В.П. Шенягин

Золотые константы в образе гармоничного роста

Содержание

Предисловие: гармоничное приращение как фактор целостной системы

Гармония, несмотря на существенный прорыв в познании ее законов,
всё же находится не на стадии применения.
Всеобъемлюще и многосторонне свершится это в обозримом будущем, –
а ныне еще выкристаллизовывается ее теория.
Мнение автора

Модели гармонии еще выкристаллизовываются, но их свойства и особенности уже различимы. Это стало возможным, благодаря теоретическим и, отчасти, прикладным исследованиям, выполненным многочисленными авторами особенно в минувшие два-три десятилетия.

Классическое золотое сечение является фактором устойчивого *функционирования* целого. Оно изучено глубоко и многогранно.

Чтобы понять *рост* исходного целого до обновленного гармоничного целого, последнее иногда приходится разбирать на части в целях изучения и выявления закономерностей гармонии. *Гармония вне другой гармонии невозможна.* Золотое сечение и золотой (гармоничный) рост не противоречат друг другу.

1. Очевидные модели, порождающие золотые константы

От меры гармонии – к гармонии мер.
По Э.М. Сороко

Большие (прямые) золотые константы s_n являются положительными корнями

$$s_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2} \tag{1}$$

уравнения

$$s_n^2 - ns_n - 1 = 0. \tag{2}$$

Малые (обратные) золотые константы $\bar{s}_n$ есть положительные корни

$$\bar{s}_n = \frac{\sqrt{n^2 + 4n} - n}{2} \tag{3}$$

уравнения

$$\bar{s}_n^2 + n\bar{s}_n - 1 = 0. \tag{4}$$

Обычно они рассматриваются для *целых n*. И обычно при этом выделяют две особенности: мантиссы больших и малых констант равны, их разность дает целое число n.

Однако основное назначение золотых констант, состоящее в обеспечении возможности гармоничного роста и его описания, часто остается без внимания, не считая публикаций относительно лишь классической золотой константы.

Рассмотрим процесс роста исходного n, результатом которого должна быть новая величина $n + \Delta_n = n_\Delta$, причем гармоничная:

1) имеется: n – исходное целое, состоящее из n единиц; 1 – норма;

2) исходное целое n получает гармоничное приращение Δ_n, где индекс n означает соответствующий номер приращения; $\Delta_n < 1$;

3) возникает новое гармоничное целое

$$n + \Delta_n = n_\Delta. \tag{5}$$

Термин *приращение* означает *прирост*, и в статье они оба будут применяться равноценно.

Золотые константы порождаются рядом моделей, основные из которых следующие: 1) инверсия двух чисел; 2) разность инверсных чисел; 3) пропорция как соотношение целого, приращения и единичной нормы; 4) приращение к целому.

1.1. Инверсия двух чисел

Рассмотрим инверсию двух величин: нового целого n_Δ и прироста Δ_n к нему:

$$\boxed{n_\Delta = \frac{1}{\Delta_n}} \tag{6}$$

Равенство (6) с учетом (5) запишется в виде

$$n+\Delta_n=\frac{1}{\Delta_n}. \tag{7}$$

Откуда следует квадратное уравнение

$$\Delta_n^2+n\Delta_n-1=0, \tag{8}$$

эквивалентное (4) $\bar{s}_n^2+n\bar{s}_n-1=0$ с корнями (3) $\bar{s}_n=\frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}$.

Итогом является нахождение приращения Δ_n, которое определяется значением малой золотой пропорции $\bar{s}_n$. Новое целое n_Δ определяется как обратная величина $n_\Delta=\frac{1}{\Delta_n}$ и есть большая золотая пропорция s_n.

1.2. Разность инверсных чисел

Рассмотрим разность двух величин, равную целому *n*:

$$\boxed{n_\Delta-\frac{1}{n_\Delta}=n} \tag{9}$$

Разность (9) приводит к квадратному уравнению

$$n_\Delta^2-nn_\Delta-1=0,$$

эквивалентному (2) $s_n^2-ns_n-1=0$ с корнями (1) $s_n=\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$.

Именно задание условия (9) позволило найти золотые пропорции [1, 1a]. При *n* целом мантиссы n_Δ и $\frac{1}{n_\Delta}=\Delta_n$ равны.

Итогом является нахождение уменьшаемого и его величина является значением большой золотой константы s_n. Вычитаемое определяется инверсной величиной $\frac{1}{n_\Delta}$, т.е. малой золотой пропорцией $\bar{s}_n$.

1.3. Пропорция как соотношение целого, приращения и единичной нормы

Рассмотрим пропорцию, в которой сумма *n* единиц и приращения Δ_n (целое) так относится к единичной норме (среднему), как она – к приращению (меньшему):

$$\boxed{\frac{n+\Delta_n}{1}=\frac{1}{\Delta_n}} \tag{10}$$

Откуда следует квадратное уравнение (8) эквивалентное (4) с корнями (3).

Итогом является нахождение приращения Δ_n, которое определяется значением малой золотой константы $\bar{s}_n$. Большая золотая константа s_n характеризует новое целое $n+\Delta_n=\frac{1}{\Delta_n}$.

Условие (10) близко к равенству (7), не являющемуся пропорцией, в которой участвуют три величины.

В модели золотого соотношения (10) приращение выступает в качестве гармоничного меньшего, ее сумма с *n* единицами – в виде гармоничного целого, единица –

в роли нормированного среднего. Здесь фактически отсутствует понятие большего. Новое целое нормирует «старая» единица как представитель исходного целого, а саму единицу нормирует приращение как обновленный фактор.

Приращение является доминантой, которая характеризует золотую пропорцию при условии наличия нормированной единицы. *Приращение является необходимым и, совместно с единицей (с учетом n единиц), достаточным условием характеристики золотого отношения. Приращение всецело определяет наступление золотого соотношения.*

Итак, золотые пропорции представляют собой отношение целого, равного сумме n единиц и приращения в качестве гармоничного меньшего $\bar{s}_n$, к нормированному единичному и отношение единичного к приращению [2].

Иными словами, золотые пропорции представляют собой отношение суммы n единиц и приращения $\bar{s}_n$ к нормированной единичной величине, которую можно воспринимать в качестве нормированной средней, и отношение среднего к приращению.

Заметим, что при такой интерпретации в определении пропорции *не фигурирует большая часть целого*, равная n единиц. В отношениях ее заменяет нормированная единица.

Золотые константы выполняют функцию нормирования наращенного нового $n+\Delta_n$ *нормой* 1 *и нормирования нормы* 1 *приращением* Δ_n.

1.4. Приращение к целому

Рассмотрим рост исходного n, состоящего из n единиц при единичной норме, за счет гармоничного прироста $\Delta_n < 1$ до величины нового гармоничного целого

$$n+\Delta_n = n_\Delta. \tag{11}$$

Начальные условия и *аддитивный* результат (11) не позволяют определить величину прироста и нового целого. Гармоничный прирост создает гармоничное целое при дополнительном *мультипликативном* условии: прирост Δ_n, изменив, «исказив» исходное целое, состоящее из n единиц, а, значит и саму единицу, в состоянии привести новое гармоничное целое к единичной норме путем *произведения с ним*:

$$\boxed{(n+\Delta_n)\Delta_n = 1} \tag{12}$$

Произведение (12) является условием порождения гармонии. Из него следует уравнение (8) $\Delta_n^2 + n\Delta_n - 1 = 0$ эквивалентное (4) $\bar{s}_n^2 + n\bar{s}_n - 1 = 0$ с корнями (3) $\bar{s}_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}$.

Итогом (12) является нахождение прироста Δ_n, которое определяется значением малой золотой константы $\bar{s}_n$. Итогом (11) станет получение нового целого n_Δ в виде суммы $n+\Delta_n$, которая есть большая золотая константа s_n.

Запишем ключевое условие (12) в максимально компактном виде

$$\boxed{n_\Delta \Delta_n = 1} \tag{13}$$

Прирост (приращение) Δ_n, создав гармоничный дисбаланс системы из n единиц, стремится сохранить единицу, делая это *искусно в виде произведения* с полученным гармоничным целым $\Delta_n n_\Delta = 1$. Это своего рода *произведение искусства гармонии*. Единичное не уничтожается, поэтому процессу роста нравится гармоничное приращение.

Итак, гармоничный рост базируется на системной аддитивно-мультипликативной модели золотых приращений:

$$\boxed{\begin{cases} \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}+\Delta_n = n_\Delta \\ n_\Delta \Delta_n = 1 \end{cases}} \qquad (14)$$

Систему (14) усилим графически, стрелками привлекая внимание к однотипным факторам:

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{1+1+\ldots+1}^{n} & + & \Delta_n & = & n_\Delta \\ \\ n_\Delta & \times & \Delta_n & = & 1 \end{array}$$

Запишем (14) и в таком симметричном виде:

$$\begin{cases} \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}+\Delta_n = n_\Delta \\ \qquad\qquad 1 = \Delta_n \cdot n_\Delta \end{cases} \qquad (*)$$

Условие (14) раскрывает следующую логику гармоничного роста, своеобразную спираль развития с чередованием в ней аддитивных и мультипликативных шагов:

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}+\Delta_n = n_{\Delta_n} \Rightarrow n_{\Delta_n} \cdot \Delta_n = 1 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}+1}_{n+1}+\Delta_{n+1} = n_{\Delta_{n+1}} \Rightarrow n_{\Delta_{n+1}} \cdot \Delta_{n+1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n+1}+1}_{n+2}+\Delta_{n+2} = n_{\Delta_{n+2}} \Rightarrow n_{\Delta_{n+2}} \cdot \Delta_{n+2} = 1 \Rightarrow \ldots$$

Приращение, свидетельствуя о развитии системного целого, характеризует гармонию. Или, по-иному, *именно приращение характеризует гармонию, свидетельствуя о гармоничном развитии целого*. Приращение является доминантой, которая характеризует золотую пропорцию при условии наличия нормированной единицы. *Приращение является необходимым и, совместно с единицей, достаточным условием характеристики золотого отношения*. Золотые константы в виде приращений приведем на рис. 1 [2].

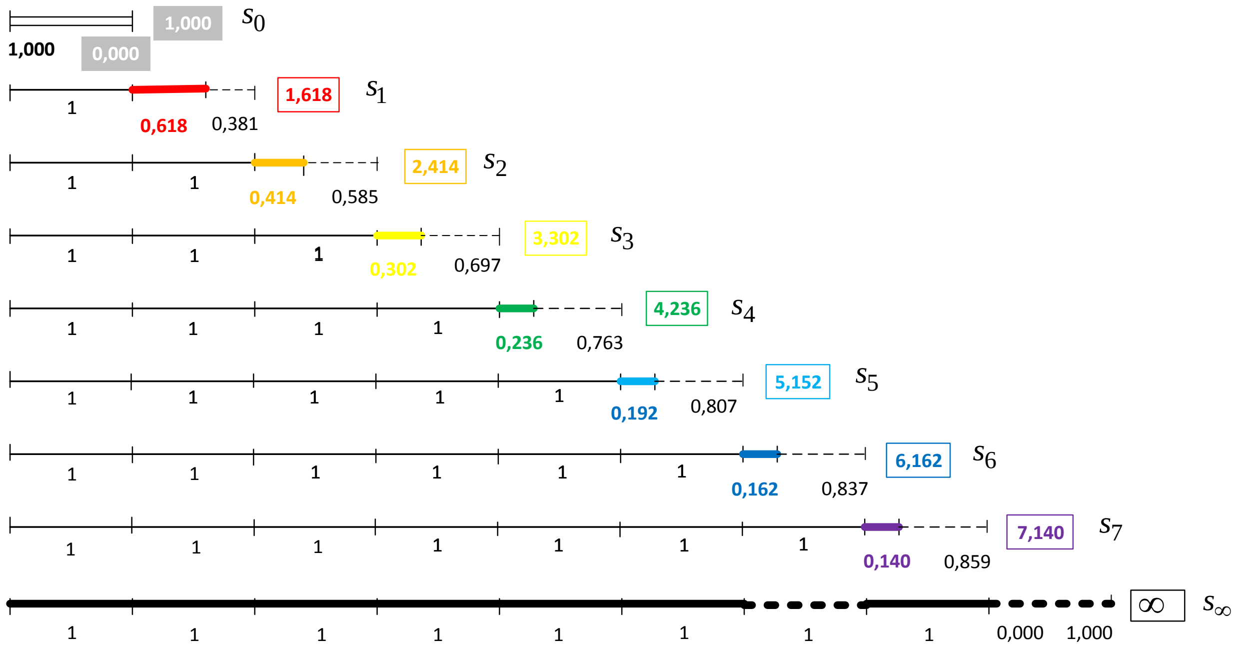


Рис. 1. Золотые константы в виде приращений

Гармоничное приращение определяет наступление золотого соотношения. Малая золотая константа $\bar{s}_n$ является показателем роста.

Например, если три единичных нормы получают приращение $0{,}3027756.. = \bar{s}_3$, это характеризует наступление гармоничного соотношения в виде третьей золотой пропорции $\frac{1}{\bar{s}_3} = \frac{1}{0{,}3027756...} = 3{,}3027756... = s_3 = 3 + \bar{s}_3$. Новое целое в полученной золотой пропорции содержит три нормы в виде трех единиц $1+1+1=3$ и гармоничного приращения, т.е. равно величине $3+\bar{s}_3$.

Кстати, нулевая константа, получая единичное приращение, становится нулевой золотой пропорцией $\frac{0+1}{1} = \frac{1}{1} = 1 = s_0$. Данный результат философски и космологически можно интерпретировать таким образом, что в нуле сокрыта единица как монада, некая норма мироздания.

Итак, подчеркнем особенности приращений к целым *n*:

– наибольшее гармоничное приращение у первой золотой пропорции $\Delta_1 = 0{,}6180339.. > 0{,}5$;

– наибольшее гармоничное приращение при $\Delta_n < 0{,}5$ у второй золотой пропорции $\Delta_2 = 0{,}4142135.. < 0{,}5$;

– по мере увеличения *n* приращение уменьшается $\Delta_3 = 0{,}3027756..$; $\Delta_4 = 0{,}2360679..$ и т.д.;

– бесконечности приращение не требуется, оно незначимо, $\Delta_\infty = 0$;

– нулю необходимо единичное приращение $\Delta_0 = 1$.

2. Золотые константы с целым номером

Основным механизмом, порождающим золотые константы, вероятно, следует считать механизм приращения к целому, где само приращение выступает в виде малой золотой константы, а новое целое – в виде большой, и их совместное произведение при этом равно единице, т.е. норме.

Представим приращения и новые гармоничные целые, изображенные на рис. 1, в виде графиков их зависимости от n.

2.1. Графическая иллюстрация приращений и новых гармоничных целых

Изобразим приращения $\bar{s}_n$ (3) в виде графика функции от n, т.е. $\bar{s}_n = f(n) = \dfrac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}$ (рис. 2).

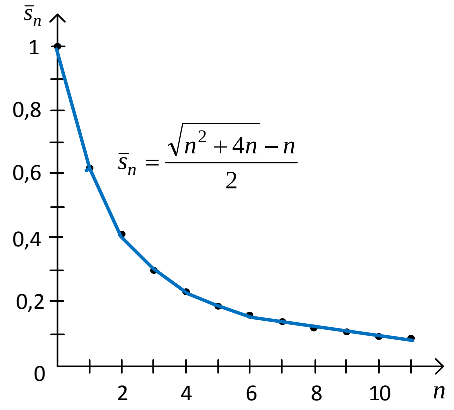


Рис. 2. Гармоничные приращения

Приращение $\bar{s}_n$ изображено в рамках единичной нормы, и, скорее, может относиться к понятию сечения, причем сечения именно единичного целого, хотя для золотых констант, кроме классической первой золотой, задача так и не ставится.

Более информативным, в смысле своего влияния на изменение изначального целого, будет изображение приращения в рамках нового целого $s_n = n_\Delta + \Delta_n$.

Изобразим новое целое в виде графика $s_n = \varphi(n) = \dfrac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$ (рис. 3).

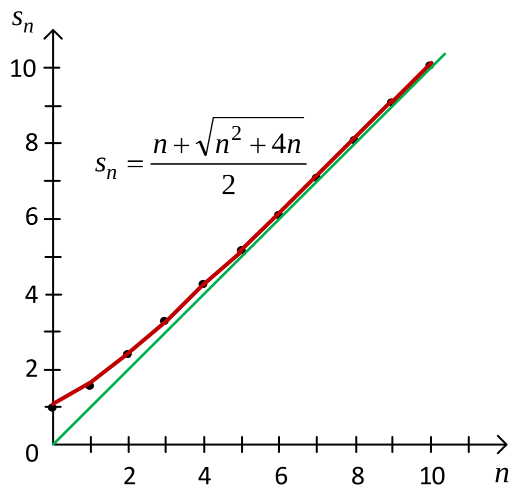


Рис. 3. Новое гармоничное целое

Рост происходит в степенной зависимости, т.е. в геометрической прогрессии. Он ощутим в диапазоне значений n от 0 до 3-х или 4-х. Прямая линия на графике рис. 3 характеризует отсутствие роста, т.е. нулевого роста при $\Delta = 0$. Область между линиями является предметом интереса в ожидании абсолютной величины приращения $\bar{s}_n$ к исходному целому n, т.е. прирост целого. При этом еще больший интерес вызывает величина относительного приращения $\frac{n+\bar{s}_n}{n}$, т.е. рост целого.

Если на рис. 3 поменять местами оси, получим изображение рис. 4.

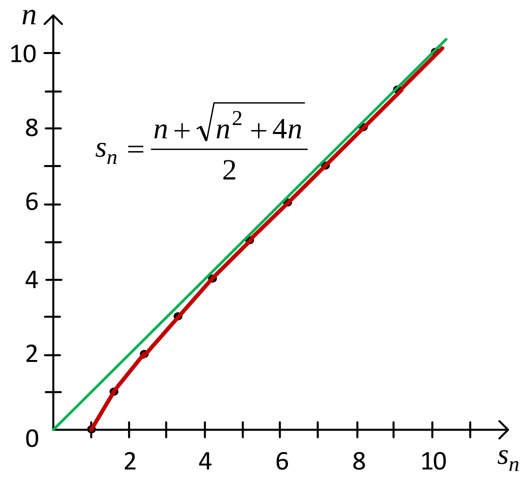


Рис. 4. Новое гармоничное целое

На рис. 3 и 4 прямая под углом 45^0 – это своеобразная ось чисел. Она отсекает исходное n, оставляя лишь приращение под измененным углом зрения, нормируя $\bar{s}_n$ к единице (рис. 5).

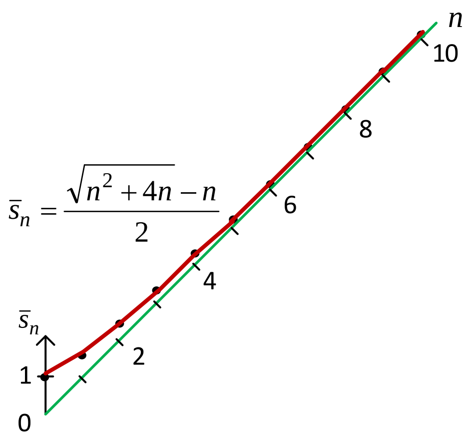


Рис. 5. Зона действия приращений

Рис. 5, будучи деформированным с осями, расположенными под углом 45^0, схож с рис. 3. Он иллюстрирует гармоничное развитие целого, обрамляя зону (русло, фарватер, коридор), в котором действуют приращения.

2.2. Доминирующее проявление первых трех-четырех золотых констант

В различных областях природы, науки, техники проявляются, в основном, первые три золотые константы (пропорции) или золотая, серебряная и бронзовая металлические пропорции. Они характеризуются приращениями величиной 0,618; 0,414 и 0,302, которые составляют 38,2 %; 17,1 % и 9,2 % от нового целого 1,616; 2,414 и 3,302.

Четвертая золотая пропорция (медная) 4,236 образуется, получая приращение к четырем единицам величиной 0,236, т.е. 5,6 % (рис. 1). Она находит более редкое распространение (рис. 6).

Пятая золотая пропорция 5,192, имея относительное приращение всего 3,7%, проявляется еще реже.

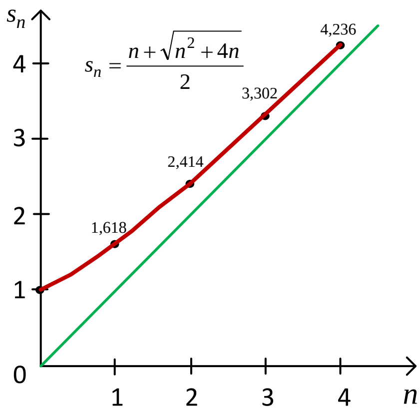


Рис. 6. Первые четыре золотые константы и их приращения

3. Гармоничные величины с нецелым номером

График рис. 3 показывает, что приращения порождают непрерывные константы.

Золотые константы обычно рассматривают как имеющие целочисленные номера. Им свойственно правило сохранения мантисс, сформулированное Г.Б. Аракеляном и приведшее его к открытию констант как чисел даже вне непосредственной связи именно с гармоничными пропорциями и упоминания их.

Однако золотые константы имеют и нецелочисленные номера, проявляя собой уникальные особенности, например, удвоенный рост. При этом мантиссы соответствующих больших и малых констант совпадать не будут, не отвечая правилу сохранения мантисс.

По этой причине я вновь однозначно возвратился к названию *золотые пропорции (константы)*, названия которым дал в публикации 1997 года [1], но которые позже стал двойственно именовать *мантиссовыми (золотыми) пропорциями*, тем самым подчеркивая их отличительное свойство равенства мантисс, которое, оказывается, принадлежит лишь пропорциям с целочисленной нумерацией-названием.

Впрочем, произведение больших и малых констант с нецелочисленными *n* и неравными мантиссами дает единицу, а разность – свой номер константы-пропорции. Рассмотрим это на примере золотой константы с номером $\sqrt{2}$, получающей удвоенный рост.

Иными словами, гармоничные константы можно разделить на две группы:

– рациональные с целочисленными коэффициентами *n*, которые называем золотыми, металлическими, мантиссовыми;

– с нецелочисленными номерами, например, $s_{1,5}$, включая иррациональную нумерацию, например, $s_{\sqrt{2}}$.

Напомню, что рациональная и иррациональная составляющие золотых констант изложены в одноименной работе [3].

3.1. Удвоенный рост и золотая константа

Найдем исходное целое *x*, приращение которого $\bar{s}_x$ равно своей величине *x*. Целое возрастает вдвое, получая абсолютный прирост $\bar{s}_x = \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2} = x$. Относительный прирост будет равен единице $\frac{\bar{s}_x}{x} = 1$. Решение следует из условия $\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2} = x$. Откуда

$$\sqrt{x^2+4} = 3x;\quad x^2+4 = 9x^2;\quad 8x^2 = 4;\quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, пропорция имеет номер $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и такую же исходную величину (рис. 7).

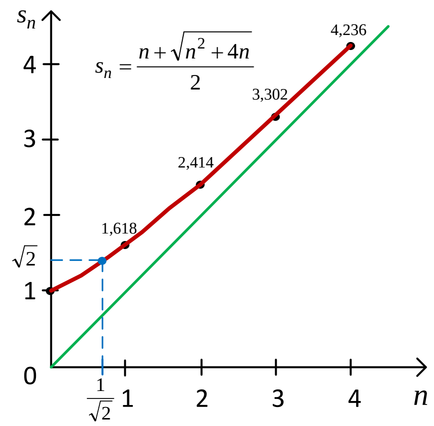


Рис. 7. Удвоенный рост

Проверка:

– абсолютный прирост исходного цельного $\frac{1}{\sqrt{2}}$ составляет значение

$$\bar{s}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+4} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

– новое целое $s_x = s_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+4} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

– произведение $\bar{s}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot s_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$;

– относительный прирост $\frac{\bar{s}_x}{x} = \frac{\bar{s}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$.

Результат соответствует $s_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$-константе при $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, где приращение составляет $\Delta_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \bar{s}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а новое гармоничное целое принимает значение $s_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$, увеличившись вдвое, и иллюстрирован на рис. 7.

3.2. Примечательные золотые константы с нецелым номером

Рассмотрим исходное цельное нецелой величины 8,888…. Определим:

– приращение $\bar{s}_{8,888} = \dfrac{\sqrt{8{,}888...^2+4}-8{,}888...}{2} = 0{,}111...$;

– новое целое $s_{8,888} = \dfrac{\sqrt{8{,}888...^2+4}+8{,}888...}{2} = 8{,}999...$;

– произведение $\bar{s}_{8,888} \cdot s_{8,888} = 0{,}111...\cdot 8{,}999... = 0{,}999... \approx 1$;

– разность между новым целым и исходным $8{,}999...-8{,}888... = 0{,}111...$, что равно приращению;

– отношение нового целого к приращению $\dfrac{8{,}999...}{0{,}111...} = 81$;

– отношение приращения к новому целому $\dfrac{0{,}111...}{8{,}999...} = \dfrac{1}{81} = 0{,}012345679...$.

Пример характеризует гармоничную константу под номером 8,888….

Рассмотрим и иные золотые константы с нецелым номером, сведя данные в таблицу 1.

В таблице числовые значения получены путем отбрасывания последующих разрядов, а не округлены по правилам арифметики.

Таблица 1

Некоторые золотые константы с нецелым номером

Исходное целое (номер константы)		Приращение		Новое целое		Рост (гр.6 : гр.2)		Отношение приращения к исходному целому (гр.4 : гр.2)	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\dfrac{1}{\sqrt{e(1+e)}}$	0,314		0,541		0,855	e	2,718		1,722
$\dfrac{1}{\phi\sqrt{\phi}}$	0,485	$\sqrt{\bar{\phi}}$	0,786	$\sqrt{\phi}$	1,271	ϕ^2	2,618	ϕ	1,618
$\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	0,541		0,765		1,306	$1+\sqrt{2}$	2,414	$\sqrt{2}$	1,414
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0,707	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0,707	$\sqrt{2}$	1,414	2	2	1	1
–	1,5	–	0,5	2	2	–	1,333	–	0,333

4. Числовые оси и треугольники, поясняющие золотые константы

…если в слове – начало, то в числе –
продолжение сознательности, просвещения
и всего успеха или прогресса человечества.
Д.И. Менделеев

4.1. Золотые константы – среднее арифметическое чисел натурального и гармонического иррационального ряда

Золотые константы в одномерной системе координат могут быть получены при условии наличия двух числовых осей – натурального ряда (рациональная составляющая) и гармонического ряда (иррациональная составляющая) путем нахождения их средней арифметической [3] (рис. 8).

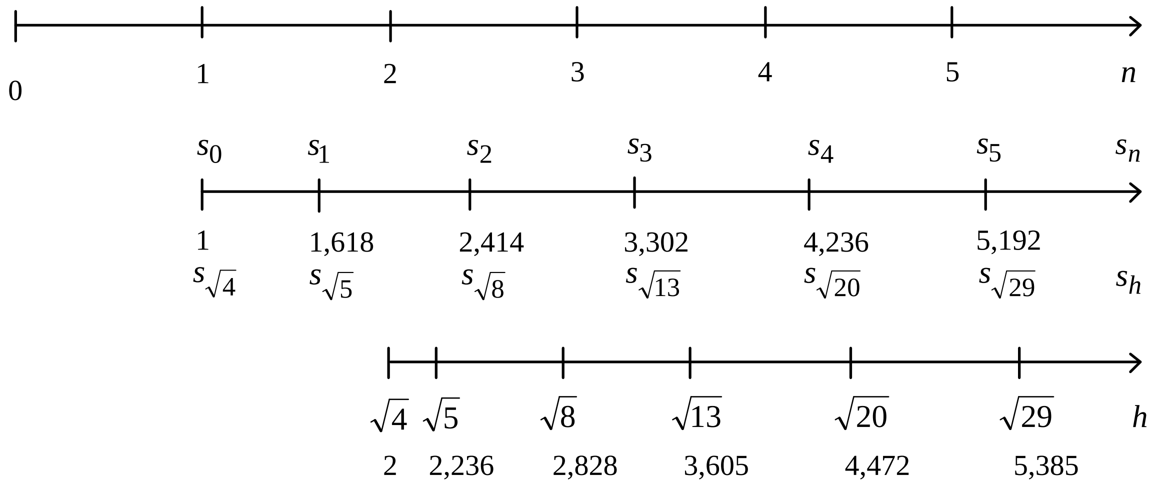
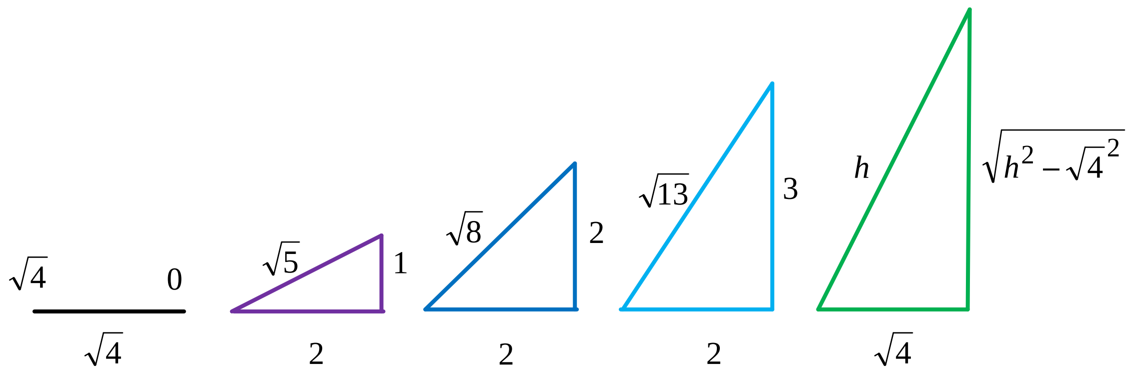


Рис. 8. Натуральная числовая ось 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, *n* (первая ось) и гармоническая числовая ось $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{29}$, …, *h* (третья ось), поясняющие золотые константы (вторая ось)

Гармонические иррациональные числа, взаимодействующие с числами рационального натурального ряда, равны числам натурального ряда с некоторым избытком. Они образуются по формуле $h_n = \sqrt{n^2 + 2^2}$.

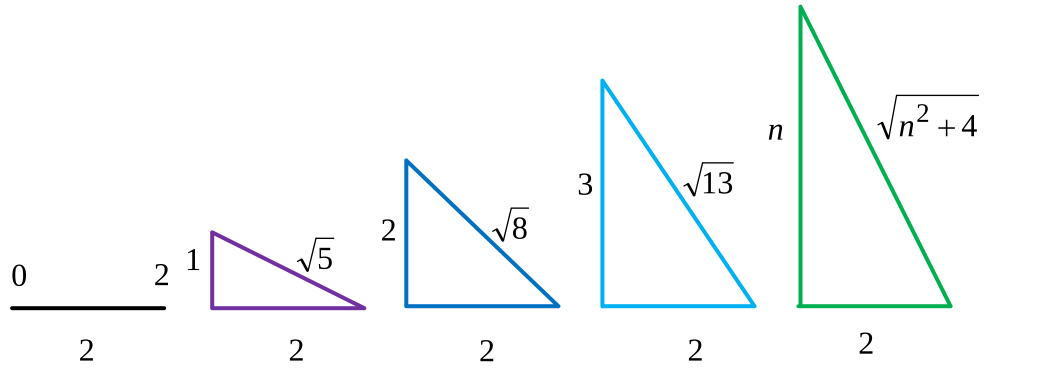
4.2. Золотые константы – сумма гипотенузы и одного из катетов, деленной на величину второго катета, равного двум

Золотые константы в двумерной системе координат иллюстрируются треугольниками (рис. 9 и 10) [3, 4] в виде суммы гипотенузы и вертикального катета, деленной на величину горизонтального базисного катета.



$$s_{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}+0}{\sqrt{4}} \quad s_{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad s_{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}+2}{2} \quad s_{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}+3}{2} \quad s_h = \frac{h+\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}$$

Рис. 9. Треугольники, поясняющие золотые константы s_h, формируемые из чисел гармонического ряда $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, …, h



$$s_0 = \frac{0+\sqrt{4}}{2} \qquad s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad s_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \qquad s_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \qquad s_n = \frac{n+\sqrt{n^2+2^2}}{2}$$

Рис. 10. Треугольники, поясняющие золотые константы s_n,
формируемые из чисел натурального ряда 0, 1, 2, 3, …, n

Рисунки 9 и 10 иллюстрируют перестановку мест чисел гармонического и натурального ряда, перестановку «рейтинга» (роли) чисел этих рядов, своеобразную инверсию.

5. Триада инверсии

Гармония настойчиво демонстрирует, что одной,
даже золотой пропорции, ей недостаточно.

Золотым пропорциям присуща триада инверсии: видовая, системная и интегральная [2]. Теория триады инверсии достаточно стройна, но это не заслуга исследователя. Это заслуга самой теории.

5.1. Видовая инверсия

Видовая (внутренняя) инверсия выражает собой инверсию большого s_n и малого $\bar{s}_n$ параметра в каждой из золотых пропорций:

$$\frac{1}{\bar{s}_n} = s_n\,; \quad \frac{1}{s_n} = \bar{s}_n\,.$$

Лучшей видовой гармонией среди систем с целым n, порожденных по принципу инверсии с *меньшей величиной* целого (приращение 0,4142135), является вторая золотая (серебряная) пропорция (2,4142135… и 0,4142135…):

$$\frac{1}{0{,}4142135...} = 2{,}4142135...; \quad \frac{1}{2{,}4142135...} = 0{,}4142135... .$$

Она лучшая золотая гармония меньшего.

Лучшей видовой гармонией среди систем с целым n, порожденных по принципу инверсии с *большей величиной* целого (приращение 0,618), является классическая золотая пропорция (1,6180339… и 0,6180339…):

$$\frac{1}{0{,}6180339...} = 1{,}6180339...; \quad \frac{1}{1{,}6180339...} = 0{,}6180339... .$$

Это единственная золотая гармония большего.

5.2. Системная инверсия

Лучшего совершенства среди гармоний большего и меньшего, чем первая и вторая золотые пропорции, нет. Оттого они почти инверсны между собой, порождая системную инверсию. В системе золотых пропорций такое свойственно только им.

Системная инверсия первой и второй золотой пропорции по отношению друг к другу определяется соотношениями

$$\frac{\bar{\phi}}{1-\bar{\phi}} \approx \frac{1-\bar{s}_2}{\bar{s}_2} \text{ и } \frac{\bar{s}_2}{1-\bar{s}_2} \approx \frac{1-\bar{\phi}}{\bar{\phi}};$$

$$\frac{0{,}618}{0{,}382} \approx \frac{0{,}586}{0{,}414} \approx \frac{0{,}6}{0{,}4} \text{ и } \frac{0{,}414}{0{,}586} \approx \frac{0{,}382}{0{,}618} \approx \frac{0{,}4}{0{,}6}$$

с коэффициентом асимметричности, порождающим идеальную асимметрию величиной $\sqrt{2} - \frac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}032$ или 3,2%, равным π^{-3} с точностью до 0,01% [2].

5.3. Интегральная инверсия

Интегральная инверсия бесконечности и нуля характеризуется двумя соотношениями:

$$\frac{1}{0} = \infty; \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$

Она выражается через приращение, а точнее, отсутствием приращения $\Delta = 0$:

$$\frac{\infty + 0}{1} = \frac{1}{0}.$$

Пусть бесконечность имеет цветовой образ черного, а нулевая точка – белого (рис. 1). Будучи крайними воображаемыми проявлениями их можно воспринимать в виде крайних метрик. В метрике белого и черного все цвета выглядят серыми.

6. Золотые константы – гармоники мироздания

Относительные приращения величиной более 9 % порождают первые три золотые константы (золотая, серебряная, бронзовая), которые, в силу этого, занимают доминирующее проявление в различных процессах.

6.1. Распределение единичного целого на основе трех первых золотых констант

Проанализируем распределение единичного целого на основе первых трех золотых констант на предмет степени их гармоничности, сведя результаты в табл. 2 [5, 6].

Таблица 2

Декомпозиция единичного целого на основе первых трех золотых констант

Шаги декомпозиции	Доли (веса) единичного целого							
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
	Первая (классическая) золотая пропорция							
0	1							
1	0,62				0,38			
2	0,38		0,24		0,24		0,14	
3	0,24	0,14	0,14	0,10	0,14	0,10	0,10	0,04
	Вторая золотая пропорция (серебряная)							
1	0,59				0,41			
2	0,35		0,24		0,24		0,17	
3	0,21	0,14	0,14	0,10	0,14	0,10	0,10	0,07

	Третья золотая пропорция (бронзовая)							
1	0,70				0,30			
2	0,49		0,21		0,21		0,09	
3	0,34	0,15	0,15	0,06	0,15	0,06	0,06	0,03

Выделим особенности весов на третьем шаге декомпозиции при распределении целого на основе классического золотого сечения. Наборы весов из трех величин, включающие 0,14 и 0,10, относительно центра асимметричны. Крайние значения близки к взаимно обратным, т.е. примерно инверсны: $\frac{1}{0{,}24} \approx 0{,}04$.

При распределении целого на основе второй золотой константы $s_2 \approx 2{,}414$ единичное целое на первом шаге декомпозиции структурируется из величин $\frac{1}{2{,}414} \approx 0{,}41 = \bar{s}_2$ и $1 - 0{,}41 = 0{,}59$. Каждую из них на втором шаге разбиваем на две части $\frac{0{,}41}{2{,}414} \approx 0{,}17$ и $0{,}41 - 0{,}17 = 0{,}24$. Аналогично, проведя декомпозицию на третьем шаге, получим веса для восьми элементов единичного потенциала, в том числе $\frac{0{,}24}{2{,}414} \approx 0{,}10$ и $0{,}24 - 0{,}10 = 0{,}14$.

При распределении весов как на основе первой, так и на базе второй золотой константы на последнем шаге декомпозиции веса шести элементов потенциала из восьми, при их округлении до двух значащих цифр после запятой, полностью совпадают. При этом веса *a* и *h* крайних элементов целого отличаются несущественно, составляя доли 0,24 и 0,21, а также 0,04 и 0,07, отличаясь на 0,03 или 3%, что близко к идеальной асимметрии $\sqrt{2} - \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}032$ [2]. Сказанное объясняется системной инверсией этих пропорций.

При распределении потенциала на основе третьей золотой пропорции целое на первом шаге декомпозиции структурируется из величин $\bar{s}_3 \approx 0{,}30$ и $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Каждая из них на втором шаге разбивается на две части $\frac{0{,}70}{3{,}302} \approx 0{,}21$ и $0{,}70 - 0{,}21 = 0{,}49$, затем $\frac{0{,}49}{3{,}302} \approx 0{,}15$; $0{,}49 - 0{,}15 = 0{,}34$ и $\frac{0{,}21}{3{,}302} \approx 0{,}15$; $0{,}21 - 0{,}15 = 0{,}06$. На последнем шаге наборы из величин 0,15 и 0,06 асимметричны относительно центра данных. Веса при третьей золотой константе на третьем шаге декомпозиции еще более тяготеют к инверсии. Близкими к ней оказываются не только крайние значения весов $\frac{1}{0{,}34} \approx 0{,}03$, но и $\frac{1}{0{,}15} \approx 0{,}06$, что указывает на глубокое проникновение принципов гармонии в эталонную структуру единичного целого.

6.2. Три-четыре ключевые гармоники мироздания и «гармоничный шум»

Первые три золотые константы, без сомнения, составляют основу критериев и процессов в различных областях природы. Четвертая золотая (никелевая) константа, вероятно, проявляется весьма часто. Пятая золотая константа (молибденовая?), возможно, также проявляется весьма нередко.

Остальные золотые константы не претендуют на ключевую роль в процессах мироздания, будучи относительно невеликими и существенно уменьшаясь по мере увеличения номера пропорции *n*. Эти гармоники (гармонии), начиная с пятой-шестой, присутствуя, видимо, составляют своеобразный «шум», гармоничный, но всё же шум.

Их редкие проявления упрощают восприятие названий пропорций В. Шпинадель, назвавшую пропорции металлическими, без чего вызывало бы серьезные затруднения в однозначных толкованиях в терминах металлов пропорций с большими номерами, например, девятая, одиннадцатая и выше (какие металлические?) пропорции. Отсюда, первые три (четыре) доминирующие константы удобны и приятны для восприятия и в «металлических» терминах: золотая, серебряная, бронзовая, (никелевая).

7. Менее очевидные модели, порождающие золотые константы

В разделе 1 рассмотрены условия и модели, результатом которых становятся золотые константы. Эти модели лежат на поверхности, путь их нахождения незамысловатый, эвристический и к ним несложно прийти логическим путем. Существуют и иные условия, задание которых приводит к золотым константам, но они не столь очевидны. Вспомним некоторые из них.

7.1. Предел отношения смежных чисел последовательности

Рассмотрим рекуррентную последовательность в виде суммы двух предыдущих значений, где приоритет отдается более *позднему* члену ряда u_{k-1}, который берется с бо́льшим весом n по сравнению с u_{k-2}, взятым как есть:

$$\boxed{u_k = u_{k-2} + n u_{k-1}} \tag{15}$$

Члены последовательности составляют систему

$$\begin{cases} u_1, u_2, \\ u_k = u_{k-2} + n u_{k-1}. \end{cases}$$

Предел отношения смежных чисел последовательности равен величине:

$$s_n = \lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k-2} + n u_{k-1}}{u_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k-2}}{u_{k-1}} + n = \frac{1}{s_n} + n,$$

где k – количество членов последовательности.

То есть, предел отношения смежных чисел последовательности (15) равен своей инверсии, сложенной с n:

$$\boxed{s_n = \frac{1}{s_n} + n} \tag{16}$$

Сумма (16) приводит к квадратному уравнению (2) $s_n^2 - n s_n - 1 = 0$ с корнями (1) $s_n = \dfrac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2}$.

Итогом является нахождение отношения смежных чисел последовательности, которое определяется значением большой золотой пропорции s_n.

7.2. Соотношение между целым и частями

В подразделе 1.3 пропорции определены как соотношение целого, приращения и единичной нормы, т.е. сумма n единиц и приращения Δ_n так относится к нормированному единичному, как она – к приращению (10): $\dfrac{n + \Delta_n}{1} = \dfrac{1}{\Delta_n}$.

В (10) большее как таковое не значится. Но поскольку большее равно n единиц, возникает желание определить пропорцию традиционно именно в виде соотношений целого, большего и меньшего.

Для чего представим (16) $s_n = \frac{1}{s_n} + n$ в виде

$$s_n = n\left(1 + \frac{1}{ns_n}\right). \qquad (17)$$

Примем

$$\boxed{s_n = \frac{A}{na}} \qquad (18)$$

где a – меньшая часть целого;

A – большая часть в виде разности целого и меньшей части;

n – количество единиц.

Получим (17) в виде:

$$\frac{A}{na} = n\left(1 + \frac{1}{n\frac{A}{na}}\right),\ \frac{A}{na} = n\left(1 + \frac{a}{A}\right),\ \frac{A}{na} = n\frac{A+a}{A}.$$

Откуда

$$\boxed{\frac{A}{a} = n^2\frac{A+a}{A}} \qquad (19)$$

s-пропорции, относящиеся к группе квадратичных, т.е. младших степенных уравнений, выражают деление отрезка в пропорции, при которой отношение большей части A к меньшей a равно увеличенному в n^2 раз отношению всего отрезка $A+a$ к большей части A [7]. Это оправдывает обозначение пропорций буквой s – начальной в слове *square*.

Соотношение (19) будет:

– для второй золотой пропорции

$$\frac{2}{0{,}414} = 2^2 \cdot \frac{2+0{,}414}{2};\ \frac{2}{0{,}414} = 2 \cdot 2{,}414 \quad \text{и равно } 4{,}828;$$

– для пропорций в общем виде

$$\frac{n}{\bar{s}_n} = ns_n.$$

Отношение большего к меньшему равно n величин большой золотой пропорции, что соответствует (18):

$$\boxed{\frac{A}{a} = ns_n}$$

Выразим соотношение между целым и его частями (19) таким образом:

$$\frac{A+a}{A} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{A}{a}.$$

Это эквивалентно делению отрезка в пропорции, при которой отношение всего отрезка $A+a$ к большей части A равно уменьшенному в n^2 раз отношению большей части A к меньшей a.

Соотношение (18) выразится:

– для второй золотой пропорции

$$\frac{2+0{,}414}{2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{0{,}414};\ \frac{2{,}414}{2} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}414} \quad \text{и равно } 1{,}207;$$

– в общем виде

$$\frac{s_n}{n}=\frac{1}{n\bar{s}_n}.$$

Отметим, что формулы (17) и (18) мало полезны, по ним нельзя определить ни части целого, ни золотые константы.

7.3. Квадратное уравнение группы младших степенных уравнений

Нормированное целое представляется единицей в виде суммы или разности его частей, изменяющихся по определенному закону, например, в геометрической прогрессии со знаменателем q [8]:

$$1=\bar{q}_n+\bar{q}_n^2+\ldots+\bar{q}_n^n+\bar{q}_n^{n+1},\ \text{где}\ \bar{q}_n<1; \qquad (20)$$

$$1=q_n^{n+1}-q_n^n-\ldots-q_n^2-q_n,\ \text{где}\ q_n^{n+1}>1. \qquad (21)$$

Уравнение (21) характеризуется возвратной последовательностью, где каждый ее член, начиная с $(m+1)$-го, выражается через одно и то же количество n непосредственно предшествующих ему членов по формуле

$$u_m=u_{m-n}+u_{m-n+1}+u_{m-n+2}+\ldots+u_{m-2}+m_{n-1}, \qquad (22)$$

где $m\ge n\ge 1$.

Идея формирования числовой последовательности (22) принадлежит М. Барру (1913), о чем свидетельствует М. Гарднер. Эти числовые аддитивные ряды задают общий вид констант как предел отношения смежных чисел:

$$q_n=\lim_{m\to\infty}\frac{u_m}{u_{m-1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{u_{m-1}+u_{m-2}+\ldots+u_{m-n-1}+u_{m-n}}{u_{m-1}}=$$

$$=1+\lim_{m\to\infty}\frac{u_{m-2}}{u_{m-1}}+\lim_{m\to\infty}\left(\frac{u_{m-3}}{u_{m-2}}\cdot\frac{u_{m-2}}{u_{m-1}}\right)+\ldots+\lim_{m\to\infty}\left(\frac{u_{m-n}}{u_{m-n-1}}\cdot\frac{u_{m-n-1}}{u_{m-n-2}}\cdot\frac{u_{m-n-2}}{u_{m-n-3}}\cdot\ldots\cdot\frac{u_{m-3}}{u_{m-2}}\cdot\frac{u_{m-2}}{u_{m-1}}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{q_n}+\frac{1}{q_n^2}+\ldots+\frac{1}{q_n^{n-1}}+\frac{1}{q_n^n}.$$

Таким образом $q_n=1+\frac{1}{q_n}+\frac{1}{q_n^2}+\ldots+\frac{1}{q_n^{n-1}}+\frac{1}{q_n^n}$, что тождественно (21).

Наиболее обобщенное уравнение для (21) имеет вид

$$k_{n+1}q_n^{n+1}-k_nq_n^n-\ldots-k_2q_2^2-k_1q_1-k=0,$$

где $k_{n+1},k_n,\ldots,k_2,k_1,k_0$ – числовые коэффициенты.

Уравнение (21), записанное в виде $q_n^{n+1}-q_n^n-\ldots-q_n^2-q_n-1=0$, характеризует равновесие различных частей, задающих существование целостной единичной системы. Из его крайних членов $q_n^{n+1},q_n^n,q_n^2,q_n$, включая свободный член –1, составим три группы трехчленных степенных уравнений [7, 9]:

$q_n^2-q_n-1=0$ – младшие степенные уравнения или квадратные уравнения;

$q_n^{n+1}-q_n^n-1=0$ – старшие степенные уравнения;

$q_m^{n+1}-q_n-1=0$ – крайние степенные уравнения.

Они закрепились как инструментарий и модели при исследовании пропорций и поиске их проявлений в следующих обозначениях и названиях:

$\phi^2-\phi-1=0$ – характеризует классическую золотую пропорцию;

$p_n^{n+1}-p_n^n-1=0$ – характеризует p-пропорции А.П. Стахова [10];

$v_n^{n+1}-v_n-1=0$ – характеризует v-пропорции Э.М. Сороко [11].

Из уравнения классической золотой пропорции путем задания по определенной схеме перед его членами коэффициентов n, подобно заполнению счетчика импульсов в радиотехнике путем проталкивания разряда n, получим следующие виды квадратных (младших степенных) уравнений [7, 9]:

$$x^2-x-1=0;\ x^2-x-n=0;\ x^2-nx-1=0;\ x^2-nx-n=0;$$

$$nx^2-x-1=0;\ nx^2-x-n=0;\ nx^2-nx-1=0;\ nx^2-nx-n=0;\ x^2-x-1=0.$$

Первые четыре уравнения будем считать основными. Три из них, без учета первого уравнения, корнями которого являются классические золотые константы, после детального изучения, проявили себя весьма характерно. В данном случае обратимся к третьему уравнению, снабдив неизвестное индексом n, т.е. $x_n^2-nx_n-1=0$. Результат соответствует уравнению (2) с корнями (1):

$$\boxed{s_n^2-ns_n-1=0}$$

Итогом анализа группы младших степенных уравнений стало нахождение уравнения, положительные корни которого для соответствующих n явились большими золотыми константами s_n. Отрицательные корни означают малые золотые константы $\bar{s}_n$, взятые со знаком минус. При n целом мантиссы s_n и $-\bar{s}_n$ равны.

Для нахождения уравнения, положительными корнями которого будут малые золотые константы $\bar{s}_n$, достаточно обратиться к уравнению (20), пройти тот же логический путь, получив соответствующие группы степенных уравнений и виды квадратных уравнений, среди которого будет искомое $\bar{x}_n^2+n\bar{x}_n-1=0$, эквивалентное (4).

Попутно отметим, что три группы трехчленных степенных уравнений и их восемь видов позволили выявить стройную систему уравнений, характеризующих гармоничные соотношения и константы, приведенную в приложении.

Заключение

1. Золотое сечение и золотой (гармоничный) рост не противоречат друг другу. Более того, они дополняют друг друга, являясь симбиозом функционирования целого и его развития без потери гармоничности, с приобретением новой.

Настоящую статью можно назвать «Золотые константы в образе гармоничного приращения» или дать ей инверсное название – «Гармоничное приращение и рост целого в образе золотых констант».

2. Золотые (металлические) пропорции не рассмотрены как модели в виде золотых сечений дуального целого единичной величины своего уровня подобно классическому золотому сечению. Они заслуживают этого, что предполагается изложить в отдельной статье «Золотые константы в образе деления единичного целого».

3. Гармония вне другой гармонии невозможна.

Гармония соткана из противоречий, неравнодушных друг к другу.

Гармония – явление мирозданческое.

<Справедливо обратное:> мироздание – гармоничное явление.

Гармония работает на противоречии, сходстве и их симбиозе.

Одно из предназначений гармонии – приносить умиротворение, радость и счастье, что и приобретает исследователь при соприкосновении с ней.

Гармония не нуждается в эпитетах, главное звание у гармонии – гармония.

Приложение. Систематизация гармоничных соотношений

П.1. Группы и виды степенных уравнений, характеризующих гармоничные соотношения

Виды трехчленных степенных уравнений в авторской трактовке, за исключением классической золотой пропорции, получили следующие наименования и обозначения:

$\phi^2-\phi-1=0$ – характеризует классическую золотую пропорцию;

$r_n^2-r_n-n=0$ – характеризует корневые пропорции (r-пропорции);

$s_n^2-ns_n-1=0$ – характеризует золотые (металлические) пропорции (s-пропорции);

$f_n^2-nf_n-n=0$ – характеризует дробные пропорции (f-пропорции);

$na_n^2-a_n-1=0$ – характеризует a-пропорции, равноценное $a_n^2-\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n}=0$;

$nb_n^2-b_n-n=0$ – характеризует b-пропорции, равноценное $b_n^2-\frac{b_n}{n}-1=0$;

$nc_n^2-nc_n-1=0$ – характеризует c-пропорции, равноценное $c_n^2-c_n-\frac{1}{n}=0$.

Систематизация групп и видов уравнений наглядна при представлении ее в виде таблицы (табл. 3).

Таблица 3

Систематизация степенных уравнений, характеризующих гармоничные соотношения

	Квадратные (младшие степенные) уравнения, s-пропорции		Старшие степенные уравнения, p-пропорции Стахова А.П.	Крайние степенные уравнения, v-пропорции Сороко Э.М.
1	$\phi^2-\phi-1=0$	$\phi^2-\phi-1=0$	$p_n^{n+1}-p_n^n=-1=0$	$v_n^{n+1}-v_n-1=0$
2	$s_{rn}^{\;2}-s_{rn}-n=0$	$r_n^2-r_n-n=0$	$p_{rn}^{\;n+1}-p_{rn}^{\;n}=n$	$v_{rn}^{\;n+1}-v_{rn}=n$
3	$s_{sn}^{\;2}-ns_{sn}-1=0$	$s_n^2-ns_n-1=0$	$p_{sn}^{\;n+1}-np_{sn}^{\;n}=1$	$v_{sn}^{\;n+1}-nv_{snm}=1$
4	$s_{f\,n}^{\;2}-n_{f\,n}-n=0$	$f_n^2-nf_n-n=0$	$p_{f\,n}^{\;n+1}-np_{f\,n}^{\;n}=n$	$v_{f\,n}^{\;n+1}-nv_{f\,n}=n$
5	$ns_{an}^{\;2}-s_{an}-1=0$	$na_n^2-a_n-1=0$	$np_{an}^{\;n+1}-p_{an}^{\;n}=1$	$nv_{an}^{\;n+1}-v_{an}=1$
6	$ns_{bn}^{\;2}-s_{bn}-n=0$ $s_{bn}^{\;2}-\frac{s_{bn}}{n}-1=0$	$nb_n^2-b_n-n=0$ $b_n^2-\frac{b_n}{n}-1=0$	$np_{bn}^{\;n+1}-p_{bn}^{\;n}=n$ $p_{bn}^{\;n+1}-\frac{p_{bn}^{\;n}}{n}=1$	$nv_{bn}^{\;n+1}-v_{bn}=n$ $v_{bn}^{\;n+1}-\frac{v_{bn}}{n}=1$
7	$ns_{cn}^{\;2}-ns_{cn}-1=0$ $s_{cn}^{\;2}-s_{cn}-\frac{1}{n}=0$	$nc_n^2-nc_n-1=0$ $c_n^2-c_n-\frac{1}{n}=0$	$np_{cn}^{\;n+1}-np_{cn}^{\;n}=1$ $p_{cn}^{\;n+1}-p_{cn}^{\;n}=\frac{1}{n}$	$nv_{cn}^{\;n+1}-nv_{cn}=1$ $v_{cn}^{\;n+1}-v_{cn}=\frac{1}{n}$
8	$ns_{d\,n}^{\;2}-ns_{d\,n}-n=$ $s_{d\,n}^{\;2}-s_{d\,n}-1=0$ $s_\phi^{\;2}-s_\phi-1=0$	$nd_n^2-nd_n-n=0$ $d_n^2-d_n-1=0$ $\phi^2-\phi-1=0$	$np_{d\,n}^{\;n+1}-np_{d\,n}^{\;n}=n$ $p_{d\,n}^{\;n+1}-p_{d\,n}^{\;n}=1$ $p_n^{n+1}-p_n^n=1$	$nv_{d\,n}^{\;n+1}-nv_{d\,n}=n$ $v_{d\,n}^{\;n+1}-v_{d\,n}=1$ $v_n^{n+1}-v_n=1$

П.2. Соотношения между частями и целым для трех групп пропорций

Существует стройная система соотношений между частями и целым для трех групп пропорций, размещенных на строках таблицы 7 с индексами *r*, *s*, *f* [7] (табл. 4). Здесь *A* – большая часть, *a* – меньшая часть целого величиной $A+a$.

Таблица 4

Соотношения между частями *A*/*a* и целым с большей частью (*A*+*a*)/*A*

Квадратичные пропорции		*p*-пропорции группы А. Стахова		*v*-пропорции группы Э. Сороко	
ϕ	$\frac{A}{a}=\frac{A+a}{A}$	p_n	$\left(\frac{A+a}{A}\right)^n$	v_n	$\sqrt[n]{\frac{A+a}{A}}$
r_n	$\frac{A}{a}=\frac{1}{n}\cdot\frac{A+a}{A}$	p_{r_n}	$\frac{1}{n}\left(\frac{A+a}{A}\right)^n$	v_{r_n}	$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{A+a}{A}}$
s_n	$\frac{A}{a}=n\left(n\frac{A+a}{A}\right)$	p_{s_n}	$n\left(n\frac{A+a}{A}\right)^n$	v_{s_n}	$n\cdot\sqrt[n]{n\frac{A+a}{A}}$
f_n	$\frac{A}{a}=n\frac{A+a}{A}$	p_{f_n}	$\left(n\frac{A+a}{A}\right)^n$	v_{f_n}	$\sqrt[n]{n\frac{A+a}{A}}$

Библиографический список

1. *Шенягин В.П.* Пифагор, или Каждый создает свой миф. Философское эссе / Ежемесячный литературный журнал Союза писателей Молдовы «Кодры. Молдова литературная». – Кишинев, Кодры. Молдова литературная, 1997, № 9-10. – 288 с., с. 204-227.

2. *Шенягин В.П.* Триада инверсии в основах мироздания // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567. публ. 18427, 07.01.2014 – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0001/005a/00011319.htm.

3. *Шенягин В.П.* Рациональная и иррациональная составляющие золотых пропорций // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 18785, 14.04.2014. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321289.htm.

4. *Шенягин В.П.* *s*-пропорции и сигналы / Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: Научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск: LXI, 17-18 мая 2006 г., г. Москва. – М.: 2006. – 394 с., с. 390-393.

5. *Шенягин В.П.* Гармонизация организационно-экономического потенциала промышленного предприятия // Экономика. Предпринимательство. Окружающая среда. (ЭПОС). Международный журнал. 2014. № 4 (60). С 50-64. – http://www.mael.ru/UserFiles/File/4(60)2014.pdf.

6. *Шенягин В.П.* Эволюция экономической теории и ростки гармонии (часть 2) / «Экономический журнал», № 1(33), 2014; РГГУ. – М.: Издательство «Каллиграф», 2014. – 160 с., с. 36-54. – http://cyberleninka.ru/article/n/evolyutsiya-ekonomicheskoy-teorii-i-rostki-garmonii-chast-2.

7. *Шенягин В.П.* Системы пропорций и их использование при формировании сигналов / Международная научно-техническая конференция к 100-летию со дня рождения В.А. Котельникова: Москва, 21-23 октября 2008 г.: Тезисы докладов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 176 с, с. 43-45.

8. *Ясинский С.А.* Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи. – М.: Горячая линия-Телеком. – 239 с.

9. *Шенягин В.П.* Систематизация гармоничных соотношений как инструментарий в реализации концепций развития экономических систем в рамках единой теории гармонии / Научный журнал «Вестник РГГУ». Серия «Экономические науки». – М.: Издательский центр РГГУ, 2012, № 12 (92) – с. 96-104.

10. *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

11. *Сороко Э.М.* Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: Введение в общую теорию гармонии систем. Изд. 2-е. – М.: КомКнига, 2006. – 264 с. (Первое издание 1984 г.).