О.А. Черепанов

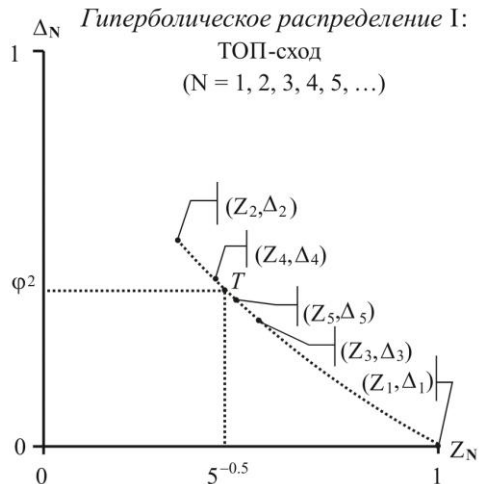
СЕКСТЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ НАД ЧИСЛАМИ ФИДИЯ-ФИБОНАЧЧИ-ЛЮКА И ОСТЕПЕНЕННЫЕ ЕДИНИЦЫ В ТРИГОНОМЕТРИИ

Ученый должен организовать факты.
А. Пуанкаре

Факты, представленные ниже, не входят в теорию «золотой» пропорции потому, что системы, объединяющей и объясняющей разрозненный материал, сгруппированный возле древней задачи о «золотом» сечении, пока нет. Это значит, что масса сведений, так или иначе увязанных с делением отрезка в крайнем и среднем отношении, пока не достигла критического уровня. И надо пополнять копилку знаний, заявленных как Математика Гармонии, ранее неизвестными связями между числами Фидия и Фибоначчи-Люка.

Очевидно, что ряды Фибоначчи, Люка и целые степени числа φ являются единым образованием, поскольку элементы рекурсивных последовательностей 1, 1, 2, … F_N, … и 1, 3, 2^2, …, L_N, …, пронумерованные членами натурального ряда N = 1, 2, 3, ..., перекрестно связаны тождествами $F_N = F_{N+1} - F_{N-1} = 5^{-0.5}[\varphi^{-N} - (-1)^k\varphi^{+N}]$ и $L_N = F_{N-1} + F_{N+1} = \varphi^{-N} + (-1)^k\varphi^{+N}$, где k = 1 при нечетных N и k = 2 при четных. При этом целочисленные ряды $\{F_N\}$ и $\{L_N\}$ имеют лишь два общих члена (1 и 3) и один иррациональный предел $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{F_N}{F_{N+1}} = \lim\limits_{N\to\infty}\frac{L_N}{L_{N+1}} = \varphi$, тогда как $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = \varphi^2$ и $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{F_N}{L_N} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, где $\sqrt{5} = \varphi + \Phi = \Phi^2 - \varphi^2 = 2 + \varphi^3$. А теперь дадим известным зависимостям рациональную трактовку на уровне аксиоматики единиц.

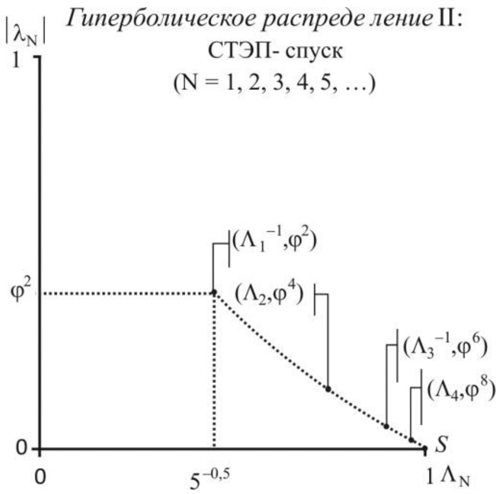
Заметим, что в выражении целых F_N и L_N задействован скаляр φ = 0.618…, являющийся основанием геометрической прогрессии $\{\varphi^{\pm N}\}$ без единицы при отсутствии показателя степени N = 0. При этом исключение нуля из множества {±N} не выглядит чем-то экстраординарным или невозможным. Но в ситуации отказа от него встает задача замены арифметического образа $\varphi^0 = 1$ другим единичным морфизмом. И эту задачу уточняет и решает структурное объединение рядов $\{F_N\}$ и $\{L_N\}$, не существующих друг без друга.



Дробное число $Z_N = \frac{F_N}{L_N} = \frac{1 - F_{N-1}/F_{N+1}}{1 + F_{N-1}/F_{N+1}}$ для всех Z_N, включая $Z_1 = 1$, назовем числом-отношением, а скаляр $\Delta_N = \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} \in [0,1)$ будем именовать числом-отклонением от единицы. Таким образом, единица внедряется в арифметику целых скаляров Фибоначчи-Люка как центр контрсимметрии дробных чисел $f_N = 1 - \Delta_N$ и $l_N = 1 + \Delta_N$, таких, что $f_N + l_N = 2$. При этом $(1+\Delta_N)(1+Z_N) = 2$. Но кроме того $\frac{1-\Delta_N}{1+\Delta_N} = Z_N \Leftrightarrow \Delta_N = \frac{1-Z_N}{1+Z_N}$, что надо понимать как конверсию скаляров $Z_N = \frac{F_N}{L_N} \in [1,0)$ и $\Delta_N = \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} \in [0,1)$, которые сделаем координатами N-ой точки (Z_N,Δ_N) симметричной дуги равнобочной гиперболы, формализуемой дробно-линейной функцией $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, где $0 \le x \le 1$. При этом точки с четными индексами N стремятся к пункту $T(5^{-0.5},\varphi^2)$ сверху, тогда как другие приближаются к нему снизу. Первое гиперболическое распределение, задаваемое отношениями чисел Фибоначчи и Люка, назовем ТОП-сходом.

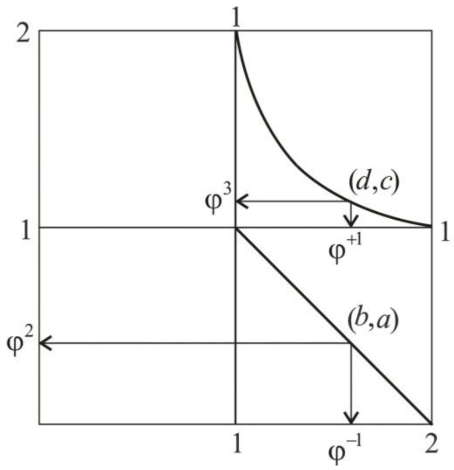
Из формул Бине следует, что число-отношение Z_N, умноженное на $\sqrt{5}$, равняется дроби $\dfrac{\varphi^{-N}-(-1)^k\varphi^N}{\varphi^{-N}+(-1)^k\varphi^N} = \dfrac{1-(-1)^k\varphi^{2N}}{1+(-1)^k\varphi^{2N}}$ с числителем и знаменателем, контрсимметричными относительно некоторой единицы. При этом знакопеременные числа-отклонения $\lambda_N = (-1)^k\varphi^{2N}$ и иррациональные скаляры $\Lambda_N = \dfrac{F_N}{L_N}\sqrt{5}$ связаны конверсией $\dfrac{1-\Lambda_N}{1+\Lambda_N} = \lambda_N \Leftrightarrow \Lambda_N = \dfrac{1-\lambda_N}{1+\lambda_N}$.

Очевидно, что при перемене знака у числа-отклонения λ_N контрсимметричные скаляры $\psi_N = 1-\lambda_N$ и $\Psi_N = 1+\lambda_N$ меняются позициями не только в дроби-отношении $\Lambda_N = \dfrac{\psi_N}{\Psi_N}$, но и по отношению к единице и при $N \to \infty$ скачкообразно приближаются к ней с соблюдением тождества $\psi_N + \Psi_N = 2$. При этом целое число 2 выражено мультипликацией $(1+\lambda_N)(1+\Lambda_N)$, а единица задана аддитивно: $1 = \psi_N + \lambda_N = \Psi_N - \lambda_N$. И точки $(\Lambda_N, |\lambda_N|)$ сходятся к пункту $S(1,0)$ по дуге гиперболы, начиная с пункта $T(5^{-0.5},\varphi^2)$. Второе дискретное распределение назовем СТЭП-спуском.



Таким образом, числа F_N, L_N и $\varphi^{\pm N}$ зависят от N, а их ряды обладают общей структурой. При этом элементы рядов вписаны в наборы ♦ $1 \backslash \Delta_N \backslash f_N \backslash l_N \backslash Z_N \backslash 2$ ♦ и ◊ $1 \backslash \lambda_N \backslash \psi_N \backslash \Psi_N \backslash \Lambda_N \backslash 2$ ◊ из шести чисел, отличающиеся содержанием операционных связей: у членов секстета \◊\ они несколько иные, чем у секстета \♦\. Но общими качествами математических объектов \♦\ и \◊\ являются контрсимметрия и конверсия, а общими элементами кажутся целые числа 1 и 2. Между тем единицы и двойки структур \♦\ и \◊\ могут отличаться как друг от друга, так и от действительных чисел арифметики.

Структуру числового интервала [0,2] с зависящими от N членами секстетов \♦\ и \◊\ представим графически как совокупность точек, слитых в континуумы в виде отрезка прямой и дуги гиперболы. При этом символы *a*, *b*, *c* и *d* обозначают переменные, принимающие действительные значения в рамках отношений, названных контрсимметрией (между $a \in (1,0)$ и $b \in (1,2)$) и конверсией (между $c \in (1,0)$ и $d \in (0,1)$). Но среди действительных чисел, как показано на рисунке, выделим особые значения $a = \varphi^2$, $b = \varphi^{-1}$, $c = \varphi^3$ и $d = \varphi^{+1}$, где $\varphi = 0.618\ldots$ – так называемый скаляр Фидия, обычно именуемый «золотой» пропорцией.



Продолжим поиск новизны, начатый утверждением, что секстеты ♦ $1 \backslash \Delta_N \backslash f_N \backslash l_N \backslash Z_N \backslash 2$ ♦ и ◊ $1 \backslash \lambda_N \backslash \psi_N \backslash \Psi_N \backslash \Lambda_N \backslash 2$ ◊ являются формой обобщения числовых рядов $\{F_N\}$, $\{L_N\}$ и $\{\varphi^{\pm N}\}$. Но при этом ограничимся элементами, определяемыми тремя первыми значениями номера N.

Радикал $\sqrt{5} = \varphi + \Phi = \Phi^2 - \varphi^2 = 2 + \varphi^3$ удалим из $\frac{1}{1}\sqrt{5} = \frac{1+\varphi^2}{1-\varphi^2} = \varphi^{-1} + \varphi^{+1}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{1-\varphi^4}{1+\varphi^4} = \frac{\varphi^{-2} - \varphi^{+2}}{3}$, используя его первостепенное $\varphi^{+1} + \varphi^{-1}$ и второстепенное $\varphi^{-2} - \varphi^{+2}$ выражения. Далее заметим, что из $\frac{2}{2^2}\sqrt{5} = \frac{1+\varphi^6}{1-\varphi^6}$ следует $2 + \varphi^3 = \varphi^{-3} - 2$, где этот радикал также отсутствует, оставаясь принадлежностью арифметики с единицей, вводимой аксиоматически. А теперь представим систему s-чисел, в которой единица вычисляется и не является единственной.

Заметим, что единица в равенстве $(-1)^k = 2^{-2}(L_N^2 - 5F_N^2)$, распространяющем тождество Кассини $F_N^2 - F_{N-1}F_{N+1} = (-1)^k$ на ряд Люка, допускает два значения – отрицательное при $k = 1$ и положительное при $k = 2$. При этом уравнения $x + x^N = 1$ и $y - y^{1-N} = 1$, $z^N - z^{N-1} = 1$, вещественные корни X, Y и Z которых зависят от N = 1, 2, …, образуют последовательности, представленные в таблице 1, второй столбец которой содержит фидиевы скаляры φ = 0.618… и Φ = 1.618…, взаимно обратные ($\Phi = \varphi^{-1}$) также, как элементы s = 0.5; 0.618…; …; s_N; … и S = 2; 1.618…; …; S_N; … рядов $\{s_N\}$ и $\{S_N\}$, при $N \to \infty$ стремящихся к единице снизу и сверху соответственно. При этом числа s_N и S_N подчинены тождеству $s^1 + s^N = S^1 - s^{N-1} = S^N - S^{N-1} = 1$, где взаимозависимые основания s и $S = s^{-1}$ определены натуральным параметром N = 1, 2, … в показателях степени.

Таблица 1

N	1	2	3	4	5	6	7	…	∞
$s_N = X$	0.5	0.618…	0.682…	0.725…	0.778…	0.797…	0.812…	…	1^1
$S_N = Y = Z$	2	1.618…	1.465…	1.380…	1.324…	1.285…	1.255…	…	1^1

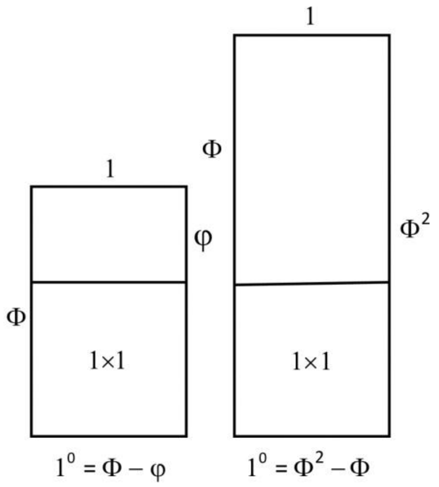
Очевидно, что равенства $s^1 + s^N = 1$ и $s^{-N} - s^{1-N} = 1^1$ при N = 1 дают дихотомии 1 = 0.5 + 0.5 и 2 = 1 + 1, отличающиеся вдвое, тогда как $s \to 1$ и $s^{-1} \to 1$, когда $N \to \infty$. То есть, в пределе из этих равенств следует $1^1 + 1^\infty = 1$ и $1^{-\infty} - 1^{1-\infty} = 1^1$, что не противоречит логике после удвоения числа 1 в первом выражении и увеличения в два раза числа $1^{-\infty}$ во втором. А в итоге оба выражения удовлетворяют принципу дихотомии в определении единиц путем деления двоек пополам.

Важной особенностью членов последовательностей 0.5; 0.618…; …; s_N; … и 2; 1.618…; …; S_N; … является неслучайная субстракция $s^1 - s^2 = s^{N+1}$ и $S^2 - S^1 = S^{2-N}$, то есть связь первой и второй степеней взаимно обратных оснований s и S через вычитание. А отсюда следует эксклюзивность чисел Фидия Φ и φ: будучи инклюзивными другим членам рядов $\{s_N\}$ и $\{S_N\}$ по субстракции, они особенны в том смысле, что при N = 2 из дублета $\varphi^1 - \varphi^2$ следуют два единичных результата: *а*) $\Phi^1 - \Phi^2 = -1$, если поменять знаки показателей степени, и *б*) $\varphi^1 + \varphi^2 = +1$, если заменить вычитание сложением. Как видно, единицу определяют не только дихотомии 1 = 0.5 + 0.5 и 2 = 1 + 1, но и действия с числами $\varphi^{\pm 1}$ и $\varphi^{\pm 2}$. А теперь пусть $N \to \infty$ в тождествах $s^1 - s^2 = s^{N+1}$ и $s^{-2} - s^{-1} = s^{N-2}$, где $s \to 1$ снизу и $s^{-1} \to 1$ сверху.

Фактически речь идет о дополнении рядов 0.5; 0.618…; …; s_N; … и 2; 1.618…; …; S_N; … конечным членом единичной величины, отвечающем $N = \infty$. Но если $s_\infty = 1$, то $s^1 - s^2 = s^{N+1}$

принимает некорректную форму $1^1 - 1^2 = 1^{\infty+1}$, исправимую удвоением морфизма 1^1. При этом элемент s_N достигает единичного значения, а второстепенная единица выглядит сингулярностью, такой, что формально $1^2 = 2{\cdot}1^1$. И действительно – в арифметике чисел Фидия существуют единицы, имеющие смысл площадей, отличающихся вдвое.

Пусть знак $\square$ обозначает площадь квадрата $1{\times}1$, присоединяемого (+) и отнимаемого (–) от прямоугольника $\Phi\times 1$, где $\Phi = \varphi^{-1}$. Тогда из $\Phi\times 1 - 1\times 1$ следует $\varphi\times 1$, а из $\Phi\times 1 + 1\times 1$ получается $\Phi^2\times 1$. В итоге скаляры φ и Φ в равенстве $\Phi^2 - \Phi^1 = \Phi^1 - \varphi^1$, умноженном на единицу, имеют смысл площадей, как и единица $1 = \varphi^1 + \varphi^2$ после умножения на 1. А так как площади $[\varphi] + \square$ и $[\Phi^2] - \square$ равны $[\Phi]$, то можно говорить о «скверной» интерпретации чисел φ и Φ, тем самым ослабляя их привычную связь с так называемой «золотой» пропорцией из арифметики действительных чисел и с «золотым» сечением отрезков евклидовой геометрии.

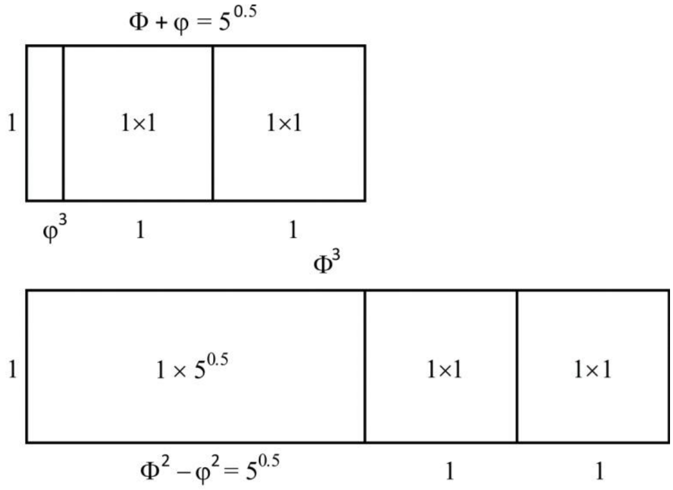


Контрсимметрия I

$\varphi + \square = \Phi = \Phi^2 - \square$

Так как $\varphi + \square = \Phi = \Phi^2 - \square$, то числа φ и Φ^2 контрсимметричны относительно их среднего арифметического $\Phi = \dfrac{\varphi + \Phi^2}{2}$, то есть одинаково (на величину $\square$) отличаются от площади [Φ]. Далее из связи $\dfrac{\varphi}{\Phi^2} = \dfrac{\Phi - 1}{\Phi + 1} = \varphi^3$ «скверных» (от англ. *square*) чисел $[\varphi]$ и $[\Phi^2]$ вытекает тождество $\dfrac{1-\varphi}{1+\varphi} = \varphi^3$, где φ и φ^3 можно поменять местами, получая $\dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3} = \varphi$.

А теперь убедимся, что взаимно обратные скаляры φ^3 и Φ^3 также имеют смысл площадей, контрсимметричных относительно площади прямоугольника со сторонами длиной в единицу и $\sqrt{5} = 5^{0.5} = \Phi^2 - \varphi^2 = \Phi^1 + \varphi^1$.



Контрсимметрия II

$\varphi^3 + \square\square = \Phi^1 + \varphi^1 = \Phi^2 - \varphi^2 = \Phi^3 - \square\square$

Ясно, что «скверный» остаток $[\Phi^3] - [5^{0.5}] = [5^{0.5}] - [\varphi^3]$ равен удвоенному квадрату $1{\times}1$. То есть, если в равенстве $[\Phi^3] - [5^{0.5}] = [5^{0.5}] - [\varphi^3] = 2{\cdot}1^1$ принять $2{\cdot}1^1 = = \square\square$ за единицу 1*, то можно говорить о контрсимметричной оценке площадей $[\Phi^3]$ и $[\varphi^3]$ масштабом, вдвое превышающим единичную площадь □. Но это не значит, что в последнем равенстве площади $[\Phi^3]$ и $[\varphi^3]$ уменьшены вдвое по сравнению с числами Φ^3 и φ^3, такими, что $\Phi^3 - \varphi^3 = 2^2$. Ведь выражения $\Phi^3 + \varphi^3 = 2 \cdot 5^{0.5}$ и $2\Phi^1 = \varphi^1 + \Phi^2$ определенно говорят об арифмометрической важности третьей, второй и первой степеней фидиевых чисел φ и Ф, вторых в последовательностях 0.5; 0.618…; …; s_N; … и 2; 1.618…; …; s_N^{-1}; …, элементы которых связаны системным условием $s^1 + s^N = s^{-N} - s^{1-N} = 1$, определяющим сопряженные множества $\{s_N\}$ и $\{s_N^{-1}\}$ с элементами, сходящимися к единице снизу и сверху соответственно при $N \to \infty$.

Контрсимметрии I и II определенно указывают на принадлежность чисел Фидия к секстетному исчислению. В самом деле, так как $\frac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1} = \varphi^3 \Leftrightarrow \varphi^1 = \frac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$, то $a = 1 - \varphi^3$, $b = 1 + \varphi^3$, где $\varphi^1 = c$ – число-отношение и $\varphi^3 = d$ – число-отклонение по определению функционального секстета ✧$1 \backslash d \backslash a \backslash b \backslash c \backslash 2$ ✧. Или же, наоборот, $a = 1 - \varphi^1$, $b = 1 + \varphi^1$ и тогда φ^3 – число-отношение и φ^1 – число-отклонение.

Как видно, секстеты I) ◇$1^1\backslash 2\varphi^2\backslash 2\varphi^{+1}\backslash\varphi^{+1}\backslash\varphi^3\backslash 2'$◇ и II) ◈$1^2\backslash\varphi^2\backslash\varphi^{-1}\backslash\varphi^3\backslash\varphi^{+1}\backslash 2^*$◈ содержат «золотое» число $\varphi = 0.618\ldots$ в степени не выше третьей и отвечают диарезисным выражениям единицы $1^1 = \varphi^1 + \varphi^2$ и двойки $2^* = \varphi^{-1} + \varphi^2$, соответствующим дихотомиям $1 = 0.5 + 0.5$ и $2 = 1 + 1$, отличающимся вдвое согласно бифуркации $1^* = 2 \cdot 1^1$. И это дает возможность не считать единицы в конверсивных выражениях $\frac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1} = \varphi^3$ и $\varphi^1 = \frac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$ одинаковыми. При этом вычисление $1 = \varphi^1 + \varphi^2$ по секстету \◇\ отличается от определения $2 = \varphi^{-1} + \varphi^2$ по структуре \◈\ инверсией первого слагаемого, что является одной-единственной операцией по распознаванию чисел 1 и 2.

Выделенное положение трех первых степеней «золотого» числа φ подтверждает отношение субстракций $s^1 - s^2 = s^{N+1}$ и $s^{-2} - s^{-1} = s^{N-2}$, где $s \to 1$ снизу и $s^{-1} \to 1$ сверху. Ведь $\frac{s^1 - s^2}{s^{-2} - s^{-1}} = s^3$ для всех чисел последовательности 0.5; 0.618…; …; s_N; …, а для прогрессии $\{\varphi^N\}$ бинарная форма $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ является ключевой, поскольку общее выражение $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$ служит аддитивным законом для всех натуральных N.

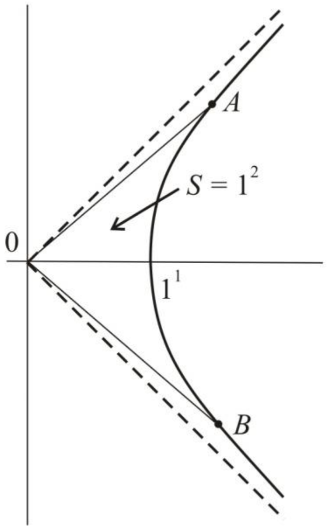
Итак, связи внутри секстетов ◇$1^1\backslash 2\varphi^2\backslash 2\varphi^{+1}\backslash\varphi^{+1}\backslash\varphi^3\backslash 2'$◇ и ◈$1^2\backslash\varphi^2\backslash\varphi^{-1}\backslash\varphi^3\backslash\varphi^{+1}\backslash 2^*$◈ удовлетворяют равенствам $\varphi^2 + \varphi^{+1} = 1$ и $\varphi^2 + \varphi^{-1} = 2$, последнее из которых получается из первого сменой знака у единичного показателя степени. Кроме того в арифметике чисел Фидия есть структура ≺ $2\backslash -\varphi^3\backslash\varphi^{-3}\backslash -\varphi^6\backslash 5^{0.5}\backslash 2^2$ ≻, целочисленные элементы которой вдвое превышают скаляры 1^1, 1^2 и 2’, 2*, а одиозное число $5^{0.5} = \varphi^{-1} + \varphi^{+1} = \varphi^{-2} - \varphi^{+2} = 2 + \varphi^3$ является первостепенным и второстепенным одновременно, как и скаляр $\varphi^3 = \varphi^{+1} - \varphi^{+2} = (\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2$, деление которого на φ^{-3} дает «квадратное» число $\varphi^6 = \varphi^4 - \varphi^5 = \varphi^5 - \varphi^7$.

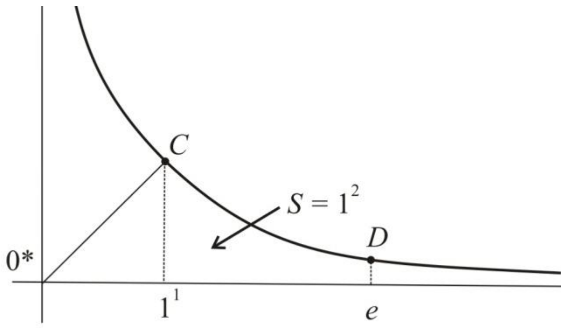
Таким образом, скалярная форма $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ отвечает аддитивному свойству $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$ членов геометрической прогрессии $\{\varphi^N\}$, не содержащей единицы, если среди натуральных показателей степени $N = 1, 2, \ldots$ нет нуля. Назовем эту форму «бриллиантовым» ключом из «золотого» числа φ в степенях 1, 2 и 3.

Выше показано, что особую роль скаляров φ^1, φ^2, φ^3 и их квадратов обуславливают масштабы площади, отличающиеся вдвое по условию $1^* = 2\cdot 1^1$. Но остепененные единицы можно обнаружить не только в арифметике чисел Фидия φ и Φ, но и в тригонометрии.

Как известно, аргументом функции $a)\,\mathrm{ch}^2 X - \mathrm{sh}^2 X = 1^2$ служит площадь $X = S_{0AB}$ между отрезками $0A$, $0B$ и симметричной дугой AB равнобочной гиперболы с асимптотами-биссектрисами первого и четвертого квадрантов декартовых координат, а гипербола *б*) $y = x^{-1}$ при положительных x и y после сокращения абсцисс и ординат всех ее точек в $\sqrt{2}$ раз графически совпадает с кривой (*а*). При этом площади между линиями (*а*), (*б*) и их асимптотами беспредельны, но не равны потому, что кривую (*а*) переводит в линию (*б*) растяжение осей в $\sqrt{2}$ раз и поворот на половину прямого угла против часовой стрелки.

Таким образом, на графиках равнобочных гипербол (*а*) и (*б*) выделяются две единицы – первостепенная 1^1 (как масштаб координатных осей) и второстепенная 1^2 (как масштаб площади).



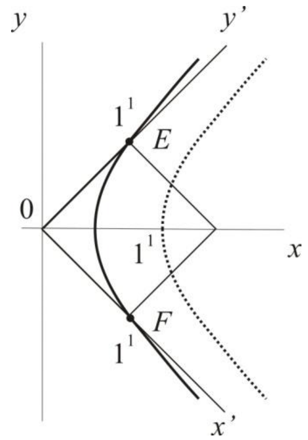


Заметим, что отрезки $0A$ и $0B$ имеют длину $\sqrt{\mathrm{ch}^2(1) + \mathrm{sh}^2(1)} = \sqrt{2.3811... + 1.3811...}$, равную корню квадратному из суммы двух чисел с одинаковой дробной частью, значение которой весьма близко к числу Фидия φ = 0.6180… в квадрате и отличается от единицы на 0.6189... Понятно, что близость величин $\mathrm{ch}^2(1)$ и $\mathrm{sh}^2(1)$ к числам $2 + \varphi^2$ и $1 + \varphi^2$ не может не удивлять и требует внимания. Тем более, что число под корнем почти равно $4 - \varphi^3$, тогда как $\varphi^{-3} = 4 + \varphi^3$. Но кроме того выражение $\sin x = (1 + \mathrm{cth}^2(1))^{-0.5}$, где x – площадь сектора окружности единичного радиуса с центром 0, ограниченной ее дугой и выделенной направлениями $0A$ и $0B$, примерно равняется числу $e^{-0.5} = 0.606…$, что также настораживает.

Квадроединицу 1^2 в (*а*) представим в виде $1^2 = (\mathrm{ch}\,X + \mathrm{sh}\,X)(\mathrm{ch}\,X - \mathrm{sh}\,X)$ и заметим, что $\dfrac{\mathrm{ch}\,X - \mathrm{sh}\,X}{\mathrm{ch}\,X + \mathrm{sh}\,X} = \dfrac{1 - \mathrm{th}\,X}{1 + \mathrm{th}\,X} = e^{-2X}$, откуда $\mathrm{th}\,X = \dfrac{1 - e^{-2X}}{1 + e^{-2X}}$, что надо понимать как конверсивную связь $\dfrac{1 - \mathrm{th}\,X}{1 + \mathrm{th}\,X} = \left(e^{-X}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{th}\,X = \dfrac{1 - e^{-2X}}{1 + e^{-2X}}$ чисел $\left(e^{-X}\right)^2 \in [1^2, 0)$ и $\mathrm{th}\,X \in [0, 1^*)$ для всех $X \geq 0$. При этом $(\mathrm{ch}\,X - \mathrm{sh}\,X)^{-1} = \mathrm{ch}\,X + \mathrm{sh}\,X$, что означает взаимную обратность (инверсивность) сомножителей квадроединицы 1^2, после деления на $\mathrm{ch}\,X$ принимающих значения $a = 1^2 - \mathrm{th}\,X = 1^2 - d$ и

$b=1^2+\mathrm{th}X=1^2+d$, равноотстоящие (контрсимметричные) от 1^2 по числу-отклонению $\mp d\in[0,1^*)$. Как видно, скаляры $a\in[1^2,0)$, $b\in[1^2,2^*)$, $c\in[1^*,0)$ и d квадратичны и их можно назвать ареальными числами (от англ. *area* – площадь), включая особое число 2*.

Асимптоты линии (*а*) примем осями *x*' и *y*' прямоугольных координат и сдвигом (*а*) влево на $2-\sqrt{2}$ получим равнобочную гиперболу (*в*), пересекающую новые оси в точках $E(0,1^1)$ и $F(1^1,0)$.



Отметим, что $1^1\times1^1=1^2$ и заметим, что координаты точек симметричной дуги *EF* связаны дробно-линейной зависимостью $y'=\dfrac{1-x'}{1+x'}$ и конверсивны в пределах $0\le x'<1$ и $0<y'\le1$, поскольку числитель и знаменатель контрсимметричны. Но конверсия $\dfrac{1^1-x'}{1^1+x'}=y'\Leftrightarrow x'=\dfrac{1^1-y'}{1^1+y'}$ отличается от конверсии $\dfrac{1^2-d}{1^2+d}=c\Leftrightarrow d=\dfrac{1^2-c}{1^2+c}$ степенью единиц, что делает масштабы 1^1 и 1^2 нетождественными семантически.

Считая единицы 1^1 и 1^2 с разным геометрическим смыслом неразличимыми арифметически и зная, что вершина гиперболы (*в*) находится на расстоянии $\sqrt{2}-1$ от пересечения 0' координатных осей *x*' и *y*', а дистанция между вершиной линии (*б*) и точкой 0* равна $\sqrt{2}$, заметим, что данные отрезки отличаются в $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ раз. А теперь умножим $\sqrt{2}-1$ на $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ и получим красивое тождество *) $\dfrac{2^*-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1^*}=\sqrt{2}$ с тремя радикалами, где единица и двойка могут иметь квадратичный характер, отмеченный звездочками. А это значит, что из (*) следует два равенства: $2'=1^1+1^1$ и $2^*=1^2+1^2$. Назовем их юнитными (от англ. *unit* – единица) дихотомиями и будем считать определениями основных арифмометрических скаляров 1 и 2 как элементов числовых секстетов ◇1^1 \ *a* \ *b* \ *c* \ *d* \ 2'◇ и ◈1^2 \ *a* \ *b* \ *c* \ *d* \ 2*◈, где двойки особенны, а единицы (первостепенная и второстепенная) формально отличаются так, что $1^2=2\cdot1^1$.

А поскольку из гиперболической тригонометрии следует $a=1^2-\mathrm{th}X=1^2-d$ и $b=1^2+\mathrm{th}X=1^2+d$, где квадратичное число-отклонение $d=\mathrm{th}X$ связано с числом-отношением $c=\left(e^{-X}\right)^2=\dfrac{1^2-d}{1^2+d}$ конверсией, то точка ($d=\varphi^{+1}$, $c=\varphi^3$) задает ареальную (квадратичную) характеристику данной точки в долях $X=1^2$. Найдем ее числовое значение.

Из $-2X=\ln\varphi^3$ следует, что $X_\varphi=1.5\ \ln 0.618\ldots=0.722\ldots$, что устанавливает связь между скалярами *e* и φ, но не является сколь-нибудь замечательным числом.

Вывод.

Так называемая Математика Гармонии с «золотой» пропорцией в основании и элементарная математика, построенная на образе числовой прямой, не имеют общей аксиоматики.

С приложениями секстетного исчисления в механике и физике знакомит книга «Где начало того конца?...» (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0009/001a/00091092.htm)