А.В.Никитин

О «крайнем и среднем…» в «Началах» Евклида.

Мы уже несколько раз возвращались к этой теме. И не только мы…

Вопросов было много. И ответов предлагалось не меньше.

Объективных и не очень. Обоснованных и надуманных.

Мне не хочется снова поднимать этот пласт спорных противостояний, в которых есть и правильные ответы. Эти ответы то хотят видеть, то закрывают на них глаза. Это уже превращается в игру. Тут вижу, тут – не вижу. В зависимости от ситуации…

Я решил покопаться сам, и не смотреть те многочисленные исследования этого вопроса, которые уже публиковались на АТ в последние годы. Захотелось разобраться, не отягощая себя уже опубликованными версиями. Я заранее приношу свои извинения всем авторам, занимавшимся этими вопросами. Этих материалов я читал много, но сейчас мы постараемся подойти к ответу максимально самостоятельно.

Формальная статистика.

Мы видим, что в «Началах» задача «о крайнем и среднем отношении… » упоминается или, по крайней мере, мне встретилось в тексте, вот столько раз:

1. Предложение 2.11.
2. Определение 6.3.
3. Предложение 6.17.
4. Предложение 6.30.
5. Предложение 10.32 (лемма31).
6. Предложение 10.60.
7. Предложение 10.91.
8. Предложение 13.1.
9. Предложение 13.2.
10. Предложение 13.3.
11. Предложение 13.4.
12. Предложение 13.5.
13. Предложение 13.6.
14. Предложение 13.8.
15. Предложение 13.9.
16. Предложение 13.17.
17. Предложение13.18.
18. Предложение 14.3.
19. Предложение 14.6.
20. Предложение 14.7.
21. Предложение 14.8.

В номере, через точку: первая цифра – книга, вторая – предложение.

Мы это уже помним.

Причем, здесь не учтены сопряженные с ней задачи, которые определяют применение задачи о крайнем и среднем. Например, предложения 6.16 и 6.29.

Перечисления сделали, теперь можем остановиться на частностях.

Формально вопрос «деления прямой в крайнем и среднем отношении…» рассматривался в начале изложения, в предложениях книги 2. В теории пропорций, в её заключительном разделе, в книге 6. В описании прямоугольного треугольника и квадрата при рассмотрении биномиалей и рационалей в книге 10. И, наконец, в применении к построениям в «платоновых телах», это книги 13 и 14.

Теперь заглянем в Википедии:

Основное сочинение Евклида называется *Начала*. Книги с таким же названием, в которых последовательно излагались все основные факты геометрии и теоретической арифметики, составлялись ранее Гиппократом Хиосским, Леонтом и Февдием. Однако *Начала* Евклида вытеснили все эти сочинения из обихода и в течение более чем двух тысячелетий оставались базовым учебником геометрии. Создавая свой учебник, Евклид включил в него многое из того, что было создано его предшественниками, обработав этот материал и сведя его воедино.

Вот с этого и начнем рассуждения.

Евклид писал свои «Начала» уже имея перед глазами подобные сочинения. И мало того, как утверждают специалисты, целые книги «Начал» были написаны не Евклидом.

По этому поводу там же:

В I книге изучаются свойства треугольников и параллелограммов; эту книгу венчает знаменитая теорема Пифагора для прямоугольных треугольников. Книга II, восходящая к пифагорейцам, посвящена так называемой «геометрической алгебре». В III и IV книгах излагается геометрия окружностей, а также вписанных и описанных многоугольников; **при работе над этими книгами Евклид мог воспользоваться сочинениями Гиппократа Хиосского**. **В V книге вводится общая теория пропорций, построенная Евдоксом Книдским**, а в VI книге она прилагается к теории подобных фигур. VII—IX книги посвящены теории чисел и восходят к пифагорейцам; **автором VIII книги, возможно, был Архит Тарентский**. В этих книгах рассматриваются теоремы о пропорциях и геометрических прогрессиях, вводится метод для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (известный ныне как алгоритм Евклида), строится чётные совершенные числа, доказывается бесконечность множества простых чисел. **В X книге, представляющей собой самую объёмную и сложную часть *Начал*, строится классификация иррациональностей; возможно, что её автором является Теэтет Афинский**. XI книга содержит основы стереометрии. **В XII книге с помощью метода исчерпывания доказываются теоремы об отношениях площадей кругов, а также объёмов пирамид и конусов; автором этой книги по общему признанию является Евдокс Книдский**. **Наконец, XIII книга посвящена построению пяти правильных многогранников; считается, что часть построений была разработана Теэтетом Афинским**.

Для себя отметим *предполагаемых авторов.*

Книги с упоминанием задачи «о крайнем и среднем» выделим:

Книга 3 – Гиппократ Хиосский.
Книга 4 – Гиппократ Хиосский.
Книга 5 - Евдокс Книдский.
Книга 6 - Евдокс Книдский.
Книга 8 - Архит Тарентский
Книга 10 - Теэтет Афинский.
Книга 12 - Евдокс Книдский.
Книга 13 – Теэтет Афинский.
Книга 14 - Гипсикл Александрийский
Книга 15 - Гипсикл Александрийский

Книги 14 и 15 к Началам Евклида исходно приложены как дополнение. Автор их указан Д.Д.Мордухай-Болтовским [1]:

1. Авторы XIV и XV книг «Начал». Автором книги XIV является александриец Гипсикл, живший, вероятно, около 200 г. н. э. (после Аполлония и до Гиппарха). Ему принадлежит также дошедший до нас «Анафорик» — астрономическое сочинение об определении прямых восхождений светил, интересное в том отно-

Может быть, это в какой-то мере объясняет распределение упоминаний «о крайнем и среднем…» в «Началах»?

Но, единая стилистика в изложении материала во всех основных книгах «Начал» говорит о контроле за стилем оформления книг других авторов, для применения их в качестве составных частей самой крупной математической энциклопедии того времени.

Сам Евклид мог написать свой вариант задачи «о крайнем и среднем…», видимо, только в книге 2. Очевидно, что остальные варианты задачи написали другие авторы. Евклид мог их изменить, но они остались в авторском варианте изложения.

Потому так разнятся описания решения этой задачи.

С другой стороны, книги 1 и 2 задумывались и исполнены, как начала геометрической алгебры пифагорейцев. Исторический материал. От Пифагора до Евклида многие сотни лет. Евклид старался сохранить наследие пифагорейцев.

Учитывая это, мы можем сказать, мысль Д.Д.Мордухай-Болтовского, что «эта задача имеет египетский след», не лишена оснований.

Вопросы, вопросы…

Начнем мы с **книги 2**.

По всей видимости, эта книга написана Евклидом.

База обоснования решения изложена в предложении 2.5.

Начнем мы с решения, приведенного в предложении 2.11.

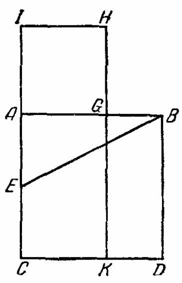
Вот основное решение 2.11. В переводе Д.Д.Мордухай-Болтовского [1]:

Предложение 11

Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставмемся отрезке *).

Пусть данная прямая будет AB (черт. 11); вот требуется AB рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

Надстроим на AB квадрат $ABDC$ (предложение 46 книги I), рассечём AC пополам в точке E, соеднним BE, продолжим CA до I, отложим EI, равную BE, надстроим на AI квадрат IG и продолжим HG до K; я утверждаю, что AB рассечена в G так, что прямоугольник, заключённый между AB, BG, она делает равным квадрату на AG.



Черт. 11.

Действительно, поскольку AC рассечена пополам в E и к ней прикладывается IA, то значит, прямоугольник, заключённый между CI, IA, вместе с квадратом на AE, равен квадрату на EI (предложение 6). EI же равна EB; значит, прямоугольник между CI, IA, вместе с квадратом

*) Это так называемое золотое сечение или деление в среднем и крайнем отношении, когда линия делится так, что больший отрезок является средней пропорциональной между всей линией и меньшим отрезком. Современное решение читатель может найти в любом учебнике геометрии.

76 НАЧАЛА ЕВКЛИДА

на AE, равен квадрату на EB. Но квадрату на EB равны квадраты на BA и AE ⟨вместе⟩; ибо угол при A прямой (предложение 47 книги I); значит, прямоугольник между CI, IA, вместе с квадратом на AE, равен ⟨вместе взятым⟩ квадратам на BA и на AE. Отнимем общий квадрат на AE; значит, остающийся прямоугольник, заключённый между CI, IA, равен квадрату на AB. И прямоугольник между CI, IA есть IK, ибо AI равна IH; квадрат же на AB есть AD; значит, IK равно AD. Отнимем общий AK, значит, остаток IG равен GD. И GD есть прямоугольник между AB, BG, ибо AB равна BD; IG же есть квадрат на AG; значит, прямоугольник, заключённый между AB и BG, равен квадрату на GA.

Значит, данная прямая AB рассечена в G так, что прямоугольник, заключённый между AB, BG, она делает равным квадрату на GA, что и требовалось сделать (20, 21).

Как мы видим, чисто геометрическое решение. Оно направлено на доказательство равенства прямоугольника KGBD и квадрата AIHG, а не пропорциональности отрезков AG и GB, начальной прямой AB. Таким образом, авторское направление понимания понятно.

Почему самое главное определение 6.3 находится не в начале изложения, и не в начале рассмотрения материала о пропорциях (книга 5), а в продолжении, в книге 6?

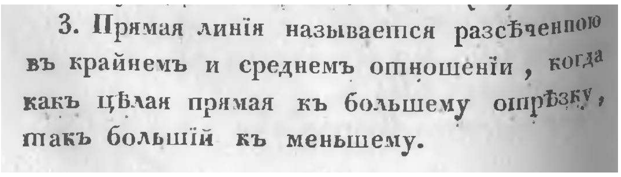
Это один из самых интересных вопросов во всем исследовании.

Книги 5 и 6 написал, видимо, Евдокс Книдский .

Он и включил в свой труд основное понимание задачи и свои решения.

Потому определение 6.3 сформулировано не так, как решается задача 2.11.

Читаем определение 6.3. Сначала в переводе Ф.Петрушеского:


3. Прямая линія называется разсѣченною въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, когда какъ цѣлая прямая къ большему отрѣзку, такъ большій къ меньшему.

Теперь в переводе Д.Д.Мордухай- Болтовского [1]:

Определение 6.3. Говорится, что прямая делится в *крайнем и среднем отношении*, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [2, с. 173].

Такая синхронность перевода говорит о том, что и в исходном тексте «Начал» смысл был примерно тот же.

Сегодня для этого понимания подходит вариант С.Л.Василенко:

Рис.1. Понятийный смысл терминов "крайнего и среднего отношений"
в интерпретации точки сопряжения.

Этот рисунок полностью отражает современное понимание задачи. Но, давайте учтем, что … и задача формулировалсь не сегодня, и термины мы понимаем сегодня не так, как наши предки, и тем более, древние греки...

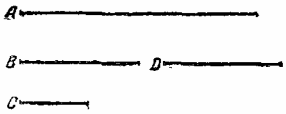
В книге 6 приведено два *различных* решения этой задачи.

Мы даем их в переводе Д.Д.Мордухай-Болтовского[1]:

Предложение 17

Если три прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней; и если прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней, то три прямые будут пропорциональны.

Пусть три прямые A, B, C пропорциональны: как A к B, так и B к C (черт. 18);



Черт. 18.

я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между A и C, равен квадрату на B.

Отложим D, равную B.

И поскольку будет, что как A к B, так и B к C, а B равна D, то значит, будет, что как A к B, так и D к C. Если же четыре прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними (предложение 16). Значит, прямоугольник между A, C равен прямоугольнику между B, D. Но прямоугольник между B, D есть квадрат на B; ибо B равна D; значит, прямоугольник, заключённый между A, C, равен квадрату на B.

Но вот пусть прямоугольник между A, C будет равен квадрату на B; я утверждаю, что как A к B, так и B к C.

Действительно, после тех же построений, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между A, C равен квадрату на B, но квадрат на B есть ⟨прямоугольник⟩ между B, D (ибо B равна D), то значит, прямоугольник между A и C равен прямоугольнику между B и D. Если же прямоугольник между крайними равен прямоугольнику между средними, то эти четыре прямые пропорциональны (предложение 16). Значит, будет, что как A к B, так и D к C. B же равна D; значит, как A к B, так и B к C.

Значит, если три прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней; если прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней, то три прямые будут пропорциональны, что и требовалось доказать.

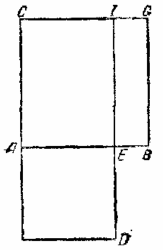
Предложение 30

Данную ограниченную прямую рассечь в крайнем и среднем отношении.

Пусть данная ограниченная прямая будет AB; вот требуется рассечь прямую AB в крайнем и среднем отношении (черт. 32).

Построим на AB квадрат BC и приложим к AC равный BC параллелограмм CD с избытком — фигурой AD, подобной BC (предложение 29).

BC же есть квадрат; значит, и AD квадрат. И поскольку BC равен CD, то отнимем общее CE; значит, остаток BI равен остатку AD. Он же и равноуголен ему*); значит, в BI и AD стороны при равных углах обратно пропорциональны (предложение 14); значит, будет, что как IE к ED, так и AE к EB. Но IE равна AB**), ED же равна AE. Значит, будет, что как BA к AE, так и AE к EB. Но AB больше AE; значит, и AE больше EB (предложение 14 книги V).



Черт. 32.

Значит, прямая AB рассечена в E в крайнем и среднем отношении (определение 3) и больший её отрезок AE, что и требовалось сделать (31, 32).

Предложение 6.17 предлагает нам сопоставить отрезки А, В и С. И фактически применить современный способ решения пропорций, когда произведение *крайних* членов равно произведению *средних*. Это выражается в равенстве площадей прямоугольников (квадратов)…

Доказательство приведено в 6.16. Конечно, геометрическое.

Смотрим предложение 6.30.

Данное решение базируется на собственной доказательной базе, заложенной в 6.29.

При этом, давайте оценим, что примерно такая же, доказательная база для решения 2.11 была заложена Евклидом в предложениях 2.4, 2.5 и последующих предложениях.

И всё же, это самостоятельный вариант решения. Он нацелен на доказательство пропорциональности отрезков прямой, а не на равенство квадрата и прямоугольника …

Вариант использует то, что мы сегодня бы назвали «алгебраическим» решением.

Но, тут есть некоторая натяжка. Посмотрите внимательно: Сразу говорится, приложите к квадрату ВС параллелограмм CD, равный ВС, с избытком, фигурой AD, подобной ВС …

Всё. То, что дальше уже - «от лукавого».

Откуда еще до решения узнали, что AD подобен ВС и что это *квадрат*?

И ещё, *как прямоугольник и квадрат должны быть исходно равны*?

А дальше мы видим *прообраз вычислительного решения* на квадрате AD. Но самого решения естественно нет. Почему? Об этом мы уже говорили в предыдущих статьях [3, 4].

Странно, решение задачи 6.17 скорее *исключает* решение 6.30, а *не дополняет его*.

И тем более, странно видеть некий повтор материала книги 2 в книге 6. По крайней мере, в части доказательства задачи «о крайнем и среднем…» предложения 6.30.

Но Евклид пошел на это. Почему? Не знаю…

Может быть потому, что Евклид видел очевидные различия своего решения и Евдокса Книдского. А на фоне определения 6.3 это вообще разные задачи.

Ну что же, по крайней мере, немного понятнее стало.

Переходим к **книге 10**.

Эту книгу «Начал», скорее всего, написал Теэтет Афинский.

Как мы видим, в этой книге ссылки на задачу «о крайнем и среднем…» идут только на предложение 6.17 Евдокса Книдского. Здесь ссылок на вариант Евклида я не увидел.

Вот, например, перевод Д.Д.Мордухай-Болтовского [1]:

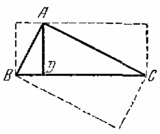
Лемма (31)

Пусть будет прямоугольный треугольник ABC, имеющий ⟨угол⟩ A прямой, и проведём перпендикуляр AD; я утверждаю, что ⟨прямоугольник⟩ между CB, BD будет равен ⟨квадрату⟩ на BA, ⟨прямоугольник⟩ же между BC, CD равен ⟨квадрату⟩ на CA, и ⟨прямоугольник⟩ между BD, DC равен ⟨квадрату⟩ на AD, и ещё ⟨прямоугольник⟩ между BC, AD равен [будет] ⟨прямоугольнику⟩ между BA, AC (черт. 38).

И сперва, что ⟨прямоугольник⟩ между CB, BD равен [будет] ⟨квадрату⟩ на BA.

Действительно, поскольку в прямоугольном треугольнике из прямого угла к основанию проведён перпендикуляр AD, то значит, ABD, ADC будут треугольники, подобные и всему ABC и между собой (предложение 8 книги VI).

И поскольку треугольник ABC подобен треугольнику ABD, то значит, будет, что как CB к BA, так и BA к BD (предложение 4 книги VI); значит, ⟨прямоугольник⟩ между CB, BD будет равен ⟨квадрату⟩ на AB (предложение 17 книги VI).



Черт. 38.

Вследствие того же вот и ⟨прямоугольник⟩ между BC, CD будет равен ⟨квадрату⟩ на AC.

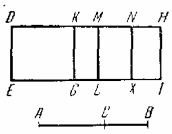
И поскольку, когда в прямоугольном треугольнике из прямого угла проведён перпендикуляр, проведённая ⟨прямая⟩ будет средней пропорциональной между отрезками основания (предложение 8, следствие книги VI), то значит, будет, что как BD к DA, так и AD к DC; значит, ⟨прямоугольник⟩ между BD, DC будет равен ⟨квадрату⟩ на DA (предложение 17 книги VI).

Я утверждаю, что и ⟨прямоугольник⟩ между BC, AD будет равен ⟨прямоугольнику⟩ между BA, AC. Действительно, поскольку, как мы сказали, ABC будет подобен ABD, то значит, будет (предложение 4 книги VI), что как BC к CA, так и BA к AD [если же четыре прямые пропорциональны, то ⟨прямоугольник⟩ между крайними равен ⟨прямоугольнику⟩ между средними]. Значит, ⟨прямоугольник⟩ между BC, AD равен ⟨прямоугольнику⟩ между BA, AC (предложение 16 книги VI), что и требовалось доказать.

Предложение 60

⟨Квадрат⟩ на биномиали, приложенный к рациональной ⟨прямой⟩, образует шириной первую биномиаль.

Пусть будет биномиаль AB, рассечённая в C на рационали так, чтобы большей рациональю была AC; отложим рациональную ⟨прямую⟩ DE, и приложим к DE равный ⟨квадрату⟩ на AB ⟨параллелограмм⟩ $DEIH$, образующий ширину DH; я утверждаю, что DH будет первой биномиалью (черт. 69).



Черт. 69.

Действительно, приложим к DE равную ⟨квадрату⟩ на AC ⟨площадь⟩ DG, ⟨квадрату⟩ же на BC равную ⟨площадь⟩ KL; остающийся, значит (предложение 4 книги II), дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB равен будет ⟨площади⟩ MI. Разделим MH пополам в N и проведём NX параллельно [каждой из ML, HI]. Значит, каждый из MX, NI будет равен один раз ⟨взятому прямоугольнику⟩ ACB*). И поскольку AB — биномиаль, рассечённая в C на рационали, то значит, AC, CB будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 36); значит, ⟨квадраты⟩ на AC, CB будут рациональны и соизмеримы между собой; так что и составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB [соизмеримо будет с ⟨квадратами⟩ на AC, CB (предложение 15); значит, составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB будет рациональным]. И равно оно DL; значит, DL будет рациональным. И прилагается он к рациональной DE; значит, DM будет рациональна и соизмерима с DE линейно (предложение 20). Затем, поскольку AC, CB будут рациональными, соизмеримыми только в степени, то значит, дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, то-есть MI, будет медиальным (предложение 21). И прилагается он к рациональной ML; значит, и MH будет рациональна и линейно несоизмерима с ML, то-есть с DE (предложение 22). Также и MD рациональна и линейно соизмерима с DE; значит, DM будет линейно несоизмерима с MH (предложение 13). И они рациональны; значит, DM, MH будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, DH будет биномиалью (предложение 36).

Следует вот доказать, что и первой.

Поскольку для ⟨квадратов⟩ на AC, CB средним пропорциональным будет ⟨прямоугольник⟩ ACB*) (лемма предложения 21), то значит, и для DG, KL средним пропорциональным будет MX. Значит, будет, что как DG к MX, так и MX к KL, то-есть (предложение 1 книги VI) как ⟨прямые⟩ DK к MN, ⟨так и⟩ MN к MK; значит, ⟨прямоугольник⟩ между DK, KM будет равен ⟨квадрату⟩ на MN (предложение 17 книги VI). И поскольку ⟨квадрат⟩ на AC соизмерим с ⟨квадратом⟩ на CB, то и ⟨площадь⟩ DG соизмерима будет с KL; так что и ⟨прямая⟩ DK будет соизмерима с KM (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). И поскольку ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB больше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AC, CB (см. лемму), то значит, и ⟨площадь⟩ DL больше MI; так что и ⟨прямая⟩ DM будет больше MH (предложение 1 книги VI; предложение 14 книги V). И ⟨прямоугольник⟩ между DK, KM будет равен ⟨квадрату⟩ на MN, то-есть четверти ⟨квадрата⟩ на MH, и DK соизмерима с KM. Если же будут две неравные прямые, к большей же приложен с недостатком в виде квадрата ⟨параллелограмм⟩, равный четвёртой части ⟨квадрата⟩ на меньшей, и если он разделяет её на соизмеримые ⟨части⟩, то в квадратах бо́льшая будет больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой ⟨прямой⟩ (предложение 17); значит, DM в квадратах будет больше MH на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой. И DM, MH суть рациональные ⟨прямые⟩, и DM, будучи большей рациональю, соизмерима будет линейно с отложенной рациональной ⟨прямой⟩ DE.

Значит, DH будет первой биномиалью (определения вторые, 1), что и требовалось доказать.

Предложение 10. 91 я уже не даю, оно большое, проще читать в оригинале.

И все дальнейшие ссылки на задачу «о крайнем и среднем…» как предложение 6.17, тоже останутся без подтверждения текстами «Начал». Согласитесь, статья и так перегружена вырезками из этой книги.

Теэтет Афинский написал и **книгу 13**.

Это объясняет ту же направленность ссылок в книге 13 на задачу «о крайнем и среднем», как на предложение 6.17.

Автор **книги 14** - Гипсикл Александрийский.
Но и тут мы видим ссылки только на предложение 6.17. Евдокса Книдского.
На предложение 2.11 Евклида ссылок нет.

Кстати, вот и важное заключение в предложении 13.18 [1]:

> *Вот я утверждаю, что кроме упомянутых пяти тел нельзя построить другого тела, заключённого между равносторонними и равноугольными равными друг другу ⟨многоугольниками⟩.*

Это о платоновых телах…
Именно этими телами очень интересовался Лука Пачоли.
Об этом находим у Щетникова [2]:

«Далее ЛУКА излагает различные свойства «божественной пропорции», известные по XIII и XIV книге *Начал* ЕВКЛИДА. Всего он рассматривает тринадцать таких свойств, …»

Мы в книгах 13 и 14, нашли 14 упоминаний «о крайнем и среднем». Видимо, нашли почти все. Правда, о свойствах пропорции как-то не задумались…

Общие размышления.

Да, вычислительного решения в «Началах» Евклида я так и не нашел. Как не нашел и выражения отношения, пригодного для отождествления с числом Ф.

Все решения той математики, по крайней мере, в её официальном исполнении, даны в геометрическом понимании. Но, скорее всего, это было и общепринятое понимание числа в те времена.

Откроем **книгу 7** и попробуем почитать. Вот определения числа из варианта перевода Д.Д.Мордухай- Болтовского [1]:

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. *Единица* есть ⟨то⟩, через что каждое из существующих считается единым (1, 2, 3).
2. *Число* же — множество, составленное из единиц (4, 5, 6).
3. *Часть* есть число в числе, меньшее в большем, если оно измеряет*) большее.
4. «*Части*» же, — если оно его не измеряет (7, 8, 9, 10).
5. *Кратное* же — большее от меньшего, если оно измеряется меньшим.
6. *Чётное число* есть делящееся пополам.
7. *Нечётное же* — не делящееся пополам или отличающееся на единицу от чётного числа.
8. *Чётно-чётное* число есть чётным числом измеряемое чётное число ⟨раз⟩.
9. *Чётно же нечётное* есть чётным числом измеряемое нечётное число ⟨раз⟩ (11).
[10. *Нечётно-чётное* есть нечётным числом измеряемое чётное число ⟨раз⟩.]
11. *Нечётно-нечётное* число есть нечётным числом измеряемое нечётное число ⟨раз⟩.
12. *Первое* *) число есть измеряемое только единицей.
13. *Первые между собой* числа суть измеряемые только единицей как общей мерой.
14. *Составное число* есть измеряемое некоторым числом.
15. *Составные же между собой числа* суть измеряемые некоторым числом как общей мерой.
16. Говорят, что *число умножает число*, когда сколько в нём единиц, столько раз составляется умножаемое и что-то возникает (12).
17. Когда же два числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающее ⟨число⟩ называется *плоскостным, стороны* же его суть перемножаемые между собой числа (13, 14).
18. Когда же три числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающее есть *телесное*, стороны же его — перемножаемые между собой числа.
19. Квадратное число есть равноравное **) или объемлемое двумя равными числами (15, 16).
20. Кубическое же — равным равноравное ***) или объемлемое тремя равными числами.
21. *Числа будут пропорциональны*, когда первое от второго, а третье от четвёртого будут или равнократными, или той же частью, или теми же «частями» (17, 18).
22. *Подобные плоскостные* и *телесные числа* суть имеющие пропорциональные стороны (19).
23. *Совершенное число* есть то, которое будет равным своим частям (20).

---

*) В подлиннике «καταμετρῇ» — «измеряет», но ни в коем случае не «*делит*».
У Герона встречаются термины: μερίζειν — делить на части и διαιρεῖν — рассекать (о геометрических фигурах).

Обратим внимание на определения 1-7, 12-22, понятно, что это много, но …

Почти всё понятно сразу, с первого прочтения. И возникает ощущение, что мы понимаем точно то, что написано. А понимаем ли? Читаем определение 21.

Это же математическая пропорция, так?

Это определение базируется на определениях 17 и 18. Читаем их….

Такие сложные понимания чисел образуют и сложные комплексы решений, которые современными исследователями понимаются достаточно трудно. Читаем и вроде понимаем, а к выводу подходим, нет, оказывается, не поняли…

Теперь приближаемся к задаче «о крайнем и среднем…».

Евклид зафиксировал в «Началах» решение 2.11, которое видимо уже ранее было в трудах пифагорейцев. Оно имеет законченное и полное обоснование, точную формулировку вывода и вполне претендует на самостоятельность понимания. Но…

Оно не подходит к названию задачи – «О крайнем и среднем…». Потому, что ни «крайнего», ни «среднего» там нет.

Всё это есть в книге 6 Евдокса Книдского.

И именно это понимание в те времена, видимо, уже считалось наиболее общим. По этой причине в последующих книгах «Начал» есть ссылки только на предложение 6.17.

И, тем более определение 6.3. Оно, похоже, уже и в те времена было самым современным, а потому и самым применяемым. Оно и сейчас определяет название задачи.

Потому и предложение 2.11 не применяется в качестве обоснования, но Евклид на это «закрывает глаза»…

При этом, предложение 6.17 не имеет того самого вычислительного решения, которое мы безуспешно разыскиваем в «Началах». Этому мешает определение числа в той математике.

Понимал ли это Евклид? Скорее всего – да.

И Евдокс Книдский понимал, но выхода из этого он ещё не видел.

Потому и задача сформулирована для целой (единичной) прямой, а решение 6.17. дано для отрезков в конкретном счетном выражении.

Евклид-математик понимал, что новый вариант задачи «о крайнем и среднем…», зафиксированный, как определение 6.3 пока не имеет вычислительного решения в рамках той математики, для которой написаны «Начала».

Но основная масса математиков уже ориентировалась на этот вариант решения. И сложно представить, что математики не оценили это соотношение в численном выражении.

Где-то оно должно было быть. Конечно, это не 1,62, но вполне возможно, что могло быть 162/100 или что-то в этом роде…, хочется так думать.

Но, в «Началах» мы такого выражения не видим. Ни в каком виде.

И конечно, Евклид - составитель «Начал», наверное, мог оценить отношение, которое мы называем числом Ф. Но, как мы видим, это не так.

Представьте себе, пятнадцать книг, даже по 40 предложений в каждой, это около 600 задач. И только 21 ссылка, включая и сами решения. Менее 3% от общего количества предложений. Не мало, но и не много.

Стандартный вопрос той математики. У Евклида таких вопросов математики в «Началах»… много. Все не выделишь. Потому решение задачи 2.11 осталось в том виде, как мы его видим. Как и предложение 6.30.

И только предложение 6.17 составило внушительную часть обоснования «платоновых тел». Это надо отметить особо. Заметьте, это формулировка и решение не Евклида.

Задача «о крайнем и среднем…» сформулирована и решена Евдоксом Книдским.

Похоже, что история числа Ф еще не дописана. Так мне кажется…

г.Екатеринбург.
Август 2013г.

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
2. Щетников И., Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции»
3. Никитин А.В., Снова «О крайнем и среднем…» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18120, 31.07.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162151.htm
4. Никитин А.В., О понимании Золотого Сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18114, 27.07.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162148.htm
5. Никитин А.В., О «крайнем и среднем…» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16772, 21.08.2011