А.В.Никитин

О понимании Золотого Сечения.

Странное дело, почему мы считаем, что во все времена люди думали так же и теми же понятиями, как и мы сейчас? С другой стороны, почему мы считаем, что в совсем недалеком прошлом люди ничего не знали, чуть ли не шкурах мамонта бегали и два слова связать не могли? Откуда такие крайности?

Ф.Виет решал уравнения 43-ей степени, а алгебры еще не было. Попробуйте это повторить, даже при наличии сегодняшних знаний математики, но только с карандашом в руках, а не с калькулятором или компьютером. Как оно, … получается?

С другой стороны, Евклид, как и другие математики Древней Греции, не знали многих очевидностей сегодняшней математики. Но от этого, как мне кажется, они не должны восприниматься, как «неандертальцы» в современной математике. Думали они не хуже нас, а чаще и много лучше…, и видели не меньше, да часто сказать еще не могли, терминов нужных не было. Вот и появлялись «недосказанные» задачи. Как « о крайнем и среднем»…

Мы все, наверное, хорошо понимаем, что в современной теории и философии ЗС математики все-таки не так много, как мы о том говорим. Больше исторических наслоений и философских направлений и пониманий, чем сухой и практичной науки.

Потому, тем более непонятно, почему мы современной математикой пытаемся решить старинные исторические и философские проблемы.

Не могли математики Древней Греции решать квадратные уравнения и выводить точное значение иррациональных чисел $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\phi}$. Они этого еще просто не знали.

Тогда почему мы всю математику ЗС свели к квадратному уравнению и замкнули на «металлические» пропорции и, почему-то дискретные, гиперболические функции?

В чем здесь развитие философии и, тоже во многом исторической, теории Гармонии?

В сегодняшней теории ЗС первыми, все же идут история и философия, и только потом – математика. Почему?

Потому, что свой путь в этом направлении математика исторически, в основном, уже прошла. В математике Евклида, в платоновых телах, как основе философии мироздания того времени. И уж тем более в квадратных уравнениях…

Но это никак не умаляет заслуг древних философов и математиков в решении задач ЗС. Вот об этом и пойдет далее разговор…

О крайнем и среднем.

Захотелось снова заглянуть в «Начала Евклида» [1] , чтобы еще раз оценить вариант понимания С.Л.Василенко задачи «о крайнем и среднем» [3]. Как мне показалось, это маленькое открытие в понимании этой задачи.

Но, давайте по порядку…

Сначала слово главным специалистам [6]:

Предложение II.11 «Начал» Евклида. В «Началах» Евклида мы встречаемся с задачей, которая в дальнейшем сыграла большую роль в развитии науки. Речь идет о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении». В «Началах» Евклида эта задача встречается в двух формах.

Первая форма сформулирована в виде Предложения 11 Книги II «Начал» Евклида.

Предложение II. 11. Данную прямую AD разделить на две неравные части AF и FD так, чтобы площадь квадрата, построенного на большем отрезке AF , равнялась бы площади прямоугольника, построенного на отрезке AD и меньшем отрезке FD.

Вникнем в суть этой задачи. Для этого изобразим эту задачу геометрически (Рис.1).

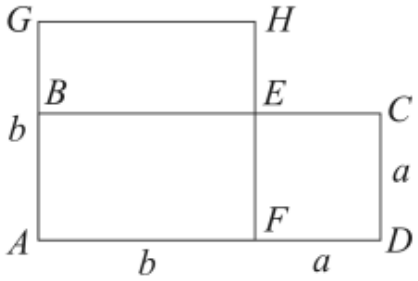

Рисунок 1. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении.

Таким образом, согласно Предложению II. 11, площадь квадрата AGHF должна быть равна площади прямоугольника ABCD. Если обозначить длину большего отрезка AF через b (она равна стороне квадрата AGHE), а сторону меньшего отрезка через a (она равна вертикальной стороне прямоугольника ABCD), то условие Предложения II. 11 можно записать в виде:

$$в^2 = а\times(а+в) \qquad 1$$

…

Вторая форма вытекает из первой, задаваемой выражением (1), если проделать следующие преобразования. Разделив обе части выражения (1) вначале на ***а***, а затем на ***b***, получим следующую пропорцию:

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} \qquad 2$$

Разделим отрезок *AB* точкой *C* в таком отношении, чтобы большая часть отрезка *CB* так относилась к меньшей части *AC*, как отрезок *AB* к своей большей части *CB* (**Рис. 2**), то есть:…

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}. \qquad 3$$

Это и есть определение золотого сечения, используемое в современной науке.

Пропорция (2) имеет следующую геометрическую трактовку (Рис. 2).

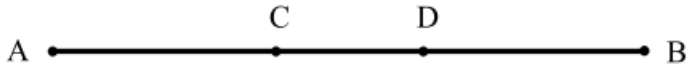

Рисунок 2. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении (золотое сечение).

Обозначим пропорцию (3) через x.

… откуда вытекает следующее алгебраическое уравнение для вычисления искомого отношения x:

$$x^2 - x - 1 = 0. \qquad 4$$

Всё. По крайней мере, основное сказано…

Напомню, разговор шел о трактовании задачи «о крайнем и среднем».

Где тут «крайнее» и где «среднее»?

Для чего введена точка D? В тексте её нет.

Насколько мы видим, с 2009 года, момента последней публикаци [7] этого автора по данному вопросу, трактовка и понимание в публикации [6] вдруг изменилась весьма основательно.

Теперь описание и формулировка С.Л.Василенко, сделанные им в работе [2] за полгода до публикации работы [6]:

Первая форма связана с традиционным для того времени отношением и равенством площадей [2, с. 75]:

Предложение 2.111. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

Необходимые пояснения и комментарии можно найти в статье [2].

Мы их воспроизведем и эти пояснения [2]:

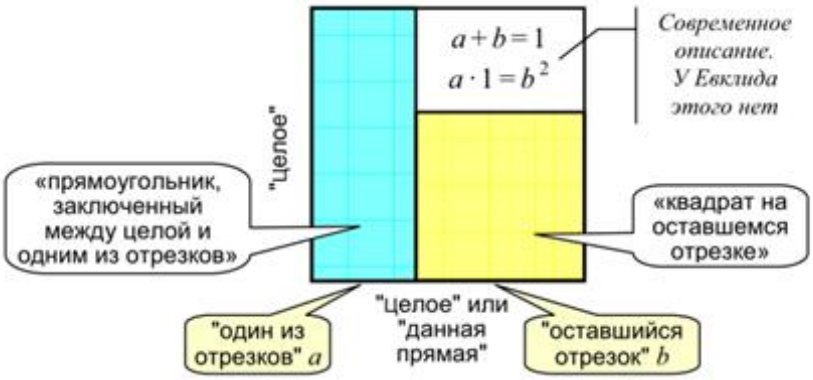

Рис.3.Геометрическая интерпретация предложения 2.11. Евклида.

«данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке»

Интересно, если построить прямоугольник на большем отрезке, а квадрат достроить на меньшем…. Как обеспечить их «равность»?

Мы, вроде, специально не говорим, где «большая» или «меньшая» часть «целой» прямой. А получается, что решение, все равно и в любом случае, одностороннее. Только с «большей» стороны можно строить квадрат, а с «меньшей» – прямоугольник.

Разобрались.

И потому, мы переходим ко второй форме[4]:

Вторая форма известна как задача деления отрезка в крайнем и среднем отношении.

Первое её описание звучит так:

Определение 3.6. Говорится, что прямая делится в крайнем и среднем отношении, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [2, с. 173].

Осмысление понятий "крайнего отношения" и "среднего отношения" изложено в работе [3].

… Как писали математики Древней Индии «Смотри!» (рис. 4).

Рис. 4. Понятийный смысл терминов "крайнего и среднего отношений" в интерпретации точки сопряжения.

На этом цитирование можно закончить. Главное сказано. Точно и емко.

Вот этим рисунком 4.

Теперь попробуем понять…

Кстати, рисунок 4. очень наглядно показывает, как именно надо понимать классическую формулировку «о крайнем и среднем».

«Крайнее» отношение «целого» к своей «большей» части - ***1/ф***, равно «среднему» отношению частей, «большей» к «меньшей» - ***ф/а***.

Это можно записать так:

$$1/ф = ф/а = Ф; \qquad (5)$$

Таким образом, в определении, которое приводит Евклид, если читать так, как написано, фигурируют «целое», как ***1***, «большая» часть ***ф***, «меньшая» часть ***а***, и их общее расчетное отношение - ***Ф*** ...

Вот из этой формулы число ***Ф*** и получает название Божественной Пропорции в работах Луки Пачоли. Позже это же выражение ***Ф=1/ф*** стало основным пониманием «золотого

сечения» с начала 19 века. При этом ***ф*** остается «большей» частью какого-то «целого».

Решим пропорцию 5):

$$1*a = ф*ф \qquad 6)$$

Только сейчас мы узнаем, что $a=ф^2$;

Мы стараемся понимать так, как понимали это решение во времена Евклида. Решение пропорции здесь воспринимается, как равенство площадей. Покажем это на рис.5.

И сразу сталкиваемся с первой «непонятностью»…

Смотрим на рис.1., потом на рис.3., и теперь на рис.5.:

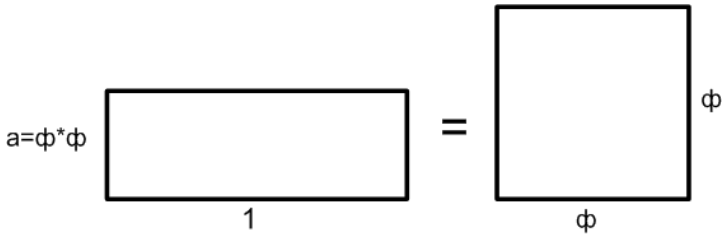

Рис.5. Равенство площадей, где $a=ф*ф$ – высота прямоугольника и квадрат $S_{кв}=ф*ф$

Древние греки еще не могут записать *квадрат дроби* одним числом. Это умеем мы. А им надо было найти число, эквивалентное $a = ф*ф$.

Они его нашли:

$$a= ф*ф =1-ф \qquad 7)$$

Вот это, наверное, был шок…

Площадь квадрата $S= ф*ф$ и длина отрезка $a = ф*ф$ (см. рис. 3.) для древних греков не сопоставлялись, как одно и тоже. Но они же видели этот факт…

Как нашли? Да, скорее всего, вот так:

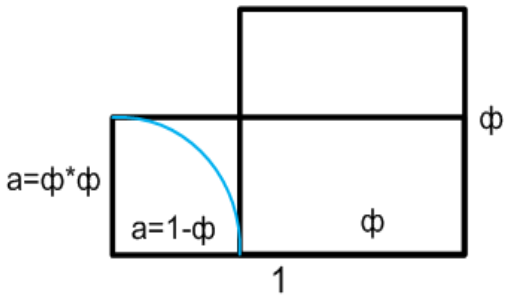

Рис.6. Получение 1-ф.

Простым наложением сравниваемых площадей и одним поворотом циркуля. Разница оснований оказывается равной высоте a….

Увидели? Рис. 1. очень напоминает этот рисунок. Видимо ход мыслей и во времена Евклида мог быть тот же…

Но вот дальше рисунка, и формул 1 и 2, профессионалы почему-то не пошли. Классика есть, математика соблюдена. Причем тут уже Евклид, когда есть стандартное квадратное уравнение 4?

А мы продолжим…

Число $a=1-ф$, численно равное площади $S_{квадрата}=ф*ф$, просто обязано быть уникальным. И это надо было зафиксировать в «Началах» Евклида.

Но как записать то, что пока никак не называется?

Кстати, рис.6. показывает и появление свойства фрактальной бесконечности по вертикали достройки. Как это происходит, показано на рис.7.

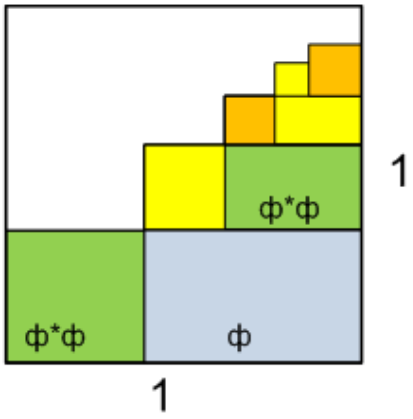

Рис.7. Фрактальность ЗС.

Понятно, что по вертикали построения появляется сумма ряда :

$$\lim \sum_{n=1}^{n\to\infty} (\phi^1 - \phi^3) + (\phi^2 - \phi^4) + \cdots + (\phi^n - \phi^{n+2}) = (\phi + \phi^2) = 1 \qquad 8)$$

Это рост «стопки» из вложенных квадратов по правому краю единичного квадрата.

Разных проявлений фрактальности на этом рисунке можно найти много.

Например:

$$\lim \sum_{n=2}^{n\to\infty} \phi^n = (\phi + \phi^2) = 1 \qquad 9)$$

Это изменение размера квадратов по диагонали, из левого нижнего в правый верхний угол единичного квадрата.

Конечно, во времена Евклида показать и доказать такое вряд ли представлялось возможным…, но ведь что-то подобное предположить они вполне могли.

Вот и появилась странная «недосказанная» задача «о крайнем и среднем», о пропорции, содержащей уникальное число. Какое?

Как потом оказалось, все отношения в этой пропорции уникальны.

Правда, это стало понятно много позже…

О числе Ф.

Мы сегодня считаем, что уникально число ***Ф***….

Напомним, что ***Ф***, это отношение «целого к его большей части»…и «большей части к меньшей», именно так, как написано у Евклида [1]. Это же число ***Ф*** и было, очевидно, названо «божественной пропорцией» в трудах Луки Пачоли [5]. В описании пропорции Лука Пачоли следует по пути Евклида и его задачи «о крайнем и среднем».

Отношение ***Ф=1/ф*** вместе с ***Ф=ф/а*** составляют исходную математическую пропорцию ***1/ф=ф/а,*** которую потом перевели в квадратное уравнение и вычислили численное значение

$\boldsymbol{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; и $\boldsymbol{\Phi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$;

Странно, но сегодня ***Ф***, как константа Золотого Сечения действует только в русскоязычной литературе. Европа и США считают, что «золотая пропорция» это ***ф*** или ***λ***?

И для них, видимо, не факт, что там написали Евклид и Лука Пачоли…, у них своя философия Гармонии и понимание «золотой» пропорции.

Почему?

Потому, что мы, как и древние греки, исторически понимаем количество, как число, больше 1, а дробь, это *часть целого*, что-то меньше 1. Почти автоматически, на уровне подсознания. И потому, число, отражающее *важное соотношение*, «обязано быть больше 1».

По этой причине у нас, как у Евклида и Пачоли ***Ф=1/ф.***

В Европе и Америке же, если пропорция (*отношение*), то это - дробь, а значит, она должна быть меньше 1, по той же причине, как часть целого. И потому, там основное число «золотой» пропорции - ***ф.***

Мне кажется, что греческое понимание этого отношения, записанное в «Началах» Евклида более точно отражает его смысл и позволяет широко трактовать его философию.

А нам это, например, дает возможность сравнить два подхода к его философскому пониманию, выраженному в формулах получения числа ***Ф***:

$$Ф=1/ф; \qquad 10)$$

И второе

$$Ф=1+ф; \qquad 11)$$

Здесь надо бы заметить, что историческое понимание «правильной» формулы менялось в веках неоднократно. В одном случае считалось «хорошим тоном» выводить конечную формулу в виде суммы. Например, хорошо известная формула Пифагора: $a^2 + в^2 = c^2;$

Потом, например, в средние века, да и сейчас, «правильной» формулой считается отношение или произведение. Мы это прекрасно знаем, как ***S=v*t; J=U/R;*** и т.д.

И исторически понятно, почему сегодня формула 10) стала основной в понимании ЗС, а формула 11) «ушла в тень». В середине 19 века по «правильной» формуле 10) Мартином Омом [5] был придуман термин «золотое сечение». Вот с тех пор и «сечем»… мы - в «Золотом Сечении», Европа – в «золотой» пропорции...

А до этого пропорция была - «божественная».

Но, если уж мы относим ЗС к развитию Природы и её Гармонии, то неплохо бы обратить внимание и на формулу 11), как формулу «роста и развития» [4].

Потому, что мы уже и сегодня видим, философия филлотаксиса, золотой спирали, и тем более золотого шофара, не соответствует философии сечения и деления.

Но мы, упорно, о своем…

В работе [4] показан иной подход. Он противоположен подходу на основе деления, сечения и отношения частей. Новый подход говорит о росте и развитии, о целостности.

В его основе, как раз, «неправильная» формула 11).

Почему мы развиваем только математику Гармонии, если нужна философия для этой математики? О какой Гармонии мы говорим?

Вообще, о Гармонии. Об эстетическом понимании Гармонии. О математической Гармонии…. О чем?

Если одна формула 10) способна была создать целую философию Золотого Сечения, то к формулам и их философии, особенно таким, надо относиться с большим уважением.

Тогда почему мы так просто «смахнули с доски» целую философию А.А.Татаренко?

Я напомню, сейчас мы не о математике, а о философии. Это чтобы не вспоминались формулы «металлических» пропорций и «затравочных» чисел, и их приоритетность. У этой философии никаких аналогов нет. И лидер тут один.

Тогда, что же такое Золотое Сечение? Философия, математика или политика?

г.Екатеринбург
Июль 2013г

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
2. Василенко С.Л. «Золотой разговор» с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009.
3. Василенко С.Л. Незадачливые *p*-сечения // Математ. и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. http://www.artmatlab.ru/templates/text/r_display/editor/ac50/ns01.pdf
4. С.Л. Василенко, А.В. Никитин, От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.17972, 07.04.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2094-vsnik.pdf
5. Никитин А.В., История Золотого Сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16744, 11.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02321007.htm
6. НАУКОВЕДЕНИЕ. ИНТЕРНЕТ-ЖУРНАЛ №4 (13) 2012 http://naukovedenie.ru/index.php?p=issue-4-12
7. А.П. Стахов, «Деление отрезка в крайнем и среднем отношении» и «золотое сечение» - это одна и та же задача? Знали ли Пифагор, Платон и Евклид о «золотом сечении»? // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15651, 13.11.2009 http://trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321179.htm
8. Никитин А.В., О Гармонии и Золотом Сечении// «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16701, 31.07.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161866.htm