А.В.Никитин

Снова «О крайнем и среднем…».

Только что опубликована статья «О понимании Золотого Сечения» . И вроде бы сказал всё, что хотел, а мысль не успокаивается, продолжает свой поиск…

Почему задачи на тему числа ***Ф*** в «Началах» Евклида – две?

Почему они об одном, но … - о разном? В одном случае геометрические построения, а другом – пропорция. Почему у одной задачи решение есть, а у другой – нет?

Должен же быть ответ на эти вопросы…

Общие замечания.

Если мы внимательно посмотрим на «Начала» Евклида, перевод с греческого Ф.Петрушевского, изданные в Санкт-Петербурге в 1819 году, то увидим, что там есть то, что потом из текста последующих переводов ушло. Описание чисел. Числа плоские, кубические, … и «просто» числа.

Вот, что, оказывается, уже почти не учитывает сегодняшний перевод Д.Д.Мордухай-Болтовского. Истории. Хоть и старые задачи, но рассказаны они почти современным языком математики. Нет, это совсем не плохо, но помнить об этом при осмыслении задачи, всё же, не помешает.

В Древней Греции времен Евклида единица, как число, была неделимой. Дробей, как части единицы не существовало. Были отношения целых чисел, как отдельный вид числа.

И потому, когда надо было говорить о «части целого», то прибегали к применению прямой, но, заметим, прямой конечной длины из целого количества единиц нужной размерности, в качестве этого «целого», и уже её делили на «части», естественно, тоже, конечной длины в целых числах той же размерности.

Этот прием позволяет обходиться без дробей и в нашем современном понимании, и всегда оперировать целыми числами.

Вот длина прямой, вот делим её на части, а каждая часть, всё равно, целое число, но часть от всей прямой.

Теперь немного о Началах Евклида. Для понимания.

Вот что мы читаем о содержании «Начал» Евклида:

В I книге изучаются свойства треугольников и параллелограммов; эту книгу венчает знаменитая теорема Пифагора для прямоугольных треугольников. Книга II, восходящая к пифагорейцам, посвящена так называемой «геометрической алгебре». В III и IV книгах излагается геометрия окружностей, а также вписанных и описанных многоугольников; при работе над этими книгами Евклид мог воспользоваться сочинениями Гиппократа Хиосского. В V книге вводится общая теория пропорций, построенная Евдоксом Книдским, а в VI книге она прилагается к теории подобных фигур. VII—IX книги посвящены теории чисел и восходят к пифагорейцам; автором VIII книги, возможно, был Архит Тарентский. В этих книгах рассматриваются теоремы о пропорциях и геометрических прогрессиях, вводится метод для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (известный ныне как алгоритм Евклида), строится чётные совершенные числа, доказывается бесконечность множества простых чисел.

Правда уже существовала задача, непостижимая для математиков того времени:

Первой трещиной в пифагорейской модели мира стало ими же полученное доказательство иррациональности $\sqrt{2}$, сформулированное геометрически как несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной (V век до н. э.). Невозможность выразить длину отрезка числом ставила под сомнение главный принцип пифагорейства. Даже Аристотель, не разделявший их взгляды, выражал своё изумление по поводу того, что есть вещи, которые «нельзя измерить самою малою мерою»[6].

Вот еще одна преграда для решения задачи: получаемый результат Ф – иррациональное число и точного значения не имеет. Для того времени трудность - сложнейшая…

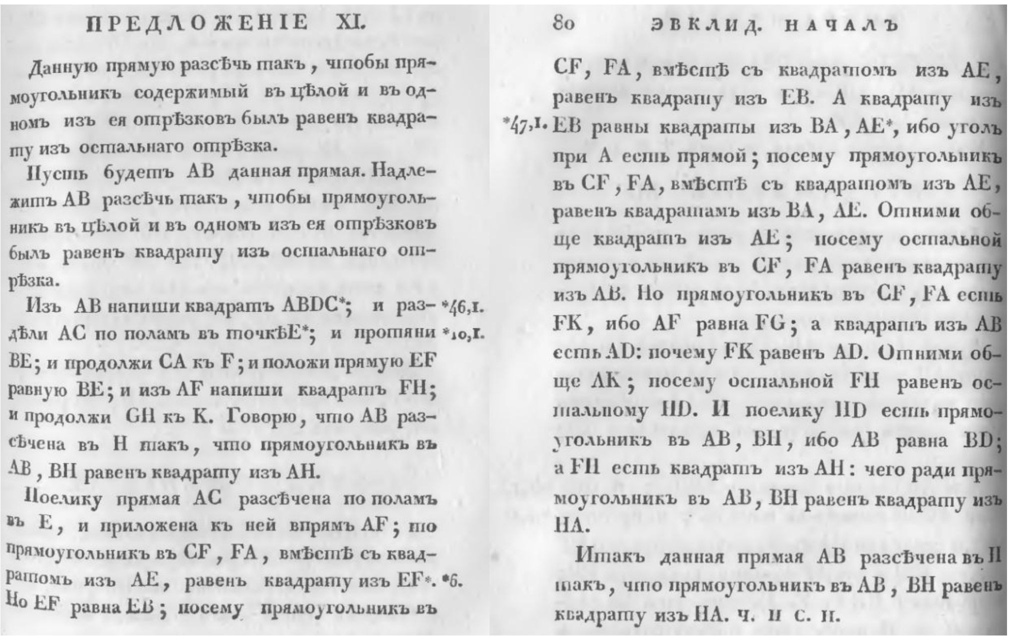
На этом с общими замечаниями – всё.

Теперь – к задаче…

Начнем с геометрического построения.

Воспроизведем задачу о делении прямой:

Предложение 2.11.   [«Начала» Евклида, перевод с греческого Ф.Петрушевского]:



ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Данную прямую разсѣчь такъ, чтобы прямоугольникъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея отрѣзковъ былъ равенъ квадрату изъ остальнаго отрѣзка.

Пусть будетъ AB данная прямая. Надлежитъ AB разсѣчь такъ, чтобы прямоугольникъ въ цѣлой и въ одномъ изъ ея отрѣзковъ былъ равенъ квадрату изъ остальнаго отрѣзка.

Изъ AB напиши квадратъ ABDC*; и раз- *46,1.
дѣли AC по поламъ въ точкѣE*; и протяни *10,1.
BE; и продолжи CA къ F; и положи прямую EF равную BE; и изъ AF напиши квадратъ FH; и продолжи GH къ K. Говорю, что AB разсѣчена въ H такъ, что прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ AH.

Поелику прямая AC разсѣчена по поламъ въ E, и приложена къ ней впрямъ AF; то прямоугольникъ въ CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадрату изъ EF*. *6.
Но EF равна EB; посему прямоугольникъ въ

80 ЭВКЛИД. НАЧАЛЪ

CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадрату изъ EB. А квадрату изъ
47,1. EB равны квадраты изъ BA, AE, ибо уголъ при A есть прямой; посему прямоугольникъ въ CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадратамъ изъ BA, AE. Отними общее квадратъ изъ AE; посему остальной прямоугольникъ въ CF, FA равенъ квадрату изъ AB. Но прямоугольникъ въ CF, FA есть FK, ибо AF равна FG; а квадратъ изъ AB есть AD: почему FK равенъ AD. Отними общее AK; посему остальной FH равенъ остальному HD. И поелику HD есть прямоугольникъ въ AB, BH, ибо AB равна BD; а FH есть квадратъ изъ AH: чего ради прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ HA.

Итакъ данная прямая AB разсѣчена въ H такъ, что прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ HA. ч. и с. н.

А что? Сделаем то, что написано.

Да, с пониманием что-то сложно....

Но вот этот вариант, на рис.1 вроде ближе всех к тексту получился:

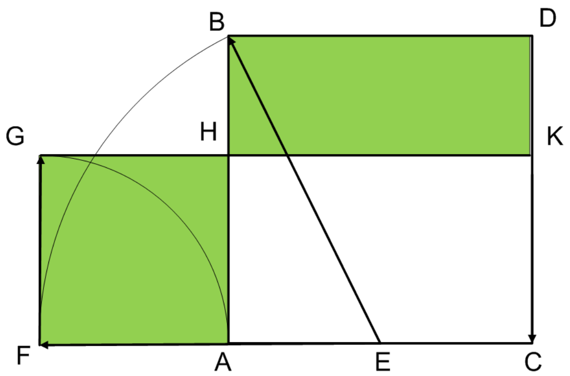


Рис.1. Построение по Петрушевскому.

Геометрическими построениями, как мы видим, результат все же достигается. И вполне понятно, с учетом языка изложения, конечно. Собственно, главное показано.

Прямая AB достраивается до квадрата ABCD. На середине AC находится точка E. От нее проводится прямая BE. Это радиус поворота прямой из точки E до точки F на продолжении AC. Из отрезка AF достраивается квадрат AFGH, а прямая GH продолжается до точки K.

Далее доказывается, что площадь квадрата AFGH и площадь прямоугольника HBDK равны. Правда, всё это очень сложно, с учетом языка изложения. Но … доказывается.

Мы уловили главное для нас. Строится квадрат ***(ф*ф)*** AFGH, а прямая отсекает прямоугольник ***(1-ф)*** HBDK. И они равны.

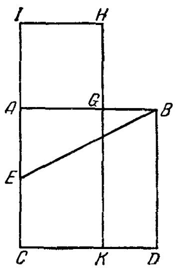
А вот то же предложение 2.11. в переводе Д.Д.Мордухай-Болтовского [1]:

Предложение 11

Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке *).

Пусть данная прямая будет *AB* (черт. 11); вот требуется *AB* рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

Надстроим на *AB* квадрат *ABDC* (предложение 46 книги I), рассечём *AC* пополам в точке *E*, соединим *BE*, продолжим *CA* до *I*, отложим *EI*, равную *BE*, надстроим на *AI* квадрат *IG* и продолжим *HG* до *K*; я утверждаю, что *AB* рассечена в *G* так, что прямоугольник, заключённый между *AB*, *BG*, она делает равным квадрату на *AG*.



Черт. 11.

Действительно, поскольку *AC* рассечена пополам в *E* и к ней прикладывается *IA*, то значит, прямоугольник, заключённый между *CI*, *IA*, вместе с квадратом на *AE*, равен квадрату на *EI* (предложение 6). *EI* же равна *EB*; значит, прямоугольник между *CI*, *IA*, вместе с квадратом на *AE*, равен квадрату на *EB*. Но квадрату на *EB* равны квадраты на *BA* и *AE* ⟨вместе⟩; ибо угол при *A* прямой (предложение 47 книги I); значит, прямоугольник между *CI*, *IA*, вместе с квадратом на *AE*, равен ⟨вместе взятым⟩ квадратам на *BA* и на *AE*. Отнимем общий квадрат на *AE*; значит, остающийся прямоугольник, заключённый между *CI*, *IA*, равен квадрату на *AB*. И прямоугольник между *CI*, *IA* есть *IK*, ибо *AI* равна *IH*; квадрат же на *AB* есть *AD*; значит, *IK* равно *AD*. Отнимем общий *AK*, значит, остаток *IG* равен *GD*. И *GD* есть прямоугольник между *AB*, *BG*, ибо *AB* равна *BD*; *IG* же есть квадрат на *AG*; значит, прямоугольник, заключённый между *AB* и *BG*, равен квадрату на *GA*.

Значит, данная прямая *AB* рассечена в *G* так, что прямоугольник, заключённый между *AB*, *BG*, она делает равным квадрату на *GA*, что и требовалось сделать (20, 21).

*) Это так называемое золотое сечение или деление в среднем и крайнем отношении, когда линия делится так, что больший отрезок является средней пропорциональной между всей линией и меньшим отрезком. Современное решение читатель может найти в любом учебнике геометрии.

В общем случае, мы, оказывается, правильно построили и в первый раз. Приятно это сознавать.

Посмотрим построение А.П.Стахова:

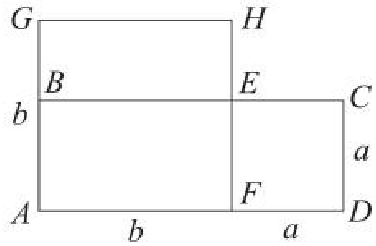


Рис.2. Построение по А.П.Стахову.

Всё так же. По варианту Д.Д. Мордухай-Болтовского. С небольшими перестановками. Скорее всего, был какой-то другой перевод, но близкий по смыслу.

Теперь посмотрим у С.Л.Василенко.

Первая форма связана с отношением и равенством площадей [2, с. 75]:

Предложение 2.11. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

/в нумерации 2.11 первое число означает 2-ю книгу "Начал", другое – 11-е предложение/

Как мы видим, С.Л.Василенко не стал нас водить по бесконечным хитросплетениям приведенного построения и последующего доказательства, а быстро суммировал их в доходчивую картинку на рис. 5.

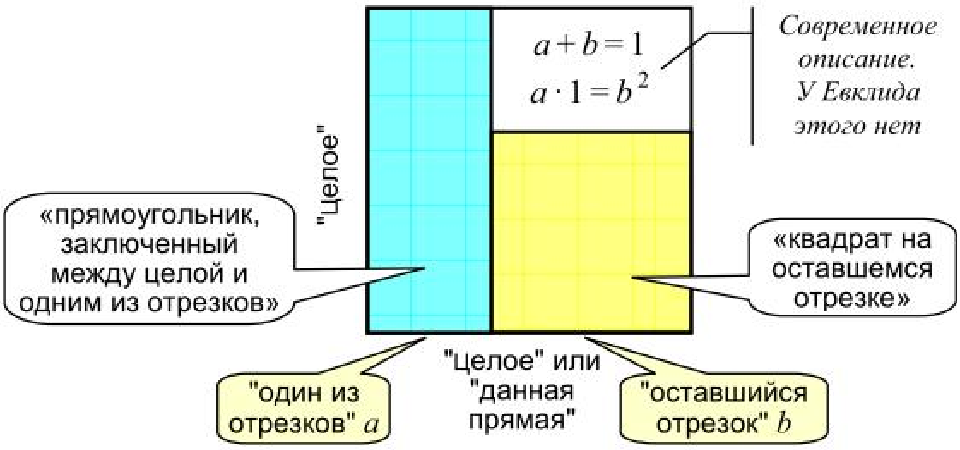


Рис. 5. Геометрическая интерпретация предложения 2.11 Евклида:
«данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке»

И, судя по моим собственным мытарствам с построением, это решение верное. Потому, что мы всё равно уже знаем смысл построения.

Вот еще и дополнительные решения автора:

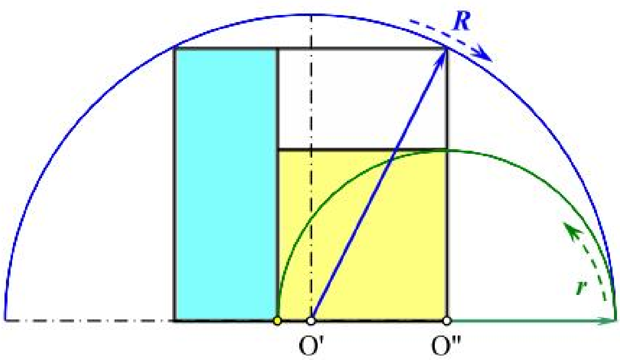


Рис. 3. Геометрическое построение-решение предложения 2.11 Евклида (циркулем и линейкой)

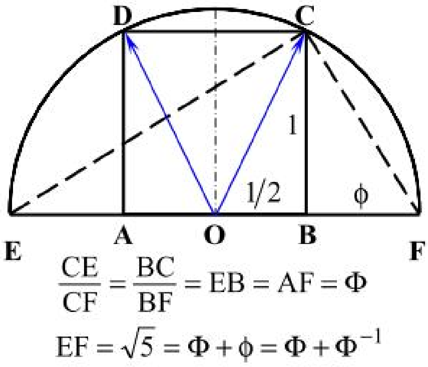
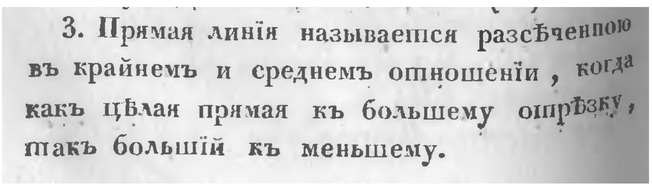


Рис. 4. Числовые параметры ЗС согласно алгоритму Евклида

Самое интересное.

Переходим ко второй форме определения, той самой задаче «о крайнем и среднем…» в «Началах» Евклида. Вот перевод Ф.Петрушевского. Книга 6 определение 3:


3. Прямая линія называется разсѣченною въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, когда какъ цѣлая прямая къ большему отрѣзку, такъ большій къ меньшему.

Это всё.
В переводе Д.Д.Мордухай-Болтовского [1] почти так же:

Определение 6.3. Говорится, что прямая делится в *крайнем и среднем отношении*, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [2, с. 173].

Здесь тоже - решения нет.
Почему?

В этом определении «о крайнем и среднем» мы сталкиваемся, вроде бы, с пропорцией, которую предлагается решить геометрическим методом.

На прямой.

Разделить её на отрезки в соответствующих отношениях.

Но, как нам говорят, геометрическое и развернутое решение этой же задачи уже есть. Это предложение 2.11. Зачем еще раз повторять?

В предыдущей книге 5 есть целый раздел пропорций, а повтор вроде бы простейшей пропорции, да еще и на одной прямой, тут, в книге 6, и не в предложениях, а в определениях, в подготовительном материале к изложению темы…, почему?

У меня пока ответа нет…

Но, возвращаемся к решению задачи и смотрим решение С.Л.Василенко:

Рис.6. Понятийный смысл терминов "крайнего и среднего отношений"
в интерпретации точки сопряжения.

Похоже, этот рисунок полностью отражает схему задачи.

В «Началах» Евклида, по крайней мере…

Да, это точки сопряжения отрезков и самой прямой. Но если даны такие точки сопряжения, то решать надо … на этой прямой. В числах. Отмерять и делить.

Вот тут и возникает проблема вычислительного решения.

Ведь прямая-то, неизвестной длины, просто - «целая».

По современным понятиям – единичная. И надо её разделить *на части «от целого»*. Дробные части. Для того времени – сложно.

Задача решения не имеет…

Да, для математиков Древней Греции проблема вычислительного решения задачи «о крайнем и среднем» практически неразрешима. Причин этому несколько. И большинство их нам уже известно. Но мы, все же, повторим. В общем списке:

Причина первая: В математике пифагорейцев чисел меньше 1 быть не может.

Единица неделима. Этот основное положение математики тех времен. Отношение чисел может быть любым, но это только отношения или пропорции, а дробей, как частей целого еще не существовало.

Причина вторая: В отличии от чисел больше 1, которые с увеличением степени увеличиваются и «идут» в сторону бесконечности, дроби с увеличением степени … уменьшаются и «идут» к нулю.

И потому, для математиков Древней Греции даже факт того, что $\phi>\phi^2$ был невозможным.

А вот $\Phi<\Phi^2$, это нормально. Потому, что число Φ больше 1.

Причина третья: Степень числа рассматривалась только в геометрической плоскости. Вот откуда квадратные числа. У Петрушевского мы находим «кубические» и «плоские» числа.

Отрезок прямой не мог иметь в описании числа размерности степени. Это же *прямая*, а потому - чисто *линейный* размер.

А еще числа были треугольные, «совершенные» и т.д. …

Причина четвертая: В задаче «о крайнем и среднем…» математики Древней Греции столкнулись с таким же иррациональным числом Ф, как и $\sqrt{2}$. Проблемы понятны…

Таким образом, в решении задачи «о крайнем и среднем» мы сталкиваемся с вариантом «невозможного решения». Мы видим, ***а=ф*ф***, что не соответствует размерности линии.

Да и размер площади квадрата ***S=ф*ф,*** в геометрическом решении, явно зрительно больше, чем длина отрезка ***а=ф*ф***. И математики Древней Греции это видели.

Но, для целых чисел это невозможно, когда $\boldsymbol{\phi > \phi^2}$, а дроби не применялись. Что делать? Потому и стал нужен линейный эквивалент замены, такой, как ***а=1-ф***, но и он оказался неприменим. Это опять - дробь...

Кстати сказать, а откуда, это число ***1-ф*** должно было появиться?

В задаче это число в явном виде не фигурирует. Если только использовать решение из первой формы (предложение 2.11.)?   Да, наверное…

Но, в данном случае, мы же вычисляем результат, а не находим его геометрически, с доказательством. Как промежуточный результат, число ***а=ф*ф=1-ф;*** могло возникнуть только искусственно. Вычитанием из целого. Но, скорее всего, решение было получено тривиальной подгонкой результата. Как?

Сравнением вычисленного ответа и геометрического решения. Из первой формы задачи.

Вот так:

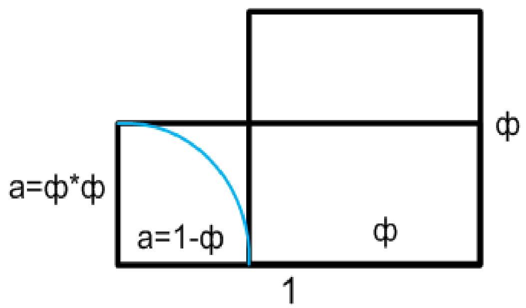


Рис.7. Получение 1-ф.

Сначала было получено решение, примерно так, как показал С.Л.Василенко на рис.5. Потом лист перегнули по линии сопряжения квадрата и прямоугольника. Теперь смотрим рис.7. И снова провели циркулем проверку квадрата, как на рис.1., правда, там квадрат другой – ***S=ф*ф***.

А у нас это высота ***а=ф*ф*** и отрезок ***1-ф***, которые надо сравнить и найти их совпадение. Сравнить-то мы сравнили, нашли совпадение, но это не совсем корректное решение, это эмпирический[1] результат, мы же это понимаем. Ответ без обоснованного решения. Он ничего нам не дает.

И Евклид это понимал.

Более того, он прекрасно понимал, что без применения дробей задача «о крайнем и среднем…» вообще решения не имеет, из-за этого самого числа ***а = ф*ф = 1-ф*** …

Потому, у Евклида никакого вычислительного решения и нет. Но …

[1] **Эмпирический** - опытный, полученный опытным путём…

Решение есть.

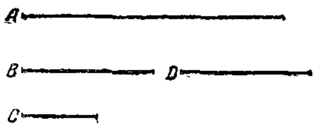
Геометрическое…

Смотрим Предложение 6.17. в «Началах» Евклида.

Вот оно, в изложении Д.Д.Мордухай-Болтовского [1]:

Предложение 17

Если три прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней; и если прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней, то три прямые будут пропорциональны.



Черт. 18.

Пусть три прямые A, B, C пропорциональны: как A к B, так и B к C (черт. 18); я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между A и C, равен квадрату на B.

Отложим D, равную B.

И поскольку будет, что как A к B, так и B к C, а B равна D, то значит, будет, что как A к B, так и D к C. Если же четыре прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними (предложение 16). Значит, прямоугольник между A, C равен прямоугольнику между B, D. Но прямоугольник между B, D есть квадрат на B; ибо B равна D; значит, прямоугольник, заключённый между A, C, равен квадрату на B.

Но вот пусть прямоугольник между A, C будет равен квадрату на B; я утверждаю, что как A к B, так и B к C.

Действительно, после тех же построений, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между A, C равен квадрату на B, но квадрат на B есть ⟨прямоугольник⟩ между B, D (ибо B равна D), то значит, прямоугольник между A и C равен прямоугольнику между B и D. Если же прямоугольник между крайними равен прямоугольнику между средними, то эти четыре прямые пропорциональны (предложение 16). Значит, будет, что как A к B, так и D к C. B же равна D; значит, как A к B, так и B к C.

Значит, если три прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней; если прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней, то три прямые будут пропорциональны, что и требовалось доказать.

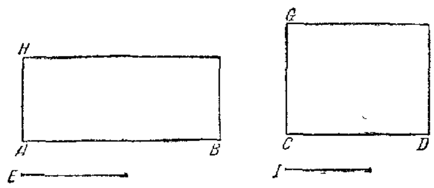
А теперь и Предложение 6.16., т.к. оно появилось в предыдущем тексте:

Предложение 16

Если четыре прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними; и если прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними, то эти четыре прямые будут пропорциональны.

Пусть будут четыре пропорциональные прямые AB, CD, E, I — как AB к CD, так и E к I (черт. 17); я утверждаю, что прямоугольник, заключённый между AB, I, равен прямоугольнику, заключённому между CD, E.

[Действительно], проведём из точек A, C прямые AH, CG под прямыми углами к AB, CD и отложим AH, равную I, а CG, равную E. И дополним параллелограммы BH, DG.



Черт. 17.

И поскольку будет, что как AB к CD, так и E к I, E же равна CG, а I равна AH, то значит, будет, что как AB к CD, так и CG к AH. Значит, у параллелограммов BH и DG стороны при равных углах обратно пропорциональны. Из равноугольных же параллелограммов равны те, у которых стороны при равных углах обратно пропорциональны (предложение 14); значит, параллелограмм BH равен параллелограмму DG. И BH есть прямоугольник, заключённый между AB, I, ибо AH равна I; а DG ⟨прямоугольник⟩ между CD, E, ибо E равна CG; значит, прямоугольник, заключённый между AB, I, равен прямоугольнику, заключённому между CD, E.

Но вот пусть прямоугольник, заключённый между AB, I, равен прямоугольнику, заключённому между CD, E; я утверждаю, что эти четыре прямые пропорциональны как AB к CD, так и E к I.

Действительно, после тех же построений, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между AB, I равен ⟨прямоугольнику⟩ между CD, E, и ⟨прямоугольник между⟩ AB, I есть BH, ибо AH равна I, ⟨прямоугольник⟩ же между CD и E есть DG, ибо CG равно E, то значит, BH равен DG. И они равноугольны. В равных же и равноугольных параллелограммах стороны при равных углах обратно пропорциональны (предложение 14). Значит, будет, что как AB к CD, так и CG к AH. CG же равна E, а AH равна I; значит, будет, что как AB к CD, так и E к I.

Значит, если четыре прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними, и если прямоугольник, заключённый между крайними, равен прямоугольнику, заключённому между средними, то эти четыре прямые будут пропорциональны, что и требовалось доказать (25).

Тут вам и «крайнее», и «среднее»…

А в соседних задачах, этих «крайних» и «средних», … как гуталина, на гуталиновой фабрике, … в разных вариациях, каких только нет. Сравнивайте свои варианты ответов.

Нашли мы ответ в этой задаче?

И напоследок…

А и Б сидели на трубе. А упало, Б – пропало. Кто остался на трубе?

Всё, как у нас.

Одна задача, данная как Предложение 2.11. звучит так:

«Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке».

Решение доказывает ***равенство этих площадей***. Всё.

Вторая задача из определения 6.3.:

«… прямая делится в крайнем и среднем отношении, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему.»

Решение представлено в Предложении 6.17.

О пропорциональности. Вот вывод:

> Значит, если три прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней; если прямоугольник, заключённый между крайними, равен квадрату на средней, то три прямые будут пропорциональны, что и требовалось доказать.

И опять – всё.

Ну и где же Золотое Сечение? Хоть в каком-нибудь *явном виде*…

Мы хотим видеть Число.

То самое – хоть само число ***Ф***, хоть пропорцию ***Ф= 1/ф =ф/а…***, но … его нет.

И решения нет.

И не было.

Тогда, во времена Евклида, во всяком случае…

Мне скажут, как же, а Предложения 6.16. и 6.17? Это же, как раз, надо только построить пропорцию…

Такое же решение есть и в 2.11. Надо только построить…

Но не строит Евклид эту пропорцию. И не решает. Почему?

Потому, что для него такой задачи нет.

Теперь можно точно сказать, Евклид, ни о каком Золотом Сечении, в любом виде, даже не задумывался. Евклид задачу ЗС не ставил и не решал. Он вообще о ней не думал.

Как мы убедились, для Евклида этого числа не было, и быть не могло. Он свою математику знал хорошо.

И не обрати внимание Лука Пачоли на это определение «о крайнем и среднем», … знали бы мы о «божественной» пропорции?

Что-то я в этом уже сомневаюсь ...

Правда, остаются еще «платоновы тела». Надо бы там поискать число Ф в *явном виде*, как пропорцию или отношение. Но это уже в другой раз…

г. Екатеринбург.

Июль 2013г.

Литература

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.