А.Н. Шелаев **Сведения об авторе**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДВУХ КОМПОНЕНТ В ИЗЛУЧЕНИИ ПЛАНКА

Гипотеза о возможности существования двух компонент в равновесном излучении различных фундаментальных физических объектов (от «чёрных тел» до «чёрных дыр» и реликтового излучения), основанная на ряде физических и математических соображений при анализе формулы, полученной Планком [1], была выдвинута автором статьи в работах [2,3].

В данной статье, сообщается о математическом обосновании этой гипотезы получением компактной и изящной формулы, позволяющей аппроксимировать формулу Планка как для спектрального распределения энергии излучения, так и для суммарной мощности излучения с любой (!) точностью суммой двух компонент. При этом в результате аналитических оценок и компьютерных расчётов сложная задача 4-х параметрической аппроксимации формулы Планка двумя параметрами в показателях экспонент и двумя амплитудными множителями сведена к однопараметрической формуле, в которой изменяющимся параметром является лишь один из показателей экспонент. Связь же показателей экспонент, как и постоянных амплитудных множителей, выражается через базовые для системной гармонии числа 2, 3, 5, являющиеся симметричными комбинациями констант золотого сечения ϕ, Φ: $\phi = (-1+\sqrt{5})/2,\ \Phi = (1+\sqrt{5})/2$, причём $2 = \phi\cdot\Phi + \Phi\cdot\phi,\ 3 = \phi^2 + \Phi^2,\ 5 = (\phi+\Phi)^2$.

Укажем также, что недавно в интернете появилось рекламное сообщение от группы учёных из США (рук. J. Covac) об экспериментальном обнаружении в реликтовом излучении наряду с известной E-модой иной по поляризации B-моды, как предполагается, обусловленной действием гравитационных волн в процессе Большого взрыва ! Эта мода, возможно, и является искомой 2-й компонентой в излучении Планка.

Предложенная Планком формула для плотности спектрального излучения чёрного тела $u_\nu dv$ ($[u_\nu d\nu] = Дж/м^3$) в интервале частот $[\nu,\ \nu + d\nu]$ имеет вид:

$$u_\nu d\nu = (8\pi h / c^3) \cdot \nu^3 d\nu / [\exp(h\nu / kT) - 1] \qquad (1),$$

где h - постоянная Планка, k - постоянная Больцмана, c - скорость света, T - температура.

Исходя из (1) и учитывая соотношение $\nu = c/\lambda$, спектральную плотность излучения по длинам волн λ запишем в виде:

$$u_\lambda d\lambda = (8\pi hc) \cdot d\lambda / \lambda^5 [\exp(hc / kT\lambda) - 1] \qquad (2)$$

Интегрируя (1) и (2) по всем частотам и длинам волн получим формулу для суммарной плотности излучения u_Σ:

$$u_\Sigma = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = 8\pi^5 (kT)^4 / 15(hc)^3 \qquad (3)$$

Из (1)-(3) следует, что параметры излучения Планка не только выражаются через фундаментальные физические константы c, h, k, но и, как впервые показано в [2], через фундаментальные математические константы – иррациональные числа e, π и алгебраические константы золотой пропорции ϕ, Φ, связанные каноническими соотношениями $\Phi = 1 + \phi = 1/\phi$. Поскольку $8/15 = (3+5)/3 \cdot 5 = (1/3 + 1/5)$, а, как уже было указано, числа 2, 3, 5 *точно* выражаются через ϕ, Φ, то суммарное излучение можно представить в виде:

$$u_\Sigma = ((kT)^4 / (hc)^3) \cdot \pi^5 [1/(\phi^2 + \Phi^2) + 1/(\phi + \Phi)^2] \qquad (4)$$

Для упрощения дальнейшего анализа введём две безразмерные переменные α и β, пропорциональные ν и λ: $\alpha = \nu \cdot h / kT$ и $\beta = \lambda \cdot kT / hc$, $\alpha \cdot \beta = 1$. При этом спектральные плотности излучения (1), (2) выразятся через следующие функции $U(\alpha)$ и $U(\beta)$:

$$U(\alpha) = \alpha^3 / (e^\alpha - 1), \qquad U(\beta) = 1/\beta^5 (e^{1/\beta} - 1) \qquad (5),$$

$$u_\nu d\nu = A \cdot U(\alpha)\, d\alpha, \qquad u_\lambda d\lambda = A \cdot U(\beta)\, d\beta, \qquad A = 8\pi (kT)^4 / (hc)^3 \qquad (6),$$

$$J = \int_0^\infty U(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty U(\beta)\, d\beta = \pi^4 / 15 = (\pi^4 / 8) \cdot (1/5 + 1/3) \qquad (7)$$

Исходя из анализа соотношений (5)-(7), можно допустить возможность следующего разложения функций $U(\alpha)$ и $U(\beta)$ на две компоненты:

$$U(\alpha) = \alpha^3 / (e^\alpha - 1) = U1(\alpha) + U2(\alpha) = P_1 \cdot \alpha^{3-\eta_1} / (e^\alpha - 1) + P_2 \cdot \alpha^{3+\eta_2} / (e^\alpha - 1) \quad (8),$$

$$U(\beta) = 1/\beta^5 (e^{1/\beta} - 1) = U1(\beta) + U2(\beta) = P_1 / \beta^{5-\eta_1} (e^{1/\beta} - 1) + P_2 / \beta^{5+\eta_2} (e^{1/\beta} - 1) \quad (9)$$

Предполагая также то, что для фундаментальной физической системы – излучения Планка парамеры $P_{1,2}$ и $\eta_{1,2}$ в (8),(9) должны как-то выражаться через фундаментальные математические константы e, π, ϕ, Φ в [2] было сразу же получено первое приближение (см. рис. 1, 2) для представления излучения Планка в виде 2-х компонент при $P_1 = 3/8 = 3/(3+5)$, $P_2 = 5/8 = 5/(3+5)$ и $\eta_1 = 3 - e \simeq 0,2817 \simeq \sqrt{2}/5 \simeq 0,2828$, $\eta_2 = \pi - 3 \simeq 0,1416 \simeq \sqrt{2}/2 \cdot 5 \simeq 0,1414$.

С учётом введённых значений $P_{1,2}$, $\eta_{1,2}$ на рис. 1 показаны следующие спектральные зависимости от относительной частоты излучения $\alpha = \nu \cdot h / kT$: $U(\alpha) = \alpha^3 / (e^\alpha - 1)$ - кривая 1, $U1e\pi(\alpha) = (3/8) \cdot \alpha^e / (e^\alpha - 1)$ - кривая 2, $U2e\pi(\alpha) = (5/8) \cdot \alpha^\pi / (e^\alpha - 1)$ - кривая 3, $U\Sigma e\pi(\alpha) = U1e\pi(\alpha) + U2e\pi(\alpha)$ - кривая 4, $\Delta Ue\pi(\alpha) \cdot 10 = [U(\alpha) - U\Sigma e\pi(\alpha)] \cdot 10$ - кривая 5.

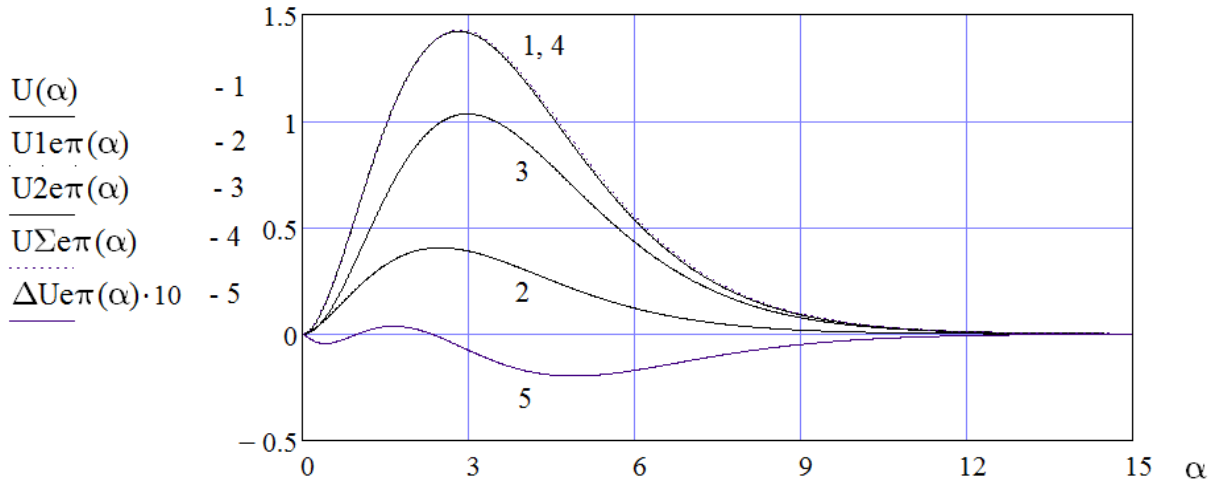

Рис. 1

На рис. 2 показаны аналогичные зависимости спектральных компонент от относительной длины волны $\beta = \lambda \cdot kT / hc$: $U(\beta) = \beta^{-5} / (e^{1/\beta} - 1)$ - кривая 1, $U1e\pi(\beta) = (3/8) \cdot \beta^{-2-e} / (e^{1/\beta} - 1)$ - кривая 2, $U2e\pi(\beta) = (5/8) \cdot \beta^{-2-\pi} / (e^{1/\beta} - 1)$ - кривая 3, $U\Sigma e\pi(\beta) = U1e\pi(\beta) + U2e\pi(\beta)$ - кривая 4, $\Delta Ue\pi(\beta) \cdot 10 = [U(\beta) - U\Sigma e\pi(\beta)] \cdot 10$ - кривая 5.

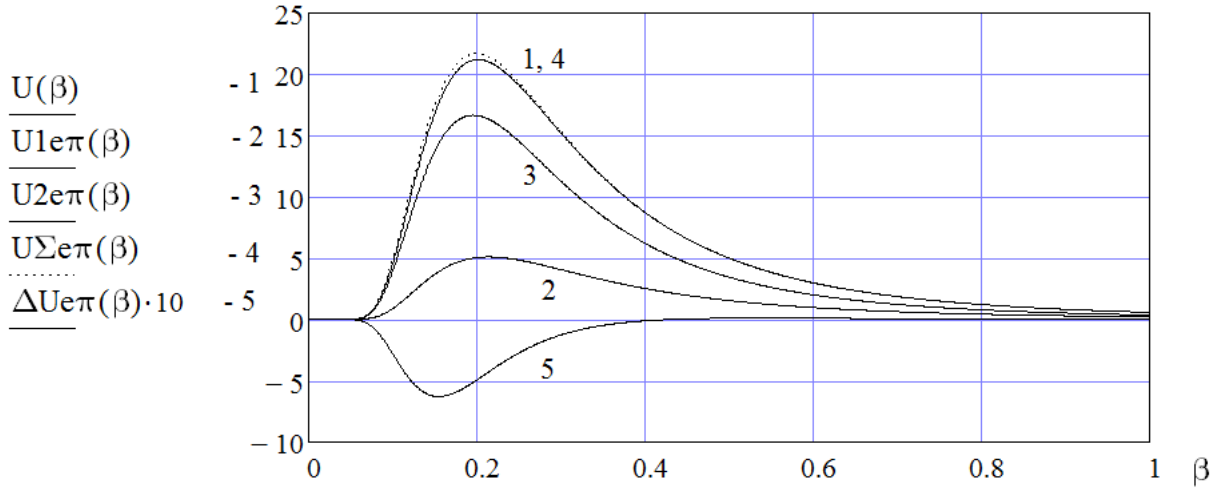

Рис. 2

Как следует из рис. 1, 2, спектры излучения Планка и по частоте $U(\alpha)$, п по длине волны $U(\beta)$ (кривые 1) визуально почти совпадают с соответствующими суммами двух спектральных компонент $U\Sigma e\pi(\alpha)$ и $U\Sigma e\pi(\beta)$ (кривые 4). Вид разностей $\Delta Ue\pi(\alpha) = U(\alpha) - U\Sigma e\pi(\alpha)$ и $\Delta Ue\pi(\beta) = U(\beta) - U\Sigma e\pi(\beta)$ при их увеличении в 10 раз показывают кривые 5. При этом относительные отклонения $\Delta Ue\pi(\alpha) / U(\alpha)$ и $\Delta Ue\pi(\beta) / U(\beta)$ в максимумах $|\Delta Ue\pi(\alpha)|$ и $|\Delta Ue\pi(\beta)|$, имеющие место при $\alpha \simeq 4{,}905$ и $\beta \simeq 0{,}155$, оказываются сравнительно небольшими $\sim (2-3)\,\%$.

Однако при $\eta_1 = 3 - e$, $\eta_2 = \pi - 3$ интегральные соотношения между спектральными компонентами оказываются далёкими от необходимых соотношений, следующих из (4)-(7):

$$J1 = \int_0^\infty U1(\alpha)\,d\alpha = \pi^4 / 40 \simeq 2{,}435227,\ J2 = \int_0^\infty U2(\alpha)\,d\alpha = \pi^4 / 24 \simeq 4{,}058712 \quad (10),$$

$$J1+J2=J=\int_0^{\infty}U(\alpha)d\alpha=\pi^4/15\simeq 6,493939402, \qquad J1/J2=3/5 \qquad (11)$$

В случае $\eta_1=3-e$ и $\eta_2=\pi-3$ компьютерные расчёты показывают, что:

$$J1e\pi=\int_0^{700}U1e\pi(\alpha)d\alpha\simeq 1,764966, \quad J1e\pi=\int_0^{700}U2e\pi(\alpha)d\alpha\simeq 4,821999 \qquad (12),$$

$$J1e\pi+J2e\pi\simeq 6,586306\neq\pi^4/15, \qquad J1e\pi/J2e\pi\simeq 0,366\neq J1/J2=0,6 \qquad (13)$$

Отметим, что ограничение возможности численного счёта интегралов (12) и в программе MathCad, и в программе Mathematica верхним пределом 700 связано с быстрым убыванием функций $U1,2(\alpha)$ и $U1,2(\beta)$ с ростом α,β. При этом важно то, что $\int_0^{700}U(\alpha)d\alpha\simeq 6,493939402$, т. е. с точностью более 9 знаков после запятой этот интеграл равен интегралу $\int_0^{\infty}U(\alpha)d\alpha=\pi^4/15$.

Проведённые далее аналитические оценки и компьютерные расчёты позволили аппроксимировать формулу Планка суммой двух компонент как для спектрального распределения энергии излучения, так и для суммарной мощности излучения с любой точностью. При этом четырёх параметрическая задача аппроксимации формулы Планка соотношениями (8), (9) с двумя параметрами $\eta_{1,2}$ в показателях экспонент и двумя амплитудными множителями $P_{1,2}$ была сведена к следующим однопараметрическим (!) соотношениям, в которых изменяющимся параметром является лишь один из показателей экспонент (напр., $\eta_1=\eta$, $\eta_2=(3/5)\cdot\eta$, $P_1=3/8$, $P_2=5/8$):

$$U\Sigma(\alpha)=U1(\alpha)+U2(\alpha)=(3/8)\cdot\alpha^{3-\eta}/(e^{\alpha}-1)+(5/8)\cdot\alpha^{3+3\eta/5}/(e^{\alpha}-1) \qquad (14),$$

$$U\Sigma(\beta)=U1(\beta)+U2(\beta)=(3/8)\cdot\beta^{-5+\eta}/(e^{1/\beta}-1)+(5/8)\cdot\beta^{-5-3\eta/5}/(e^{1/\beta}-1) \qquad (15)$$

Причём очень важно то, что при уменьшении η точность аппроксимации можно неограниченно увеличивать. На рис. 3, 4 показаны разности функций

$\Delta U(\alpha) = U(\alpha) - U\Sigma(\alpha)$ и $\Delta U(\beta) = U(\beta) - U\Sigma(\beta)$, соответственно, расчитанные согласно формулам (14), (15) при следующих значениях параметра η: $\eta = 0{,}1$ - кривые 1, $\eta = 0{,}01$ - кривые 2, $\eta = 0{,}001$ - кривые 3.

Подчеркнём, что значения разностей для кривых 2 увеличены в 10^2 раз, для кривых 3 – в 10^4 раз. В итоге, как следует из рис. 3,4, при уменьшении η на порядок величины отклонений $\Delta U(\alpha)$ и $\Delta U(\beta)$ уменьшаются на два порядка, форма же отклонений при этом практически не меняется !

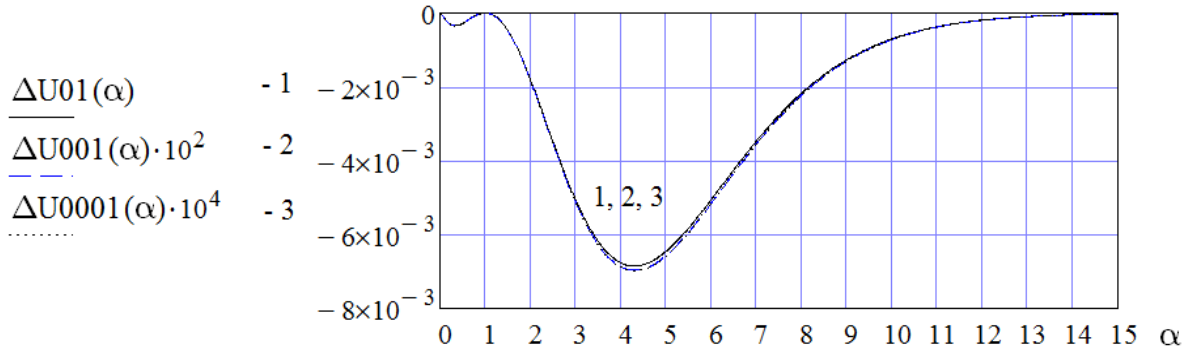

Рис. 3

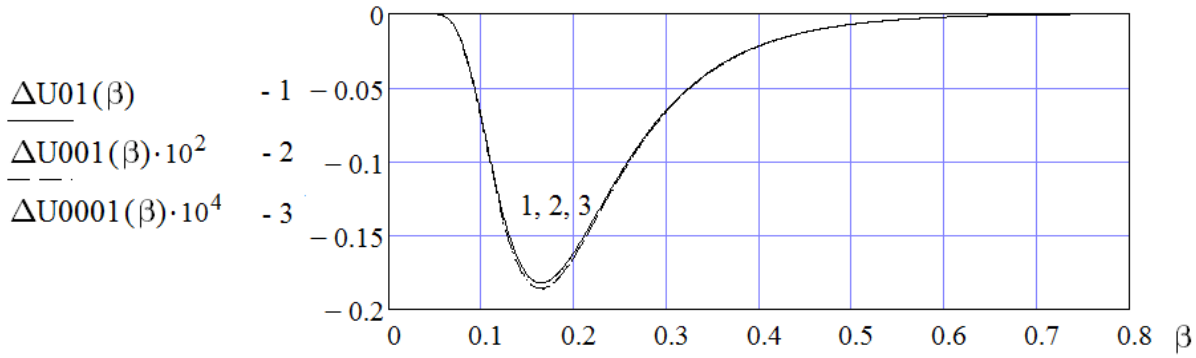

Рис. 4

Минимальное отклонение $|\Delta U(\alpha)| = 0$ имеет место при $\alpha = 1$, т.е. при $h\nu = kT$. Максимальные же отклонения $|\Delta U(\alpha)|$ и $|\Delta U(\beta)|$ реализуются при $\alpha \simeq 0{,}331 \simeq 1/3$, $\alpha \simeq 4{,}318 \simeq 5e/\pi \simeq 4{,}326$ и $\beta \simeq 0{,}1642 \simeq (1/3)/2$. Невыполнение для экстремумов соотношения $\alpha = 1/\beta$ связано с различием в (1), (2) дифференциальных интервалов $d\nu$ по частоте и $d\lambda$ по длине волны..

Численные компьютерные расчёты показали также резкое увеличение точности выполнения интегральных соотношений при уменьшении η. Так, при $\eta = 0,0001$ получаем, что:

$$J1 = (3/8)\cdot\int_0^{700}\alpha^{3-0,0001}/(e^{\alpha}-1)\,d\alpha \simeq 2,434936 \simeq \pi^4/40 \simeq 2,435227 \qquad (16),$$

$$J2 = (5/8)\cdot\int_0^{700}\alpha^{3+3\cdot 0,0001/5}/(e^{\alpha}-1)\,d\alpha \simeq 4,059002 \simeq \pi^4/24 \simeq 4,058712 \qquad (17),$$

$$J1 + J2 \simeq 6,493939437 \simeq \pi^4/15 \simeq 6,493939402, \quad J1/J2 \simeq 0,599886 \simeq 3/5 \qquad (18)$$

Таким образом, в данной статье установлена возможность плавной одно параметрической аппроксимации формулы Планка двумя компонентами с любой точностью при уменьшении параметра η. Для физических систем предельная точность, естественно, определяется флуктуациями параметров системы, которые для излучения Планка рассматривались, в частности, в статье автора [3]. При обратном изменении η (увеличении η от нуля) должно происходить плавное снятие вырождения в излучении Планка и расщепление его на две компоненты.

В связи с обнаружением в данной статье для излучения Планка характерных числовых комбинаций укажем, что эти же комбинации появляются и в ряде важных математических функций. Так, напр., для Zeta-функции Римана, используемой для нахождения интегрального соотношения (3) и определяемой выражениями:

$$\mathrm{Zeta}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z = \prod_p 1/(1-p^z), \quad n \in N,\ z \in C,\ p - \text{простые числа} \qquad (19)$$

получаем, что $\pi^4/15 = \mathrm{Zeta}(4)/(2\cdot 3)$. При этом возникает интересный вопрос: можно ли установить какую-либо нетривиальную особенность для излучения Планка, исходя из того, что суммарная мощность этого излучения выражается через простые числа ?!

Выражение $\pi^4/15$ можно получить и с помощью $\mathrm{Psi}(m,x)$ - функции:

$$\mathrm{Psi}(m,x) = d^m(\ln(\Gamma(x))/dx^m, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^t\,dt \text{ - гамма функция} \qquad (20)$$

Исходя из соотношений (20) получаем, что $\pi^4/15 = \mathrm{Psi}(3,1)$.

Наконец, отметим, что характерную числовую комбинацию, описывающую излучение Планка, $1/3+1/5=1/(\phi^2+\Phi^2)+1/(\phi+\Phi)^2$, можно получить и с помощью $\mathrm{Beta}(x,y)$-функции:

$$\mathrm{Beta}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \Gamma(x)\cdot\Gamma(y)/\Gamma(x+y-1) \qquad (21)$$

В итоге из (21) следует, что $1/3+1/5=\mathrm{Beta}(1/2,3)/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макс Планк*. Единство физической картины мира. Сб. статей. Научная автобиография. М., Наука, 1966. - 287 С.

2. *Шелаев А.Н.* К возможности существования двух компонент в излучении Планка. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 2, - С.115-119.

3. *Шелаев А.Н.* Нетривиальные соотношения в равновесном тепловом излучении Планка. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл. 77-6567, публ. 18360, 10.12.2013. - 10 С.