А.Н. Шелаев **Сведения об авторе**

АППРОКСИМАЦИЯ ФОРМУЛЫ ПЛАНКА ДЛЯ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДВУМЯ КОМПОНЕНТАМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ АМПЛИТУДАМИ НА ПРИМЕРЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ХОКИНГА

Возможность снятия вырождения в формуле Планка [1] и образования в равновесном излучении различных фундаментальных физических объектов - от «чёрных тел» до «чёрных дыр» и реликтового излучения - двух компонент, была выдвинута и обоснована автором статьи в работах [2-4].

В данной статье сообщается о получении компактной и изящной формулы, позволяющей аппроксимировать формулы Планка как для спектрального распределения мощности излучения, так и для суммарной мощности излучения с любой (!) точностью суммой двух компонент с произвольными амплитудами на примере излучения Хокинга от вращающихся чёрных дыр. При этом в результате аналитических оценок и компьютерных расчётов сложная задача 4-х параметрической аппроксимации формул Планка двумя параметрами в показателях экспонент и двумя амплитудными множителями сведена к 2-х параметрической формуле, в которой один из параметров определяет показатели экспонент, а второй параметр определяется через отношение амплитуд компонент.

Предложенная Планком формула для плотности спектрального излучения чёрного тела $u_\nu d\nu$ ($[u_\nu d\nu] = Дж/м^3$) в интервале частот $[\nu,\ \nu + d\nu]$ имеет вид:

$$u_\nu d\nu = (8\pi h / c^3) \cdot \nu^3 d\nu / [\exp(h\nu / kT) - 1] \qquad (1),$$

где h, k - постоянные Планка и Больцмана, c - скорость света, T - температура.

Исходя из (1) и учитывая соотношение $\nu = c / \lambda$, спектральную плотность излучения по длинам волн λ запишем в виде:

$$u_\lambda d\lambda = (8\pi hc) \cdot d\lambda / \lambda^5 [\exp(hc / kT\lambda) - 1] \qquad (2)$$

Интегрируя (1) и (2) по всем частотам и длинам волн получим формулу для суммарной плотности излучения u_Σ:

$$u_\Sigma = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = 8\pi^5 (kT)^4 / 15(hc)^3 \qquad (3)$$

Из (1)-(3) следует, что параметры излучения Планка выражаются как через фундаментальные физические и математические константы c, h, k, e, π, но и, как показано в [2], могут выражаться через константы золотого сечения $\phi = (-1+\sqrt{5})/2$, $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$, связанные соотношениями $\Phi = 1+\phi = 1/\phi$. Поскольку $8/15 = (3+5)/3\cdot 5 = (1/3+1/5)$, а, числа 2, 3, 5 и, следовательно, любые целые числа *точно* выражаются через ϕ, Φ, то суммарное излучение можно представить, напр., в таком компактном и красивом виде:

$$u_\Sigma = ((kT)^4/(hc)^3)\cdot \pi^5 [1/(\phi^2+\Phi^2) + 1/(\phi+\Phi)^2] \qquad (4)$$

Для упрощения дальнейшего анализа введём две безразмерные переменные α и β, пропорциональные ν и λ: $\alpha = \nu\cdot h/kT$ и $\beta = \lambda \cdot kT/hc$, $\alpha\cdot\beta = 1$. При этом спектральные плотности излучения (1), (2) выразятся через следующие функции $U(\alpha)$ и $U(\beta)$:

$$U(\alpha) = \alpha^3/(e^\alpha - 1), \qquad U(\beta) = 1/\beta^5 (e^{1/\beta} - 1) \qquad (5),$$

$$u_\nu d\nu = A\cdot U(\alpha)d\alpha, \qquad u_\lambda d\lambda = A\cdot U(\beta)d\beta, \qquad A = 8\pi(kT)^4/(hc)^3 \qquad (6),$$

$$J = \int_0^\infty U(\alpha)d\alpha = \int_0^\infty U(\beta)d\beta = \pi^4/15 \qquad (7)$$

Исходя из анализа соотношений (5)-(7), можно допустить возможность следующего разложения функций $U(\alpha)$ и $U(\beta)$ на две компоненты:

$$U(\alpha) = \alpha^3/(e^\alpha - 1) = U1(\alpha) + U2(\alpha) = P_1\cdot \alpha^{3-\eta_1}/(e^\alpha - 1) + P_2 \cdot \alpha^{3+\eta_2}/(e^\alpha - 1) \quad (8),$$

$$U(\beta) = 1/\beta^5 (e^{1/\beta} - 1) = U1(\beta) + U2(\beta) = P_1/\beta^{5-\eta_1}(e^{1/\beta} - 1) + P_2/\beta^{5+\eta_2}(e^{1/\beta} - 1) \quad (9)$$

Аналитические оценки и компьютерные расчёты позволили установить, что точные соотношения (8),(9) можно аппроксимировать с любой (!) точностью, используя всего лишь два параметра: малый параметр η и параметр a, равный отношению амплитуд спектральных компонент $a = a_1 / a_2$. При этом

$$\eta_1 = \eta, \qquad \eta_2 = a \cdot \eta, \qquad 0 \le a = a_1 / a_2 \le 1 \tag{10}$$,

$$P_1 = a_1 / (a_1 + a_2) = 1/(1+1/a), \qquad P_2 = a_2 / (a_1 + a_2) = 1/(a+1) \tag{11}$$

Для примера для $\eta = 0{,}1$ (рис. 1, 2 а), $\eta = 0{,}01$ (рис. 1,2 б) и $a = a_1 / a_2 = 3/5$ приведены расчётные графики для $U(\alpha) = \alpha^3 / (e^{\alpha} - 1)$, $U(\beta) = 1/\beta^5 (e^{1/\beta} - 1)$ и 2-х спектральных компонент по частоте α (рис. 1) и длине волны β (рис.2):

$$U101(\alpha) = (3/8) \cdot \alpha^{3-\eta} / (e^{\alpha} - 1), \quad U201(\alpha) = (5/8) \cdot \alpha^{3-\eta \cdot 3/5} / (e^{\alpha} - 1) \tag{12}$$,

$$\Sigma U01(\alpha) = U101(\alpha) + U201(\alpha), \qquad \Delta U01(\alpha) = U(\alpha) - \Sigma U01(\alpha) \tag{13}$$,

$$U101(\beta) = (3/8) \cdot \beta^{-5+\eta} / (e^{1/\beta} - 1), \quad U201(\beta) = (5/8) \cdot \beta^{-5-\eta \cdot 3/5} / (e^{1/\beta} - 1) \tag{14}$$,

$$\Sigma U01(\beta) = U101(\beta) + U201(\beta), \qquad \Delta U01(\beta) = U(\beta) - \Sigma U01(\beta) \tag{15}$$

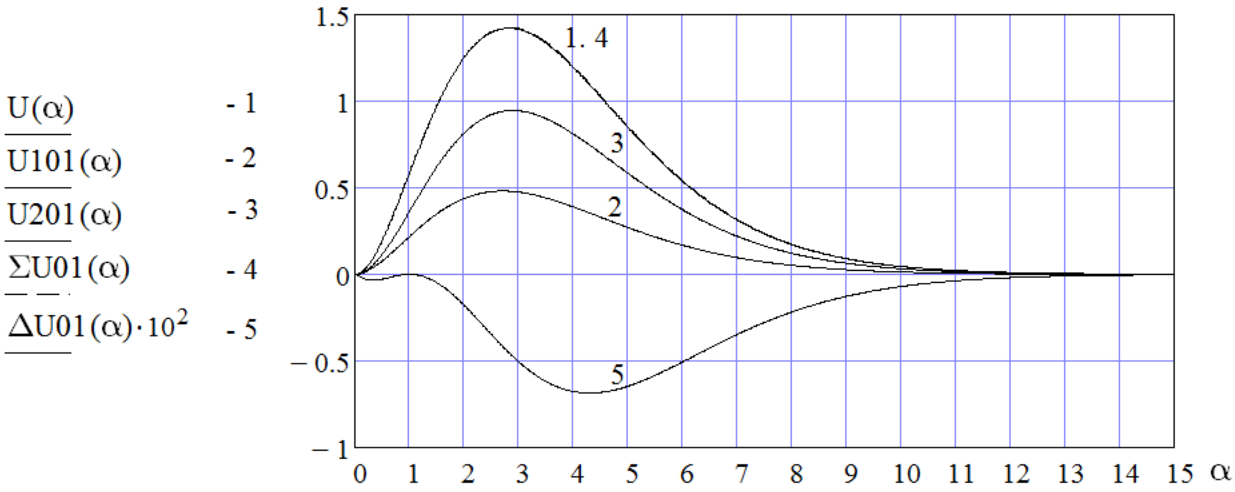

Рис. 1 а

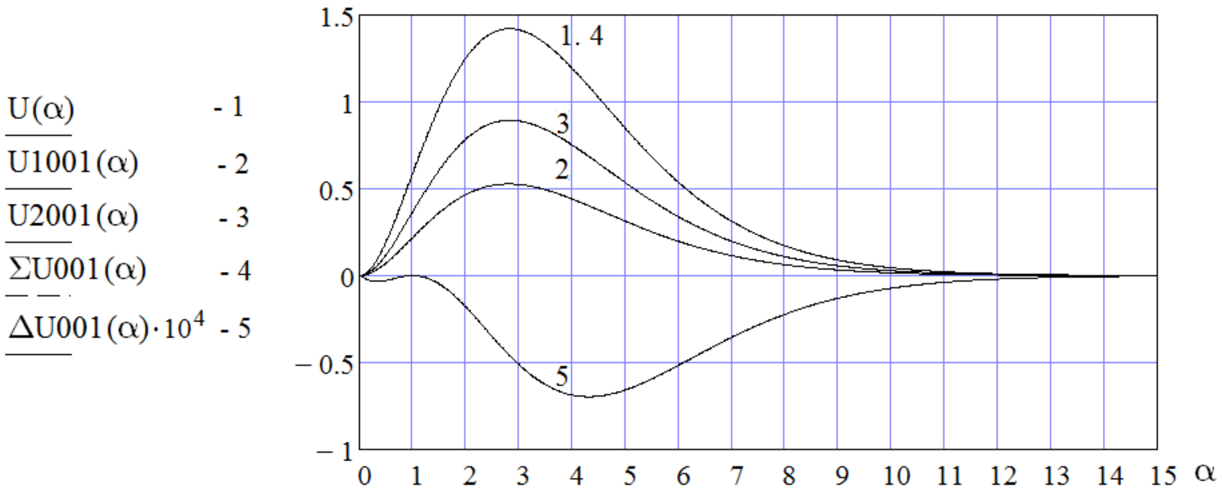

Рис. 1 б

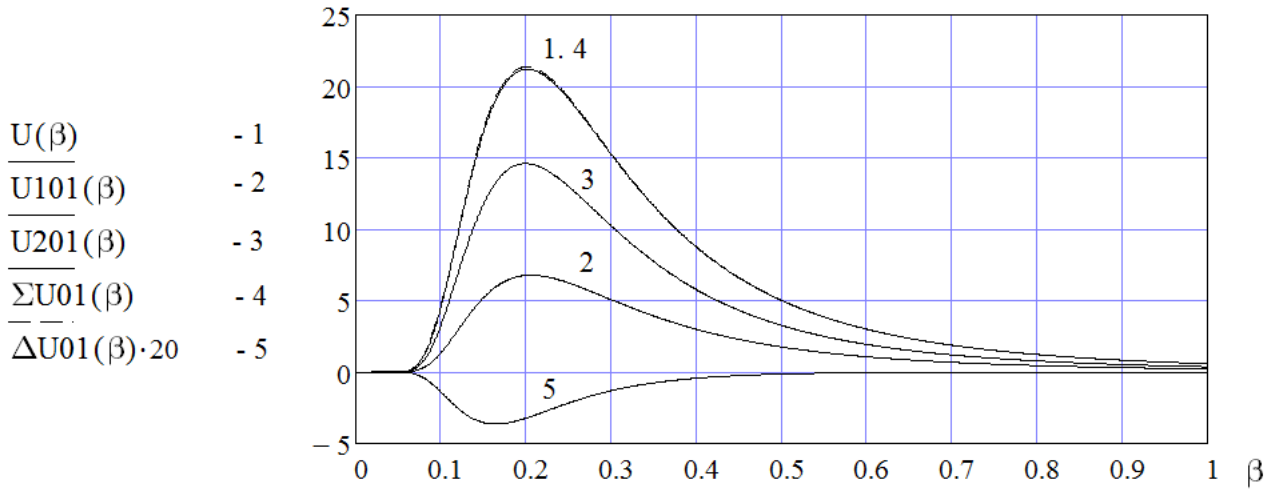

Рис. 2 а

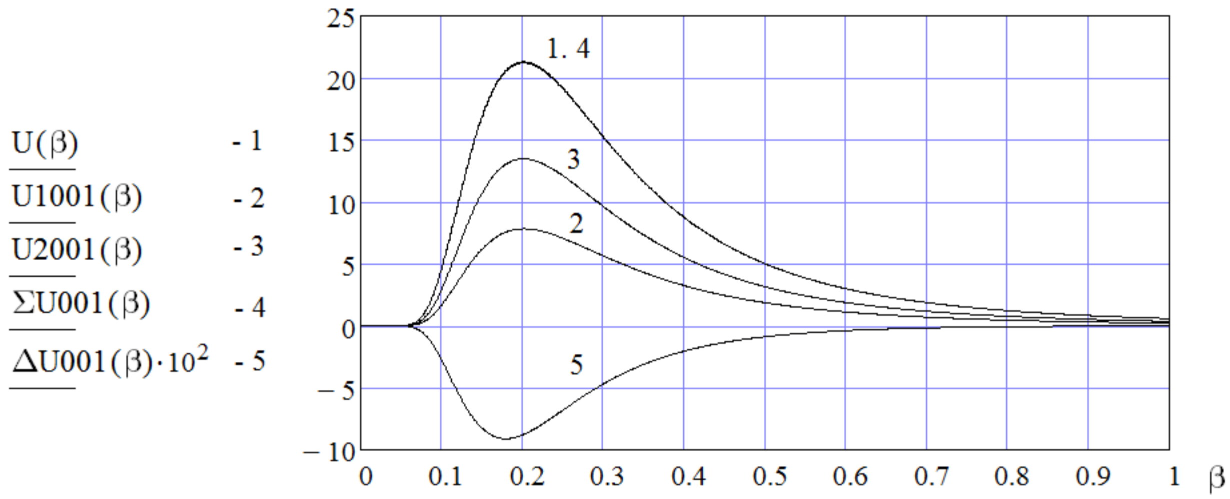

Рис. 2 б

Из рис. 1, 2 а. б следует, что визуально графики функций $U(\alpha)$ и $U(\beta)$ почти неотличимы от графиков функций $\Sigma U\eta(\alpha)$ и $\Sigma U\eta(\beta)$ как для $\eta = 0{,}1$, так и для $\eta = 0{,}01$. В то же время графики функций $\Delta U\eta(\alpha) = U(\alpha) - \Sigma U\eta(\alpha)$ и $\Delta U\eta(\beta) = U(\beta) - \Sigma U\eta(\beta)$ показывают, что при уменьшении η на порядок максимальные величины отклонений $\Delta U\eta(\alpha)$ и $\Delta U\eta(\eta)$ (т. е. точности аппроксимации) уменьшаются примерно на два порядка. важно также то, что форма отклонений $\Delta U(\alpha)$, $\Delta U\eta(\beta)$ и положения максимумов в $|\Delta U\eta(\alpha)|$, $|\Delta U\eta(\beta)|$ по частоте α и по длине волны β при этом практически не меняются.

Соответствующие графики $\Delta U\eta(\alpha)$, $\Delta U\eta(\beta)$ при $\eta = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) показаны на рис. 3, 4.

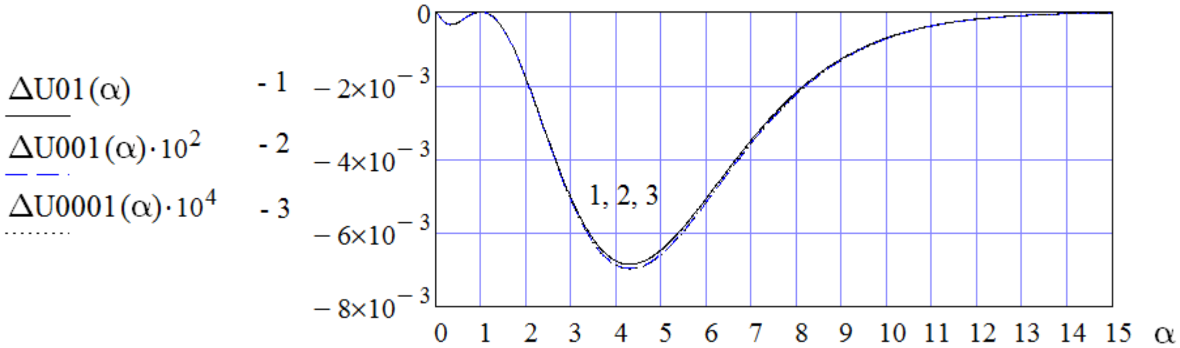

Рис. 3

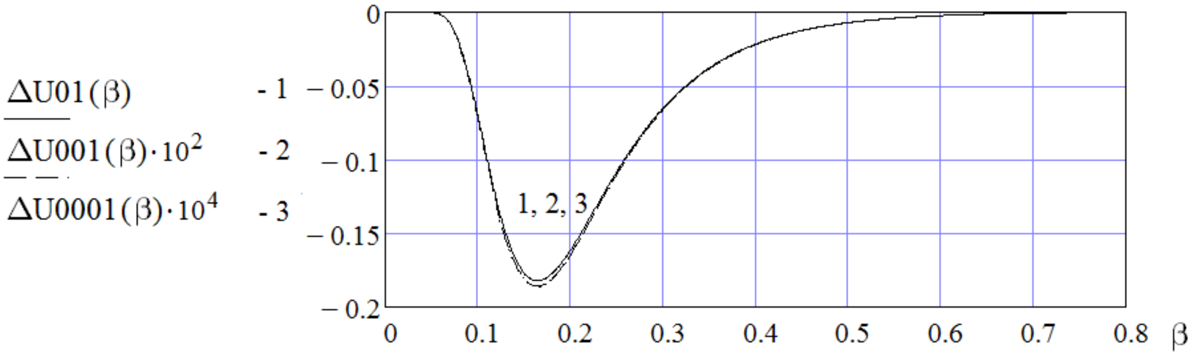

Рис. 4

Исследования зависимости отклонений $\Delta U\eta a(\alpha)$, $\Delta U\eta a(\beta)$ от соотношения амплитуд компонент $0 \le a = a_1 / a_2 \le 1$ при постоянном η также показало, что при уменьшении a данные отклонения также уменьшаются, причём форма этих отклонений и положение их максимумов практически не изменяются. Соотвествующие зависимости $\Delta U\eta a(\alpha)$ при $\eta = 0{,}1$ и $a = 1{,}0;\ 0{,}6;\ 0{,}1$ (кривые 1. 2, 3) показаны на рис. 5.

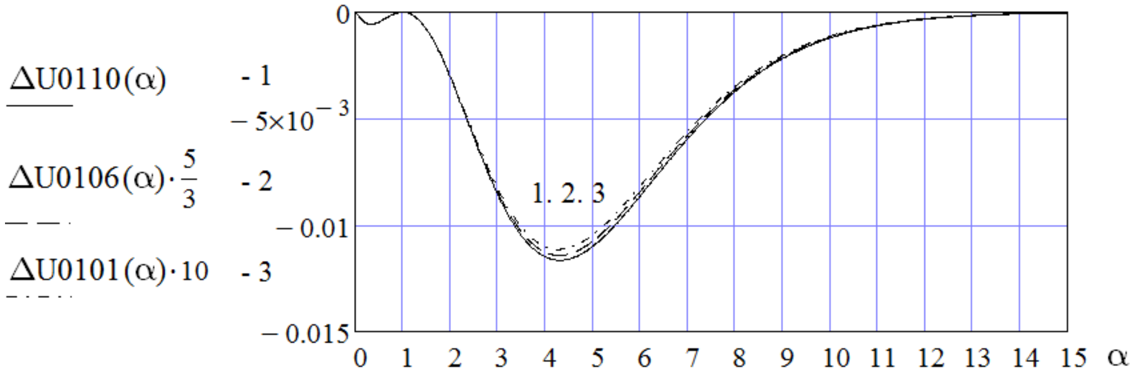

Рис. 5

Существенно, что минимальное отклонение $|\Delta U(\alpha)| = 0$ имеет место при любых η и a при $\alpha = 1$, т.е. при $h\nu = kT$.

Перейдём теперь к рассмотрению положения максимумов в функциях, описывающих равновесное планковское излучение.

Вначале укажем, что длины волн для максимумов $U(\alpha)$, $U(\beta)$ различны: $\lambda_{\nu\,max} = hc / kT\alpha_{max}$, $\lambda_{\lambda\,max} = hc\beta_{max} / kT$, $\lambda_{\lambda\,max} / \lambda_{\nu\,max} = 0{,}568\,252$. Причём в закон смещения Вина входит $\lambda_{\lambda\,max}$: $\lambda_{\lambda\,max} \cdot T = hc\beta_{max} / k \simeq 0{,}289\,776\,\text{см} \cdot \text{К}$. Различие $\lambda_{\nu\,max}$ и $\lambda_{\lambda\,max}$ связано с неравенством интервалов $d\nu$ и $d\lambda$ в (1), (2).

В общем случае положение максимумов в функциях $U\eta(\alpha) = \alpha^{3-\eta} / (e^{\alpha} - 1)$ (где для исходного излучения $\eta = 0$, для первой компоненты $\eta_1 = \eta$, для второй компоненты $\eta_2 = -(a_1 / a_2) \cdot \eta$) определяется соотношением:

$$e^{-\alpha} = 1 - \alpha / (3 - \eta) \tag{16}$$

Уравнения типа (16) можно решать с помощью специальной W-функции Ламберта, не выражающейся через обычные функции и являющейся обратной функцией к функции $z \cdot e^{z}$, при этом по определению $z = W(z) \cdot e^{W(z)}$. В общем случае z - комплексное число, и функция Ламберта является многозначной, n-я ветвь которой обозначается $W(n, z)$. Для действительных чисел $z = x \geq -1/e$ и $W \geq -1$ используется однозначная функция $W(0, x)$. Графики функций $-x \cdot e^{-x}$, $\text{LambertW}(0, x)$, $\text{LambertW}(-1, x)$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) показаны на рис. 6.

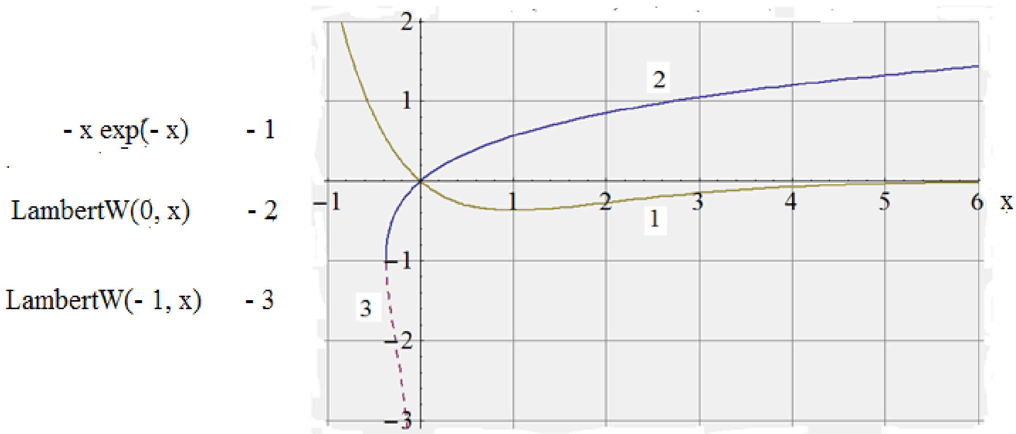

Рис. 6

Функции Ламберта вычисляются в современных математических пакетах программ. Так, в MathCad эти функции обозначаются LambertW(n, z), в Maple - $\mathrm{Lambert}\,W_n(z)$. в Mathematica - ProductLog[n, z].

Решением простейшего уравнения $x \cdot e^x = C$, является $x = W(0, C)$.

Более же сложное уравнение типа (16) имеет следующее решение:

$$e^{-d \cdot x} = p \cdot x + q \quad \Rightarrow \qquad x = q/p + W(d \cdot e^{dq/p}/p)/d \tag{17}$$

При $x = \alpha,\ \ d = 1,\ \ p = -1/(3-\eta),\ \ \ q = 1$ решением уравнения (16) является

$$\alpha = 3 - \eta + W(0, -(3-\eta) \cdot e^{-(3-\eta)}) \tag{18}$$

Используя найденное выражение (18) для максимумов в спектрах излучения по частоте α получим, что максимум в исходной формуле Планка, имеющий место при $\eta = 0$, реализуется при $\alpha \simeq 2{,}821\,439\,372\,121$. Максимум для первой компоненты для случая $\eta = 0{,}1$, реализуется при $\alpha_1 \simeq 2{,}706\,334\,722\,909$, Максимум для второй компоненты, имеющий место в данном случае при $\eta = -0{,}1 \cdot 3/5$, реализуется при $\alpha_2 \simeq 2{,}889\,929\,923\,266$. Точность расчёта максимумов в спектрах излучения практически неограничена. Относительный интервал между максимумами по частоте $2(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_1 + \alpha_2) \simeq 6{,}562\,\%$

Аналогично с помощью функции Ламберта могут быть найдены максимумы для функций, описывающих излучение Планка по длине волны $\beta = 1/\alpha$. $U\eta(\beta) = \beta^{-5+\eta}/(e^{1/\beta} - 1)$ (где для исходного излучения $\eta = 0$, для первой компоненты $\eta_1 = \eta$, для второй компоненты $\eta_2 = -(a_1/a_2) \cdot \eta$) так как эти максимумы имеют место при

$$e^{-1/\beta - \eta} = 1 - 1/5(\beta - \eta) \quad \text{или при} \quad e^{-\alpha(5-\eta)} = 1 - \alpha/(5-\eta) \tag{19}$$

Уравнение (19) имеет тот же вид, что и уравнение (16), поэтому его решение по α и β определяются соотношением аналогичным соотношению (18):

$$\alpha = 5 - \eta + W(0, -(5-\eta) \cdot e^{-(5-\eta)}), \qquad \beta = 1/\alpha \tag{20}$$

В итоге получаем, что для исходного излучения максимум излучения реализуется при $\beta \simeq 1/4{,}965\,114\,231\,744 \simeq 0{,}201\,405\,235\,273$. Для 1-й компоненты для $\eta = 0{,}1$– при $\beta_1 \simeq 1/4{,}862\,102\,388\,239 \simeq 0{,}205\,672\,345\,037$, для 2-й компоненты для $\eta = -0{,}1 \cdot 3/5$ - при $\beta_2 \simeq 1/5{,}026\,807\,832\,487 \simeq 0{,}198\,933\,405\,319$ Относительный интервал между данными максимумами по длине волны равен $2(\beta_1 - \beta_2)/(\beta_1 + \beta_2) \simeq 3{,}331\,\%$.

Проведённые далее компьютерные расчёты показали, что формулы Планка можно аппроксимировать суммой двух компонент не только для спектрального распределения мощности излучения, но и для суммарной мощности излучения определяемой интегральными соотношениями (7). При этом компьютерные расчёты показали резкое увеличение точности выполнения соотношений (7) при уменьшении η. Так, при $\eta = 0{,}001$ и $a = 3/5$ получаем:

$$I = \int_0^{700} \alpha^3 / (e^{\alpha} - 1)\, d\alpha \simeq 6{,}493\ 939\ 402\ 203, \quad \pi^4/15 \simeq 4{,}493\,939\,402\,267 \qquad (21),$$

$$J1 = (3/8) \cdot \int_0^{700} \alpha^{3-0{,}001} / (e^{\alpha} - 1)\, d\alpha \simeq 2{,}432\,325\,538\,444 \simeq \pi^4/40 \qquad (22),$$

$$J2 = (5/8) \cdot \int_0^{700} \alpha^{3+3\cdot 0{,}0001/5} / (e^{\alpha} - 1)\, d\alpha \simeq 4{,}051\,617\,295\,361 \simeq \pi^4/24 \qquad (23),$$

$$J1 + J2 \simeq 6{,}493942833 \simeq \pi^4/15, \quad J1/J2 \simeq 0{,}598\,256\,406 \simeq 3/5 = a_1/a_2 \qquad (24),$$

$$(J_2 - J_1)/J \simeq 0{,}250\,294\,293 \simeq [(3+5)/2]^{-1} = [(a_1 + a_2)/2]^{-1} \qquad (25)$$

Верхний предел в интегралах (21)-(23) определялся возможностью численного счёта быстро убывающих функций, при этом, как следует из сравнения значений интегралов с их точными значениями, отклонения от точных значений начинаются лишь с 11-го знака после запятой.

Отметим также, что суммарная мощность излучения Планка, согласно (7) равная $\pi^4/15$ *точно* равна значениям ряда важных математических функций. Так, для Zeta-функции Римана, определяемой выражениями (26), получаем:

$$\mathrm{Zeta}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{z}=\prod_{p}1/(1-p^{z}),\quad n\in N,\ z\in C,\ p-\text{простые числа} \qquad (26)$$

$$\pi^4/15=6\cdot \mathrm{Zeta}(4)=12\cdot \mathrm{Zeta}^2(2)/5=21\cdot \mathrm{Zeta}(6)/2\cdot \mathrm{Zeta}(2)=7\cdot \mathrm{Zeta}(8)/\mathrm{Zeta}(6)$$

и т. д. При этом выявляется нетривиальная особенность излучения Планка, состоящая в том, что его суммарная мощность выражается через π, простые числа и симметричные комбинации констант золотого сечения: $2=\phi\Phi+\Phi\phi$, $3=\phi^2+\Phi^2$, $5=(\phi+\Phi)^2$, $4=(3+5)/2=\Phi^3-\phi^3$ и т. д. Приведём пример получения числа $\pi^4/15$ и с помощью $\mathrm{Psi}(m,x)$ - функции:

$$\mathrm{Psi}(m,x)=d^m(\ln(\Gamma(x))/dx^m,\ \text{где}\ \Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{t}\,dt\ \text{- гамма функция} \qquad (27)$$

Исходя из соотношений (27) получаем, что $\pi^4/15=\mathrm{Psi}(3{,}1)$.

В заключение укажем, что физическое обоснование возможности существования двух компонент в равновесном излучении Хокинга от вращающихся чёрных дыр [5-14] будет проведено в отдельной дискуссионной статье. Дело, во-первых, в том, что последовательная теория квантовой гравитации пока не создана и, кроме того, не во всех «обычных» теориях гравитации (напр., в релятивистской теории гравитации [15] акад. А..Логунова), альтернативных общей теории относительности (см. [11-12]), признаётся само существование чёрных и белых дыр. Более того, сам Хокинг в своей статье [10] 2014 г. отказался от предположения о наличии у чёрной дыры чёткого «горизонта событий» в попытке решить проблему несохранения информации при возвращении части квантово-спутанных фотонов в чёрную дыру, сравнив теоретические предсказания свойств чёрных дыр с предсказаниями погоды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макс Планк*. Единство физической картины мира. Сб. статей. Научная автобиография. М., Наука, 1966. – 287 С.

2. *А.Н. Шелаев*. К возможности существования двух компонент в излучении Планка. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 2, - С.115-119.

3. *А.Н. Шелаев*. Нетривиальные соотношения в равновесном тепловом излучении Планка. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл. 77-6567, публ. 18360, 10.12.2013. - 10 С.

4. *А.Н. Шелаев*. Математическое обоснование возможности существования двух компонент в излучении Планка. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл. 77-6567, публ. 19788, 20.11.2014. – 8 С.

5. *С.Хокинг.* Рождение частиц в чёрных дырах. Ст. в сб. А.Эйнштейн и теория гравитации. М., Мир, 1979. – С.479-512.

6. *С. Хокинг.* Интегралы по траекториям в приложении к квантовой гравитации. Ст. в сб. Общая теория относительности. М., Мир, 1983. - С. 363-406.

7. *С. Хокинг*. Чёрные дыры и молодые Вселенные. Пер. с англ. СПб, Амфора, 2001. – 189 С.

8. С.Хокинг. Теория всего. Пер. с англ., СПб, Амфора, 2009. – 160 С.

9. *С. Хокинг, Р. Пенроуз*. Природа пространства и времени. Пер. с англ., СПб, Амфора, 2014. – 172 С.

10. *C.W. Hawking*. Information Preservation and Weather Forecasting. ArXiv. 22.01.2014.

11. *Я.Б. Зельдович, П.П. Грищук*. Тяготение. Общая теория относительности и альтернативные теории. УФН, 1986, т. 149, в. 4, - С. 695-707.

12. *Я.Б. Зельдович, П.П. Грищук*. Общая теория относительности верна. УФН, 1988, т. 155, в. 3, - С.517-527.

13. *И.Д. Новиков, В.П.Фролов*. Физика чёрных дыр. М., Наука, 1986. - 328 С.

14. *С. Чандрасекар.* Математическая теория чёрных дыр. Пер с англ. М., Мир, 1986. Ч. 1. – 276 С. Ч. 2 – 355 С.

15. *А.А. Логунов*. Релятивистская теория гравитации. М., Наука, 2006, - 253 С.