Истина, по Н. Амосову, есть модель:

«Что есть истина? … Я не философ, и для меня истина о чем-то – это его модель. Чтобы понять, как устроены и действуют клетка, организм, общество, нужно представить всё это в их структуре и функции, то есть создать модель, по возможности полную и правильную» [4].

«Господь Бог есть истина» (Иер. 10:10) – это тоже модель-прообраз восприятия бытия и мироощущения. Как и "модель сосуда" (Сир. 38:30), которая не очень просто формализуется на языке математики или категориального аппарата, хотя вполне доступна для восприятия.

Не вдаваясь глубоко в философско-абстрактные чащобы, с учетом выше изложенного у нас вырисовывается устойчивая понятийная связка-конструкция «истина – модель – алгебра гармонии».

В этом контексте *алгебраический трехчлен становится вполне подходящей моделью для исследования-изучения ассоциативных системных связей различной природы*.

На тему алгебры гармонии в литературе можно найти много полезных сравнений и упоминаний [1–8].

Так, в монографии [6] автору удалось сконцентрировать и систематизировать основы теории актерского и режиссерского мастерства под общей тезой: «Всё очень логично и точно, как в алгебре».

Доктор философских наук В. Буданов в своих работах [7, 8] развивает идеи синергетической алгебры гармонии в симбиозе алгебраического числа золотого сечения и общих принципов гармонии, которые отражают простейшие правила приоритета и очередности рождения и/или исчезновения структур в нелинейных развивающихся системах в областях нелинейных резонансов.

По его мнению, резонансный механизм-принцип порождения «золотой модели» в общих эволюционирующих нелинейных системах встречается много чаще на уровне временных спектров, нежели в пространственных формах.

«Золотое сечение есть признак эволюционирующих систем, обладающих достаточно богатым структурным иерархическим потенциалом, а так же механизмами наследования и коммуникации… Золотое сечение – асимптотическое свойство целостной системы, последовательно проходящей фибоначчивы структуры, часть из которых может и исчезнуть к моменту наблюдения» [8].

Постановка задачи

В своих публикациях мы не раз, хотя и несколько фрагментарно, обращались к анализу триномиальных моделей в виде алгебраических полиномов из трёх слагаемых.

Трином в математике (греч. *treis* – три + *nomos* – член) – трехчленное выражение.

Приобщение к данной теме в основном обусловливалось исследованием подходов к математическому моделированию тринитарной структуры, которая в частности, нашла широкое распространение в философии, системотехнике, математической логике, современном христианстве и др.

В данном случае для нас представляет интерес триномиальная структура $x^k - x - 1$ с её обособленным случаем – золотым сечением (ЗС) при $k = 2$.

Примечательно, но именно вследствие этой преемственности, некоторые исследователи искусственно и безосновательно «выкрашивали золотой терминологией» все остальные решения тринома.

Этим самым не только наводился исторический лоск-налет на представляемый материал с посылом на древние знания, но и часто маскировалось-прикрывалось откровенное заимствование чужих идей и результатов, без каких было ссылок.

Одновременно нарушались установившиеся традиции в мировой науке, да и просто здравый смысл, согласно которым золотое сечение, кроме прочего, – это математическая константа.

Последняя в принципе не подлежит обобщению, и получила данное название с момента своего первого появления в публикациях Мартина Ома (1835), как «goldener Schnitt» [9] или «золотой разрез» (разделение, сечение).

Позже в английском языке стало употребляться более точное выражение «golden ratio» или «золотое отношение», как производное понятие, идущее от математической пропорции.

Задачей настоящей работы является анализ-объединение и развитие разрозненных знаний о триномиальной структуре $x^k - x - 1$, названной нами моделью с запаздыванием [10] или триномом младших степеней – x^1, x^0.

Конечная цель подразумевает раскрытие характерных свойств-особенностей тринома, полезных для развития и обобщения научных знаний.

Свойства тринома младших степеней

Исследуемые трёхчленные полиномы основаны на характеристическом алгебраическом уравнении триномиального типа с наличием двух младших степеней и эквивалентной рекурсии или разностной схеме:

$$\begin{cases} x^k = x + 1, \\ z_{n+k} = z_{n+1} + z_n, \quad f_n = f_{n-k+1} + f_{n-k}. \end{cases} \tag{1}$$

Названная нами модель с запаздыванием или трином младших степеней в теории чисел иногда именуется последовательностью с пропусками (*skiponacci* = *skip* пропуск + *nacci* производная от Фибоначчи).

Совместимость форм в соотношениях (1) соответствует давно известной в математике взаимосвязи [11, с. 329–347] между алгебраическим уравнением с постоянными коэффициентами и линейным возвратным (разностным) аналогом, порождающим числовые рекуррентные последовательности. Индексы *n, k* – любые периоды-интервалы дискретности, не обязательно годы или месяцы.

В общем случае алгебраические уравнения $x^k = x + 1$ высоких порядков не имеют аналитических решений. Их корни определяются численными методами. Положительные корни – есть аттракторы числовых последовательностей, как отношение соседних элементов.

Отдельные свойства частных моделей описаны в целочисленной энциклопедии [12]:

$x^3 = x + 1$, A000931; $x^4 = x + 1$, A079398; $x^5 = x + 1$, A103372; $x^6 = x + 1$, A103373…

Решение тринома младших степеней можно представить посредством встроенных корней:

$$x = \sqrt[k]{1 + x} = \sqrt[k]{1 + \sqrt[k]{1 + \sqrt[k]{1 + \ldots}}}.$$

Для единичных начальных условий $\delta = (1, 1, \ldots 1)$ и единичных значений коэффициентов справедлива аддитивно-комбинаторная формула

$$f_n = f_{n-k+1} + f_{n-k} = \sum_{j=0}^{\lceil n/2 \rceil} C^{\,j}_{\left\lceil \frac{n-j}{k-1} \right\rceil},$$

где $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ или наибольшее целое, не превосходящее ξ;

$C_a^b = \binom{a}{b} = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$ – число сочетаний из a по b, равное биномиальному коэффициенту.

Для произвольных начальных условий справедливы соответствующие формы на основе степеней производящей матрицы [10].

Например, для модели $x^5 = x + 1$, $f_n = f_{n-4} + f_{n-5}$ имеем

$\delta = (1\ 0\ 0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$: A017827 [12]
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{50} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 529 \\ 550 \\ 661 \\ 860 \\ 1013 \end{pmatrix};$$

$\delta = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$: A103372
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{50} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1674 \\ 1939 \\ 2224 \\ 2600 \\ 3084 \end{pmatrix}.$$

Кубический трином младших степеней

Кубическое триномиальное уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ и эквивалентная ему рекурсия $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$ формируют последовательность Падована – A000931:

(1, 0, 0, 1, 0,) 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21 …

По некоторым источникам пропорции многих римских храмов содержатся именно этом в ряду чисел.

Любые три подряд идущие числа ряда могут служить начальными условиями, образуя всё тот же ряд, только со смещением нумерации, (1 0 0), (0 0 1), (1 0 1), (1 1 1) и т.д.

Величины f_n имеют различные интерпретации в математике, в том числе:

– количество композиций n на части, сравнимые с 2 (mod 3);

– количество композиций n на части, которые нечетны и не менее трех (≥ 3, D.Callan, 2006), например, $f_{11} = 4$: $11 = 3+3+5 = 3+5+3 = 5+3+3$;

– число строк длиной $(n-8)$ из алфавита $\{a, b\}$, которые не содержат более одной буквы a или двух последовательных букв b (T.Gottfried, 2010), например, $n = 4$: {*abab, abba, baba, babb, bbab*} и $f_{4+8} = 5$;

– допускает множество комбинаторных форм, в том числе наиболее простая из них

$$f_n = \sum_{j=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_j^{\,n-2j}.$$

Особый случай начальных условий в линейной рекуррентной последовательности $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$, $\delta = (3\ 0\ 2)^{\mathrm{T}}$ в теории чисел называют числами Перрина – A001608:

3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644 …

Они характеризуют число максимальных независимых множеств в цикле порядка n.

Имеют также отношение к математическим исследованиям в области простых чисел в качестве опорных значений.

Матричные формы $A^n\delta$ на основе производящей матрицы A [10] и заданных начальных условий δ, в частности, дают такие результаты:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 22 \\ 29 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 277 \\ 367 \\ 486 \end{pmatrix}$$

Комбинаторная формула для чисел Перрина (en.wikipedia.org/wiki/Perrin_number) имеет вид:

$$f_n = \sum_{j=1}^{n/2} k^{-1} C_j^{n-2k} \; .$$

Пластиковая константа

Наибольший положительный корень кубического уравнения $x^3 = x + 1$ равен

$$\rho = \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{69}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} \approx 1{,}3247 .$$

В математической литературе данную величину часто называют серебряной или пластиковой константой ρ – A060006 (en.wikipedia.org/wiki/Plastic_number), как частный случай чисел Пизо.

Название *пластическое* было дано Гансом ван дер Ланом (1928) и соотносилось с пластикой и/или приданием трёхмерной формы вследствие кубического порядка образующего уравнения.

Называть пластическое число ρ серебряным, как это иногда делается, ни исторически, ни онтологически не верно [13].

Напомним, целое алгебраическое число $\alpha > 1$ называется числом Пизо [14, с. 162] или Писота [15], если все его сопряжённые, отличные от самого α, лежат внутри круга $|z| < 1$, то есть по абсолютной величине строго меньше единицы.

Другими словами, число Пизо – положительное алгебраическое целое число, большее единицы, такое, что все его сопряженные элементы по абсолютной величине меньше 1.

Числа Пизо обладают одним удивительным свойством: **их степени «почти целые»** [16].

Именно эта уникальная особенность делает их удобными кандидатами в качестве иррациональных оснований позиционных систем счисления.

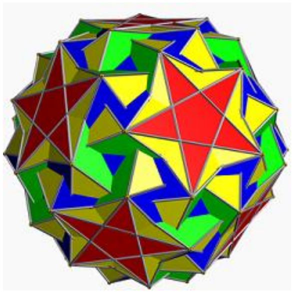
Известны все 38 числа Пизо, не превышающие константу золотого сечения (Dufresnoy & Pisot, 1955) [17, прилож.].

За исключением образующего полинома $x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$, остальные полиномы имеют вид:

$$R_{n+1}(x) = x^n \cdot \Phi_x + 1 \quad \text{или} \quad S_{n+2}(x) = x^n \cdot \Phi_x + x^2 - 1,$$

где $\Phi_x = x^2 - x - 1$ – "золотой" трином.

Примечательно, что в своей записи все полиномы содержат встроенный трином золотого сечения $x^2 - x - 1$, как образующий остов.



Кроме того, минимальное число Пизо ρ удивительным образом взаимоувязано с золотым сечением через метрические свойства необычной объемной фигуры – Snub icosidodecadodecahedron [18].

С одной стороны, в своей геометрии тело содержит явные признаки константы ЗС, – через правильную пятиугольную звезду.

С другой стороны, радиус описанной сферы равен: $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\rho - 1}{\rho - 1}}$.

Наименьшее из чисел Пизо ρ – единственное положительное число, удовлетворяющее тождеству $(\rho - 1) \cdot \rho \cdot (\rho + 1) = 1$. Здесь фигурирует произведение числа на его два "симметричные отклонения", отличные на ±1.

После самонастройки системы элементы последовательности можно вычислять по формуле $f_n = \mathrm{round}(\rho^n)$, $n \ge 10$ – как округление до ближайшего целого.

Любопытно бесконечное вложение корней, получаемое непосредственно из формулы:

$$\rho = \sqrt[3]{1+\rho} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots}}}\,.$$

Красиво выглядит также единение бесконечного встроенного радикала и цепной дроби:

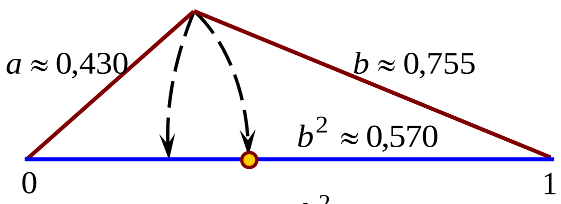
$$x^3 = x+1, \qquad x^2 = 1+\frac{1}{x}, \qquad \rho = \sqrt{1+\frac{1}{\rho}} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\rho}}}} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\ldots}}}}} \approx 1{,}3247..$$

Примечательно, что введение в данную форму величины-*двойки* приводит к константе золотого сечения:

$$x^2 = x+1, \qquad x^3 = x^2+x, \qquad x^3 = 2x+1, \qquad x^2 = 2+\frac{1}{x}, \qquad x = \Phi = \sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2+\ldots}}}}} \approx 1{,}618.$$

С целыми коэффициентами p, q трином выглядит так:

$$x^3 = px+q, \qquad x^2 = p+\frac{q}{x}, \qquad x = \sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p+\ldots}}}}}\,.$$



$1 = a + b^2$, $\quad \dfrac{1}{b} = \dfrac{b^2}{a} = \lambda \approx 1{,}325$

Рис. 1. Геометрическое представление триномиальной модели с запаздыванием $x^3 = x+1$, $\quad x = 1/b$

В определенной мере кубическую рекурсию (1) допустимо рассматривать как модификацию или расширение модели Фибоначчи с дополнительным запаздыванием на один шаг.

Можно сказать, что перед свадьбой кролики предпочитали хорошо отдохнуть и набраться сил.

Геометрически триномиальная модель представима как деление целого на две пересекающиеся части (рис. 1):

целое относится к одной части, как её квадрат – к другой, $a+b>1$, $a+b^2=1$.

Если в модели ЗС $a=b^2$, то здесь $a=b^3$.

В золотом сечении единица раскладывается на сумму числа и его квадрата $1=b+b^2$. Теперь единица представляется суммой квадрата и куба числа $1=b^2+b^3$.

Сравнение мантисс

В общем случае модель запаздывания с целочисленным коэффициентом p допускает сравнение мантисс:

$$x^k = px+1 \qquad \Rightarrow \qquad x^{k-1} - \frac{1}{x} = p\,.$$

Поскольку p – целое, степень числа x и обратная ему величина имеют одинаковые мантиссы. Тогда в зависимости от параметра p для каждого значения k образуется множество моделей (табл. 2).

Таблица 2

Части целого $y = 1/x$ для тринома с запаздыванием $x^k = px + 1$
(аналогичные мантиссы имеют степени x^{k-1})

$k-1$	Значения коэффициента p				
	1	2	3	4	5
1	0,618034	0,414214	0,302776	0,236068	0,192582
2	0,754878	0,618034	0,532089	0,472834	0,429174
3	0,819172	0,716673	0,649514	0,601232	0,564325
4	0,856675	0,774804	0,720050	0,679894	0,648655
5	0,881271	0,813134	0,767009	0,732785	0,705887
6	0,898654	0,840309	0,800497	0,770730	0,747178
7	0,911592	0,860582	0,825577	0,799262	0,778343
8	0,921599	0,876286	0,845059	0,821490	0,802687
9	0,929570	0,888810	0,860629	0,839292	0,822224

Запись тринома с запаздыванием через параметр части целого $y^k + y^{k-1} = 1$ позволяет перейти к иному расширению посредством дополнительного коэффициента $y^k + y^{k-1} = q$.

Здесь имеет место свой отличительный момент: сумма двух соседних степеней числа – целое. Подобно тому, как сумма первой и второй степени золотого сечения равна целому – единице.

Дополнительное введение коэффициентов существенно расширяет палитру триномиальных моделей с запаздыванием [10], но ещё дальше уводит от золотого сечения.

Морфические числа

Константа золотого сечения удовлетворяет паре уравнений $\Phi + 1 = \Phi^2$, $\Phi - 1 = \Phi^{-1}$, где второе образуется из первого делением на Φ.

Подобная пара уравнений существует и для пластикового числа: $\rho + 1 = \rho^3$, $\rho - 1 = \rho^{-4}$.

Последнее уравнение обусловлено тождеством $\rho^5 - \rho^4 - 1 \equiv \underbrace{\left(\rho^3 - \rho - 1\right)}_{=0}\left(\rho^2 - \rho + 1\right)$ после деления на ρ^4.

Определение: алгебраическое число называется морфическим числом, если оно удовлетворяет паре алгебраических уравнений $x + 1 = x^s$, $x - 1 = x^{-t}$ для некоторых положительных целых $s, t \geq 2$.

Соответственно, золотое сечение и пластиковое число – морфические числа.

Можно показать [19], что не существует никаких других вещественных морфических чисел, больших единицы 1.

Геометрические интерпретации

Известен простой и быстрый способ установить, является ли прямоугольник "золотым" [20, с. 53]. Два одинаковых прямоугольника помещаются рядом: один лежа (горизонтально), другой стоя (вертикально).

В лежачей фигуре прочерчивается диагональная линия. Если она проходит через вершину стоячей фигуры, то перед нами два золотых прямоугольника (рис. 2-а).

Этим свойством обладает исключительно прямоугольник с константой золотого сечения 1:Ф.

Без особых затруднений можно продемонстрировать еще одну закономерность.

Два одинаковых золотых прямоугольника (лежачий и стоячий) накладываются друг на друга с совмещением одного из углов, и проводятся две диагонали (рис. 2-б): прямоугольника и воображаемого квадрата.

Линии пересекутся обязательно на стороне одного из прямоугольников.

Данная особенность справедлива только для прямоугольника с отношением $1{:}\Phi$.

Более того, искомая точка является золотым сечением отрезка единичной длины

$$1 = \phi + \phi^2 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2}.$$

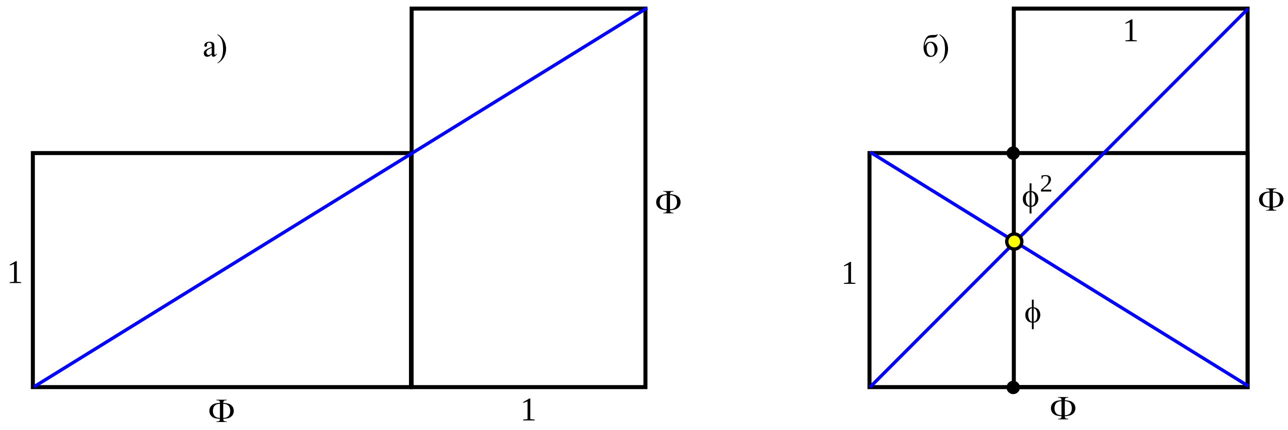


Рис. 2. Особенности взаимного расположения золотых прямоугольников $1 \times \Phi$

Подобно описанной золотой модели, пластиковая константа ρ играет роль золотого сечения в трехмерном пространстве [21, с. 122-123].

Прямоугольный параллелепипед с тремя ребрами $r < v < u$ "клонируется" и перемещается (рис. 3) аналогично золотым прямоугольникам (рис. 2-а) с наружным совмещением маленького r и большого u ребер.

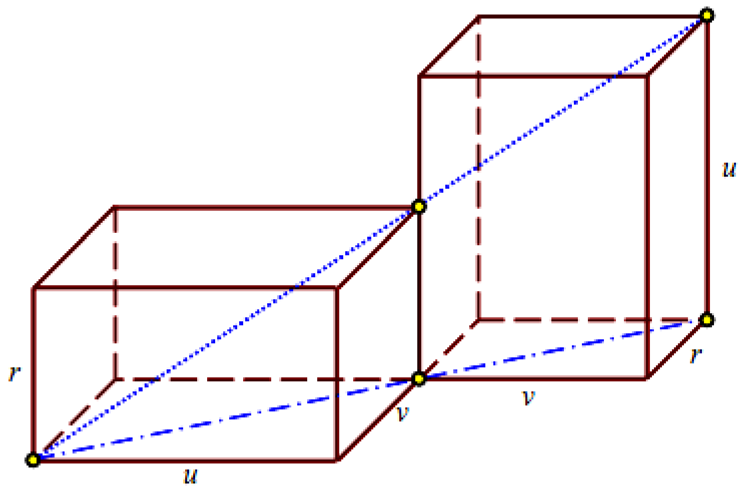


Рис. 3. Параллелепипед размером $r \cdot (1,\ \rho,\ \rho^2)$ с пластиковой константой ρ

Если продолжение главной диагонали лежащего параллелепипеда пройдет через верхнюю вершину стоячего параллелепипеда, то ребра параллелепипеда будут связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ u \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \\ \rho^2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}325 \\ 1{,}755 \end{pmatrix},$$

где r – произвольное значение длины отрезка.

Действительно, составляя пропорцию с использованием теоремы Пифагора, приходим к характерному кубическому уравнению с вещественным корнем ρ:

$$x^2 = \frac{u}{r} = \frac{\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{v^2+r^2}}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{x+1}{x} \quad \rightarrow \quad x^3 = x+1.$$

Вполне ожидаемо, что взаимное положение золотых прямоугольников с внутренним наложением (рис. 2-б) также должно иметь адекватное продолжение в трехмерном пространстве. Для совмещенных прямоугольных параллелепипедов с ребрами

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ u \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \\ \eta^2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}466 \\ 2{,}148 \end{pmatrix}$$

диагонали пересекаются в точности на ребре стоячей фигуры (рис. 4).

Параметр $\eta \approx 1{,}466$ – действительный корень кубического уравнения (тринома старших степеней) $x^3 = x^2 + 1$ и аттрактор "коровьей" последовательности [2].

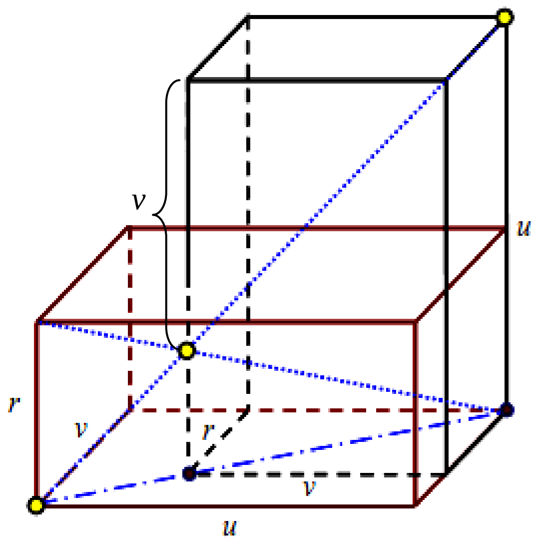


Рис. 4. Параллелепипед размером $r \cdot (1,\ \eta,\ \eta^2)$ с константой η

Действительно, составляя пропорцию с использованием теоремы Пифагора, приходим к характерному кубическому уравнению с вещественным корнем μ:

$$x^2 = \frac{u}{r} = \frac{\sqrt{v^2+r^2}}{\sqrt{u^2+v^2}-\sqrt{v^2+r^2}} = \frac{1}{x-1} \quad \rightarrow \quad x^3 = x^2+1.$$

При этом точка пересечения отсекает на ребре u отрезок, который в точности равен v, что следует из пропорциональных отношений с учетом тождества $\eta^3 = \eta^2 + 1$.

От геометрии к физике

Сравнивая оба сопряжения параллелепипедов (рис. 3, 4), можно высказать два соображения.

1) Пластиковая константа ρ даёт внешнее (наружное) совмещение фигур. Дальнейшее наращивание степени k триномиальной модели младших степеней $x^k = x+1$ воссоздает образ, уводящий нас далеко вовне или в область макромира.

Настоящее определяется отдаленным прошлым по рекурсии $f_n = f_{n-k+1} + f_{n-k}$, с большим запаздыванием. Что мы де-факто наблюдаем в астрофизике.

2) Со своей стороны, аттрактор η даёт внутренне совмещение фигур. Последующее увеличение степени m триномиальной модели старших степеней $x^m = x^{m-1}+1$ воспроизводит ситуацию сжатия, характерную для материального микромира.

При этом мгновенное действие-проявление настоящего обусловливается главным образом своим наиближайшим предшествующим состоянием $n-1$. И лишь совсем небольшую "подзарядку" получает от своего реликтового прошлого $m \to \infty$ согласно рекурсивному аналогу $f_n = f_{n-1} + f_{n-m}$.

Терминологические интерпретации

Классическое золотое сечение в своём геометрическом толковании обычно формулируется как деление линейного отрезка на две части.

Однако после составления пропорции, ЗС де-факто становится прототипом сравнения площадей квадрата и прямоугольника, которые обусловлены двумя числами $a,\ b$:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \to \quad a^2 = b\cdot(a+b).$$

Именно поэтому решением является вещественный корень квадратного уравнения – иррациональное число, содержащее квадратный корень из пяти $\sqrt{5}$.

Иногда в литературе некоторые алгебраические уравнения также называют «обобщенным золотыми сечениями». Например, бесчисленные корни квадратного уравнения общего вида $x^2 - px - q = 0$, которые не имеют достойного "золотоносного" проявления-продолжения и тем более наглядной интерпретации.

В этом контексте золотое сечение (gold rotation) – единственное в своем роде, уникальное проявление. Одновременно это устоявшийся термин в математике. Поэтому его изменение или обвешивание разными не свойственными ему регалиями, по меньшей мере, нарушает здравый смысл.

Как говорится, «ЗС – оно и в Африке ЗС».

А вот название пропорции в определенной мере свободно от терминологических пут, и его допустимо "эксплуатировать", придавая свежие звучания новым понятийным конструкциям. Конечно, если они того стоят.

Итак, пусть ЗС по-прежнему означает константу золотого сечения. Единственное и неповторимое число, без каких-либо надуманных обобщений.

Золотому сечению с константой Φ соответствует золотая пропорция.

Она может быть дополнена (усилена) прилагательным "квадратичная", чем подчеркивается двумерный плоскостной характер решения исходной геометрической задачи деления линейного отрезка.

Волне естественно геометрическое продолжение данной задачи, описанной Евклидом в его "Началах", на трехмерное и далее n-мерное евклидово пространство.

Классическое ЗС уравнивает два отношения: сумму двух чисел к одному из них и отношение самих чисел, образуя триномиальное решение в виде квадратного уравнения.

Не выходя за рамки триномов, наращивание порядка здесь наиболее просто осуществляется за счет возведения в степень левой или правой части исходной пропорции.

Путем наращивания степеней и повышения размерности геометрического пространства будут образовываться «условно золотые» пропорции m-го порядка старших степеней и «условно золотые» пропорции k-го порядка младших степеней.

Таким образом, в зависимости от того, правая или левая часть пропорции возводится в степень, формируются два тринома (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение триномиальных моделей

Характеристика	**Трином старших степеней**	**Трином младших степеней**
	Генезис моделей в степенном расширении золотой пропорции $x = \left[\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}\right] = x$	
Алгебраическая форма	x – отношение суммы к части $x = \frac{1}{a} \to \left(\frac{1}{a}\right)^{m-1} = \frac{a}{b} = \frac{1}{1/a-1}$ $x^{m-1} = \frac{1}{x-1}$, $x^m = x^{m-1}+1$	x – отношение частей $\frac{a}{b} = x \to \left(\frac{a}{b}\right)^{k-1} = \frac{1}{a} = \frac{a/b+1}{a/b}$ $x^{k-1} = \frac{x+1}{x}$, $x^k = x+1$
Разностное уравнение (рекурсия)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-m}$	$f_n = f_{n-k+1} + f_{n-k}$
$m = k = 1$	$x = 2$ – деление пополам	$x \to 0$ – модель Большого взрыва
$m = k = 2$	$x = \Phi$ – золотое сечение	$x = \Phi$ – золотое сечение
Кубический вариант $m = k = 3$	"кубическая золотая пропорция"	"кубическая золотая пропорция", минимальное число Пизо
	квадрат суммы относится к квадрату числа, как оно – к другому числу	сумма чисел относится к числу, как его квадрат – к квадрату другого числа
равенство параллелепипедов	$a^3 = 1^2 \times b$, в основании квадрат 1×1	$a^3 = b^2 \times 1$, в основании квадрат $b\times b$
$\{x, a, b\}$	$\sim \{1.466,\ 0.682,\ 0.318\}$	$\sim \{1.325,\ 0.570,\ 0.430\}$
$m, k \to \infty$	модель единичного божественного абсолюта	детерминированный абсолютный хаос

В частности, при $m = k = 3$ образуются две «кубические условно золотые пропорции» с их наглядным геометрическим толкованием в трехмерном пространстве

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

что соответствует уравниванию объемов прямоугольных параллелепипедов (рис. 5)

$$a^3 = 1^2 \cdot b \quad \text{и} \quad a^3 = b^2 \cdot 1.$$

В триноме старших степеней показатель m "мягко" уходит-уменьшается, поэтому при $m = 1$ достигается точное деление пополам $x^1 = x^0 + 1 = 2$.

В триноме младших степеней показатель младшей степени фиксирован, поэтому при $k = 1$ образуется математическая неопределенность $x^1 = x + 1$ или "$0 \equiv 1$" (?).

$$x^3 = x^2 + 1, \;\; x = \frac{a+b}{a} \approx 1.466 \qquad x^3 = x + 1, \;\; x = \frac{a}{b} \approx 1.325$$

$$\{a, \; b\} \approx \{0.682, \; 0.318\} \qquad \{a, \; b\} \approx \{0.570, \; 0.430\}$$

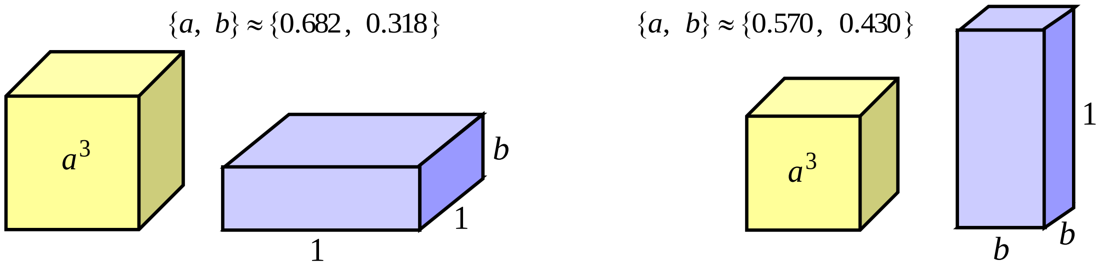


Рис. 5. Равновеликость прямоугольных параллелепипедов, характеризующих триномы старших и младших степеней

На метафизическом уровне последнее соотношение можно охарактеризовать как условно-божественную определенность или модель Большого взрыва в начальный период времени. Когда абсолютный ноль-вакуум преобразуется в "единичное" бытие так таковое.

Нас здесь интересует не столько гипотетическая достоверность-истинность физических процессов и/или явлений, сколько соотношение символов и моделей, дающих их толкование.

«Разумное начало» допустимо считать внешним наблюдателем по отношению к Б. взрыву "$0 \equiv 1$", так и внутренней (составной) компонентой "единичного" бытия в смысле булевого элемента 1 – истины.

Модель Фибоначчи с выбыванием

Исходная модель $x^3 = x + 1, \;\; f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$ после умножения на x приобретает вид

$$x^4 = x^2 + x = x^3 + x^2 - 1, \qquad f_n = (f_{n-1} + f_{n-2}) - f_{n-4}\,.$$

По сути, перед нами предстал алгоритм классического развития итальянских кроликов по двучленно-аддитивной схеме Фибоначчи. Только более "приземленный". С естественным убыванием: отмиранием, истреблением и др.

То есть в общем стаде наравне с размножением происходит одновременное выбывание взрослых особей. В данном случае – через три последовательных шага.

Понятно, что обе рекурсии приводят к одинаковым последовательностям. Только во второй модели первое начальное условие равно $f_0 = 0$, а затем всё как в первой, включая исходные значения.

Далее с наращиванием порядка модели младших степеней подобная связь с «кроличьей фермой» Фибоначчи утрачивается.

В этом контексте кубическая модель $x^3 = x + 1, \;\; f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$ весьма показательна и по-своему уникальна.

Степенное направление развития модели ЗС

Если взять за основу модель золотого сечения и попытаться придать ей новую динамику развития, то можно выйти на самые различные уровни, вплоть до алгебраического уравнения общего вида [2]. Понятно, что от самой структуры ЗС, не говоря уже о константе золотого сечения Ф, при этом остаются только «рожки да ножки» или одни воспоминания.

Усложнение "золотой" модели предполагает различные пути-способы.

Один из них заключается в наращивании целой степени многочлена, оставляя по-прежнему три члена, как и в квадратном уравнении.

Для квадратного уравнения ЗС $x^2 = x + 1$ и золотой пропорции $x = \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$ имеем два отношения: сумма (единичное целое $a + b = 1$) – к части, и отношение самих частей.

Повышать порядок модели можно двояко: относительно правой или левой частей.

1) Пусть переменная равна отношению целого к части $x = 1/a$.

Отсюда следует $(1/a)^{m-1} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{1-a} = \dfrac{1}{1/a - 1}$ или $x^{m-1} = \dfrac{1}{x-1}$, то есть получаем триномиальное уравнение с сохранением "связки" старших степеней $x^m = x^{m-1} + 1$.

При этом часть целого равна $a_x = x^{-1}$ и варьирует от $0{,}5$ до 1 (рис. 6).

В понятиях-образах гиперкуба справедлива формула $a_x^m = 1^{m-1} \cdot b_x$.

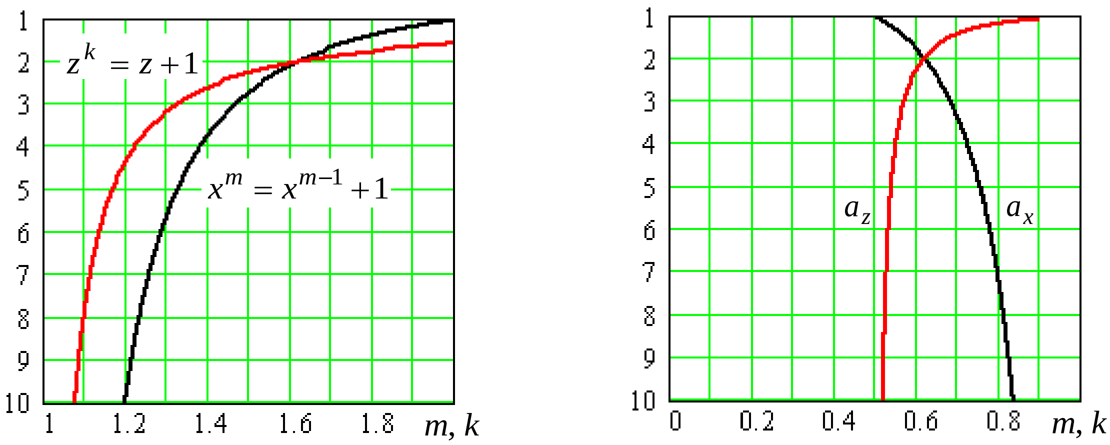


Рис. 6. Корни триномиальных полиномов для степенного развития модели золотого сечения и одна из двух соответствующих частей целого

2) Пусть переменная равна отношению частей $z = a/b$. Тогда имеем $(a/b)^{k-1} = \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a/b+1}{a/b}$ или $z^{k-1} = \dfrac{z+1}{z}$, откуда получаем триномиальное уравнение с сохранением "связки" младших степеней $\left(z^1,\ z^0\right) = (z,\ 1)$ или двучленно-аддитивную модель с запаздыванием (задержкой) $z^k = z + 1 \ \leftrightarrow\ z_n = z_{n-k+1} + z_{n-k}$.

При этом часть целого равна $a_z = z(1+z)^{-1}$, изменяясь от 1 до $0{,}5$.

В понятиях-образах гиперкуба справедливо равенство $a_x^k = 1 \cdot b_x^{k-1}$.

Степенные интерпретации

При $\boldsymbol{k = 1}$ возникает неопределенность при делении на нуль. И как результат образование ортодоксального тождества "$0 \equiv 1$".

Строго математически такая ситуация считается непозволительной.

Но в предельных отношениях-мгновениях подобная картина вполне допустима, как некая игровая модель.

В частности, с точки зрения бесконечномерного историзма.

Происходит практически одномоментное превращение абсолютного вакуума "0" в наличие-присутствие бытия "1" так такового. Что отвечает, например, физической гипотезе-концепции Большого взрыва.

Абсолютный вакуум, как взаимное уравновешивание-поглощение всех полей, или абсолютный мертвый порядок замещается абсолютным детерминированным хаосом – предтечей-истоком мироздания.

Значение $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$ соответствует модели ЗС и ассоциируется с зарождением живого [2].

Кубическая модель младших степеней $\boldsymbol{k} = \mathbf{3}$ дает минимальное число Пизо, как прообраз позиционной системы счисления с рациональным основанием.

Проводя параллели с информационным полем-пространством, можно сказать, что информация приобретает физический смысл, "овеществляется". Она становится доступной для восприятия, измерения, различимости и т.п.

По мере дальнейшего увеличения степени $\boldsymbol{k} > \mathbf{3}$ в триномиальной модели младших степеней, после информационного насыщения через минимальное число Пизо происходит постепенное устремление в хаос, прародителем которого становится информация.

Вроде и можно частично управлять ходом-превращением информационных потоков. Однако в отдаленной перспективе на это не хватает ни ресурсов, ни возможностей.

Информация становится потенциальным разрушительным фактором, нарастающим снежным комом. Как злой джин, выпущенный из бутылки на свободу.

Информация занимает всё сущее. Мир буквально лопается от её переизбытка. Она везде и во всём. Как самая активная сила. Подавляет любые защитные механизмы. Человечество безумствует и теряет рассудок. Пусть неявно. Мир словно погружается во тьму или хаос.

Именно на этом временном этапе-отрезке наиболее отчетливо проявляются различия в предельных интерпретациях двух триномов.

Так, в модели старших степеней $x^m = x^{m-1} + 1$ время (период) "взросления" самого младшего звена до начала своего активного проявления устремляется в бесконечность. Тогда при $m \to \infty$ и единичном начальном условии имеем самоподтверждающуюся структуру единичного абсолюта, в её разностно-эквивалентном представлении $f_n = f_{n-1} = 1$.

В триномиальной модели младших степеней $x^k = x + 1$ – при $k \to \infty$, несмотря на то, что корень уравнения стремится к единице 1, разностный вариант не дает единичный абсолют, а целиком воссоздает начальные условия. То есть это «модель нереализованных возможностей», неспособная к самогенерации и/или к активному воспроизводству.

Иначе говоря, что задали, то и получили. Так сказать, идеально-пассивный вариант.

Ввиду произвольной конфигурации начальных условий в их невообразимо возможном сочетании, по сути, снова имеем абсолютный хаос. Но хаос детерминированный (см. табл. 3). Ибо начальные условия, так или иначе, формируются эволюционным путем.

Таким образом, хаос после Большого взрыва, пройдя длительное упорядочение и структурирование, включая развитие жизненных форм, теперь уже через информационный взрыв, вновь раскручивается по спирали в хаос.

«Ибо прах ты и в прах возвратишься» (Быт. 3:19), – этот фундаментальный посыл касается не только человека, но всего сущего. Образовавшись от хаотического мгновенного действа-взрыва, будто по мановению волшебной палочки, мир снова уйдёт в хаос по спирали.

Предельный случай хаоса

Термин "хаос" исторически появился в греческой мифологии (греч. *chaos*) и буквально означал беспредельно первобытную массу, из которой впоследствии образовалось всё существующее. В повседневной жизни хаотичность характеризует беспорядочность, отсутствие последовательности и стройности. Ближайшие синонимы в русском языке – неразбериха, путаница, сумбур, сумятица и др.

В науку хаос вошел как «термин динамики для описания явлений, подобных турбулентному поведению погоды» [22, с. 10], небезосновательно считая, что динамический хаос – основа физической картины основы бытия [23, гл. 1] и «объединяющий элемент в обширной области от классической механики до квантовой физики и космологии» [23, гл. 3].

Хотя и здесь продолжает существовать расплывчатость и неоднозначность понятия хаоса, которое и сегодня часто соотносится с состоянием полной неразберихи.

И всё-таки хаос – это не абсолютный беспорядок. Так или иначе, ему присущи свои внутренние, чаще всего скрытые элементы (зародыши) и механизмы организованности.

Ибо отсутствие системы – это тоже система [24].

Как однажды точно подметил Станислав Ежи Лец, хаос – это порядок, уничтоженный при сотворении мира.

Данное высказывание полностью вписывается в триномиальную модель младших степеней.

Морис Корнелис Эшер
Порядок и хаос

То есть вначале был хаос... Как беспорядочность, сбивчивость, сумбурность, бессистемность, неупорядоченность, непоследовательность.

Антонимами, на другом полюсе, являются порядок и предустановленная гармония.

Любопытны высказывания-афоризмы, создающие художественные образы хаоса и его отношения к порядку:

- хаос – это порядок, который нужно расшифровать, – Жозе Сарамаго. Двойник;
- порядок необходим глупцам, гений же властвует над хаосом, – А. Эйнштейн;
- кто в себе не носит хаоса, тот никогда не породит звезды, – Ф. Ницше;
- создание единого мира исходит от огромного количества фрагментов и хаоса, – Хаяо Миядзаки;
- природным порядком мира является хаос, – Аватар, Легенда о Корре;
- порядок – это структурированный хаос, – Вл. Бирашевич;
- хаос всегда побеждает порядок, поскольку лучше организован, –Терри Пратчетт;
- хаос – это порядок, который нам непонятен. – Генри Миллер;
- хаос – это фрагмент гармонии, вырванный из контекста. То, что было порядком вчера, стало беспорядком сегодня, и будет хаосом завтра. Даже в хаосе существуют свои законы, – Теткоракс.

В общепринятом восприятии хаос обычно ассоциируется как полное отсутствие порядка, абсолютная неупорядоченность, случайность и т.п.

Однако это вовсе не означает синоним-звучание хаоса в обыденном сознании, как неструктурированная масса, энтропия, вредоносность и даже разрушение.

Справедливо считается, что абсолютного хаоса не бывает.

По крайней мере, он якобы неизвестен. Хотя в космологическом плане допустимо считать умозрительно, что после Большого взрыва в первоначальные секунды наступил момент именно полного хаоса.

Тем более что разумом хаос не осмыслить.

Видимый или осязаемый хаос может быть лучше организован, чем порядок.

Можно говорить об условно детерминированном хаосе. Что задал, то и получил.

Изменение начальных условий вызывает адекватный симметричный результат.

Исходные условия – они же тождественное следствие.

Модель абсолютного хаоса вполне упорядочена заданным множеством, причем любым способом. Как идеальную несуществующую крайность, её можно назвать «абсолютным хаосом» либо «абсолютной структурой».

В политике хорошо известна модель «управляемого хаоса».

В отличие от мифологического хаоса с нулевой информацией, у нас образуется «первозданный хаос с единичной информацией». То есть полностью определенной и упорядоченной.

Весь вопрос, что и как способно её задать?

Хотя для триномиальной модели младших степеней это не имеет решающего значения. «Как аукнется, так и откликнется», – гласит знакомая пословица.

Известная модель Лоренца в нелинейных динамических системах является сверхчувствительной к начальным условиям.

Этим самым воссоздается нечто подобное эффекту неопределенности путем внесения абсолютного хаоса в абсолютный порядок и/или наоборот.

Хотя многие считают оба понятия, как не имеющие смысла в применении к реальной действительности. Возможно, если речь идет об ограниченных промежутках времени.

«В условиях неравновесной термодинамики Хаос является тем Рубиконом, от которого отталкивается Природа на пути к неизбежному росту энтропии. Не достигая критического значения абсолютного нуля, флуктуации Хаоса порождают переход материального Мира в обратное состояние – созидание. Таким образом, ограниченность самоорганизации Природы может заключаться в невозможности достижения абсолютного порядка и хаоса» [25].

Илья Пригожин подчеркивал [26] возможность спонтанного возникновения порядка и организации из беспорядка и хаоса в результате процесса самоорганизации.

Золотой ералаш

Числа, определяемые соотношением $x_{n+1} = x_{n-k} + x_{n-l}$, обычно называют последовательностью Фибоначчи с запаздыванием (k, l).

Они были весьма востребованы и успешно применялись в качестве генераторов случайных чисел уже в конце 50-х годов прошлого столетия [27].

Можно сказать, что в "золотом" генераторе псевдослучайных чисел присутствует структурированная или хорошо организованная (спланированная) хаотичность. Детерминированного здесь явно больше чисто случайного.

Если запустить вполне детерминированный механизм расположения точек по угловой схеме «золотого сечения», то в данном процессе при сколь угодно плотном расположении точек ни одна из них никогда не ляжет-попадет на уже имеющуюся точку.

Последовательное наращивание углов с мерой золотого сечения имеет вид (рис. 7)

$$\theta_n = 360 \cdot \left[\phi^2 n \pmod 1\right], \quad \phi = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2 \approx 0{,}618.$$

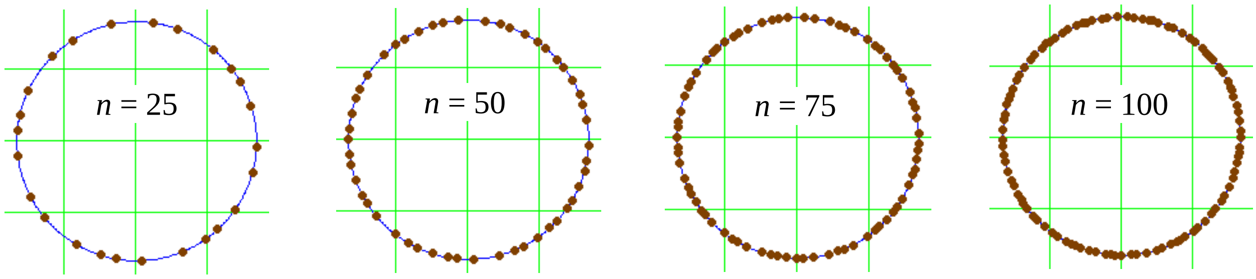


Рис. 7. Последовательно-равномерное заполнение окружности точками с угловой мерой золотого сечения

Надо полагать, что равновесное протекание процессов хаоса и порядка составляет суть бытия, основу существования и развития мироздания [24].

Созидательно-разрушительные свойства присущи как порядку, так и хаосу.

Как две диалектические противоположности они немыслимы друг без друга.

Более того, они имеют взаимно-проникающий характер по схеме:

Хаос – Порядок

Упорядоченный хаос – Хаотический порядок

Например, хаотичный порядок мыслей.

Без элементов хаоса и случайности в идеальной упорядоченной системе невозможна самоорганизация и эволюция.

И хотя видимый (наблюдаемый) хаос больше ассоциируется с дезорганизацией и потерей устойчивости, он одновременно несет с собой зародыши будущей системной упорядоченности и является если не её сердцевиной, то, как минимум – спусковым крючком и исполнительным механизмом.

Поскольку хаос, так или иначе, содержит в себе элементы случайностей, то его макро-характеристики и тенденции глобальных проявлений согласно центральной предельной теореме теории вероятностей следует изучать с привлечением нормальных распределений.

Наши математические расчеты и выявленные закономерности [24] с приемлемой точностью результатов открывают значимость и роль золотого сечения в вероятностно-статистических взаимоотношениях хаоса – порядка в качестве основы сбалансированного состояния этих двух противоположных процессов под общим тезисом (рис. 8):

от хаоса к порядку и наоборот
– через нелинейную динамику, случайность и "золотую" пропорцию.

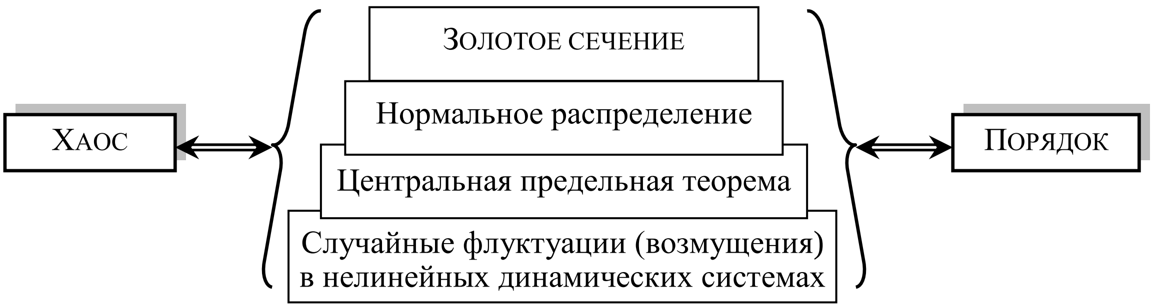


Рис. 8. Схематическое отображение математической гармонии природы
в системе «хаос–порядок»

Вместо заключения

Итак, используя элементы-приемы метода воображаемых представлений, мы приоткрыли внутренний смысл триномиально-степенной модели разных порядков.

По своей внутренней структуре используемые интерпретации-воображения образуют остовы общей системы знаний, которые можно переносить на объекты исследования. Даже если это чисто умственное действо, приводящее «к отвлечениям, в результате которых создается идеализированный объект (абстракция, идеализация)» (Д. Горский).

В данном случае алгебраические полиномы триномиального вида наглядно расширяют и обогащают абстрактно-умозрительные сравнения. Придают им конкретику, динамизм. Увязывают с имеющимся эмпирическим багажом знаний.

Образы, создаваемые на основе триномов младших и старших степеней, не ограничиваются только воспроизведением непосредственно воспринимаемого контекста.

Конечно, допустимы и другие пути в интерпретации триномов, поскольку воображение – это важнейшая и специфическая сторона нашей жизни. Именно разумное фантазирование создает подоснову будущих научных открытий, выводя человека за пределы сиюминутного существования и приумножая интерес к творчеству.

В конечном итоге у нас формируются новые образы, которые повышают степень адекватности в отображении действительности вместе с другими формами и методами научно-исследовательской деятельности.

На удивление, триномы оказались хорошим пластическим материалом для установления семантических и ассоциативных связей между формальными математическими объектами и научными гипотезами в категориях мироустройства.

К существенному научному результату можно также отнести новое геометрическое толкование путем сопоставления разных конструкций параллелепипедов (рис. 3, рис. 4).

Они воспроизводят два основных вектора развития золотой модели-пропорции в пределах триномиальных структур:

$x^m = x^{m-1} + 1$ – трином старших степеней, как прообраз сжатия в микромир;

$x^k = x + 1$ – трином младших степеней, как прототип расширения в макромир.

В первом случае происходит практически мгновенный обмен информацией, массой, энергией.

Во втором – инерционность взаимодействия по космической паутине сопоставима с расстояниями в миллиарды световых лет.

Литература:

1. Алгебра гармонии // Компьютерра. – 2006. – № 29.
2. Василенко С.Л. Триномы старших степеней: от деления пополам и золотого сечения – до модели единичного абсолюта // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 07.06.2015. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/15014.html.
3. Егоров А. Числа Пизо // Квант. – 2005. – № 5, с. 8-13; № 6, с. 9-13.
4. Амосов Н.М. Книга о счастье и несчастьях. Кн. 1. – М.: Мол. гвардия, 1986. – 288 с.
5. Зубарева Н.Б., Куличкин П.А. Тайны музыки и математическое моделирование: Алгебра или гармония? Гармония и алгебра! – М.: URSS, 2010. – 256 с.
6. Анисимов В.И. Алгебра гармонии. – 2-е изд., доп. – Екатеринбург; Москва: Кабинетный ученый, 2012. – 134 с.
7. Буданов В.Г. Синергетическая алгебра гармонии // Синергетическая парадигма. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – С. 121-138.
8. Буданов В.Г. Синергия гармонии – ключ к эволюции формы и ритма // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.11144, 14.04.2004. – trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02020025.htm.
9. Василенко С.Л. Знак-символ золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16335, 05.02.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321196.htm.
10. Василенко С.Л. Триномиальные аналогии с золотым сечением // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 31.05.2014. – artmatlab.ru/articles.php?id=115&sm=2 / Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.06.2014. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13846.html.
11. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Физматлит, 1959. – 400 с.
12. Sloane N.J.A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – http://oeis.org/.
13. Василенко С.Л. Серебряные миражи // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 14.08.2011. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11286.html.
14. Касселс Д.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Изд. ин. лит, 1961. – 213 с.

15. Weisstein E.W. Pisot Number / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/PisotNumber.html.

16. Егоров А. Числа Пизо // Квант. – 2005. – № 5, с. 8-13; № 6, с. 9-13.

17. Василенко С.Л. Золотое сечение как начало полезных структур // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17512, 09.06.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321259.htm.

18. Wenninger M.J. Polyhedron Models. – Cambridge, England: Cambridge University Press, 1971, 177-178.

19. Aarts J., Fokkink R., Kruijtzer G. Morphic numbers // Nieuw Archief voor Wiskunde 5/2 (2001), 56-58. – nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2001-02-1-056.pdf.

20. Мир математики: в 40 т. Т. 1: Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты: Пер. с англ. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.

21. Мир математики: в 40 т. Т. 5: Клауди Альсина. Секта чисел. Теорема Пифагора: Пер. с англ. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.

22. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

23. Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени: Пер. с англ. / 5-е изд., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 240 с.

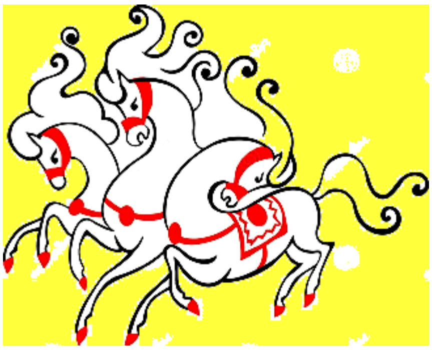
24. Василенко С.Л. Случайность и "золотая" пропорция в системе «хаос–порядок» // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15220 от 09.04.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322034.htm.

25. Кокин А.В. Когнитивные аспекты естественнонаучной картины мира // Авторская страница. – avkokin.ru/documents/857.

26. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1986. – 432 с.

27. Василенко С.Л. "Золотой" генератор псевдослучайных чисел // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16099, 07.10.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161709.htm.

© ВаСиЛенко, 2016
Харьков, Украина



Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html