

## БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМНОЙ ГАРМОНИИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Вводимые уравнения весьма интересны не только обнаружением в их решениях большого числа соотношений гармонии, точно выражающихся через фундаментальные математические константы, прежде всего,  $\pi$  и константы золотого сечения  $\phi = (-1 + \sqrt{5})/2$  и  $\varphi = 1 + \phi = 1/\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ , Анализ полученных соотношений позволяет ввести обобщённые геометрические модели инвариантных (в т.ч. золотых) сечений. Отметим также обнаружение и объяснение парадокса комплексных чисел, состоящего в том, что данные уравнения формально имеют решения с комплексным модулем у комплексных чисел.

Итак, будем называть базовыми уравнениями системной гармонии для комплексных чисел, следующие два типа уравнений:

$$|W_{\pm}| = |z \pm b / z| = a, \quad z = x + i \cdot y = \rho \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad (1),$$

где параметры  $a, b$  любые действительные числа, большие нуля.

Умножая и деля второе слагаемое под знаком модуля на  $(x - i \cdot y)$  в случае алгебраической записи числа  $z$  и на  $(\cos \alpha - i \cdot \sin \alpha)$  в случае тригонометрической записи получим следующие уравнения:

$$\left| (x \pm xb / (x^2 + y^2) + i \cdot (y \mp yb / (x^2 + y^2)) \right| = a \quad (2)$$

$$[x \pm xb / (x^2 + y^2)]^2 + [y \mp yb / (x^2 + y^2)]^2 = a^2 \quad (3)$$

$$|(\rho \pm b / \rho) \cos \alpha + i \cdot (\rho \mp b / \rho) \sin \alpha| = a \quad (4)$$

$$(\rho \pm b / \rho)^2 \cos^2 \alpha + (\rho \mp b / \rho)^2 \sin^2 \alpha = a^2 \quad (5)$$

$$\rho^4 - (a^2 \mp 2b \cos 2\alpha) \rho^2 + b^2 = 0 \quad (6)$$

Дискриминант (6) для знака "+"  $D \geq 0$  при  $\cos \alpha \leq a^2 / 2b - 1$ . Для знака "-"  $D \geq 0$  при  $\cos \alpha \geq 1 - a^2 / 2b$ . Учитывая, что  $\rho \cdot \cos \alpha = x$ ,  $\rho \cdot \sin \alpha = y$ ,  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$ , проведём детальный анализ уравнения (6), которое можно привести к следующим уравнениям (7), (8):

$$\rho^4 - (a^2 + 2b)\rho^2 + 4bx^2 + b^2 = 0 \quad \text{для знака "+"} \quad (7)$$

$$\rho^4 - (a^2 + 2b)\rho^2 + 4by^2 + b^2 = 0 \quad \text{для знака "-" } \quad (8)$$

Корни уравнения (7) записываются в виде

$$\rho_{I,II}^2 = (a^2 + 2b) / 2 \pm \sqrt{(a^4 + 4a^2b) / 4 - 4bx^2} \quad (9)$$

Из уравнений (9) следует, что  $\rho_{\max}^2 = \rho_I^2 = (a^2 + 2b + \sqrt{a^4 + 4a^2b}) / 2$ ,  $\rho_{\min}^2 = \rho_{II}^2 = (a^2 + 2b - \sqrt{a^4 + 4a^2b}) / 2$  при  $x = \rho \cdot \cos \alpha = 0$ , т. е. при  $\cos \alpha = 0$ ,  $\cos 2\alpha = -1$ ,  $\alpha = \pi / 2 + n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Аналогично, для уравнения (8) получим:

$$\rho_{I,II}^2 = (a^2 + 2b) / 2 \pm \sqrt{(a^4 + 4a^2b) / 4 - 4by^2} \quad (10)$$

При этом из (10) следует, что для знака "-" в (1) получаем те же значения  $\rho_{\max, \min}^2$ , что и полученные выше значения  $\rho_{\max, \min}^2$  для знака "+", но уже при  $y = \rho \cdot \sin \alpha = 0$ , т.е. при  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos 2\alpha = 1$ ,  $\alpha = n\pi$ .

Таким образом, графические зависимости  $\rho(\alpha)$  для уравнения (1) со знаком "-" можно получить из графических зависимостей  $\rho(\alpha)$ , получаемых для (1) со знаком "+". при сдвиге в декартовой системе координат графиков  $\rho(\alpha)$  на  $\pi / 2$  или при их повороте в полярной системе координат на  $90^0$ . В этой связи далее будем анализировать лишь уравнение (1) со знаком "+".

Итак, иаксимальные и минимальные значения модуля комплексного числа  $\rho$  для уравнений (1) определяются выражениями:

$$\rho_{\max, \min} = \sqrt{a^2 + 2b \pm \sqrt{a^4 + 4a^2b}} / \sqrt{2} \quad (11)$$

Для упрощения выражений (10), используем следующее тождество:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} \equiv (\sqrt{A + \sqrt{A^2 - B}} \pm \sqrt{A - \sqrt{A^2 - B}}) / \sqrt{2}, \quad A^2 \geq B \quad (12)$$

В итоге из (11) при  $A = a^2 + 2b$ ,  $B = a^4 + 4a^2b$  получим:

$$\rho_{\max, \min} = (\pm a + \sqrt{a^2 + 4b}) / 2, \quad \rho_{\max} \cdot \rho_{\min} = b \quad (13)$$

Из (13), во-первых, следует, что при  $a = 1$ ,  $b = 1$   $\rho_{\max, \min}$  равны «обычным» константам золотого сечения:  $\rho_{\max} = \varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ ,  $\rho_{\min} = \phi = (-1 + \sqrt{5}) / 2$  !

Во-вторых, при  $a = m$  ( $m \geq 1$  - целое число) и  $b = 1$  соотношениям (13) можно сопоставить квадратное уравнение, вытекающее из следующего обобщённого определения золотого сечения.

Итак, пусть некоторый отрезок состоит из  $m$  одинаковых отрезков длиной  $d$  и ещё одного отрезка длиной  $c < d$ , тогда из пропорции  $(md + c) / d = d / c$ , являющейся при  $m = 1$  классической золотой пропорцией, следует уравнение  $d^2 = mcd + c^2$ . Полагая в этом уравнении длину отрезка  $d = 1$  (в выбранной системе единиц) получим уравнение  $c^2 + mc - 1 = 0$ , одним из корней которого является  $c = (-m + \sqrt{m^2 + 4}) / 2 = \rho_{\min} = 1 / \rho_{\max}$  при  $b = 1$ .

В случае  $b = k \geq 1$  введём следующее обобщение золотой пропорции  $(md + c) / d = kd / c$ , из которой получаем уравнение  $c^2 + mdc - kd^2 = 0$ . Вновь полагая  $d = 1$  получим уравнение  $c^2 + mc - k = 0$ , одним из корней которого является  $c = (-m + \sqrt{m^2 + 4k}) / 2 = \rho_{\min} = k / \rho_{\max}$  при  $b = k$ .

Далее в данной статье рассмотрим наиболее «простые» свойства решений уравнения (1) для знака "+" и  $a = b = 1$ .

Прежде всего, укажем, что в области действительных чисел  $x$  уравнение  $|x + 1/x| = 1$  решений не имеет, так как несложно показать, что  $|x + 1/x| \geq 2$ .

Для комплексных чисел  $z$  из (3)-(6) получаем следующие зависимости:

$$\rho_{1,2}(\alpha) = \sqrt{1 - 2\cos(2\alpha) \pm \sqrt{(1 - 2\cos(2\alpha))^2 - 4}} / \sqrt{2} \quad (14)$$

$$\rho_{3,4}(\alpha) = -\sqrt{1 - 2\cos(2\alpha) \pm \sqrt{(1 - 2\cos(2\alpha))^2 - 4}} / \sqrt{2} \quad (15)$$

$$x_{1-4}(\alpha) = \rho_{1-4}(\alpha) \cdot \cos(\alpha), \quad y_{1-4}(\alpha) = \rho_{1-4}(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \quad (16)$$

$$\rho_{1-4}(x) = \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{5 - 16x^2}} / \sqrt{2}, \quad (17)$$

Графики зависимости левых частей (1) для  $a = b = 1$  и знака "+"  $W_{1-4}(\alpha) = |z_{1-4}(\alpha) + 1/z_{1-4}(\alpha)|$ , где  $z_{1-4}(\alpha) = \rho_{1-4}(\alpha) \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$ , показаны на рис. 1, 2.

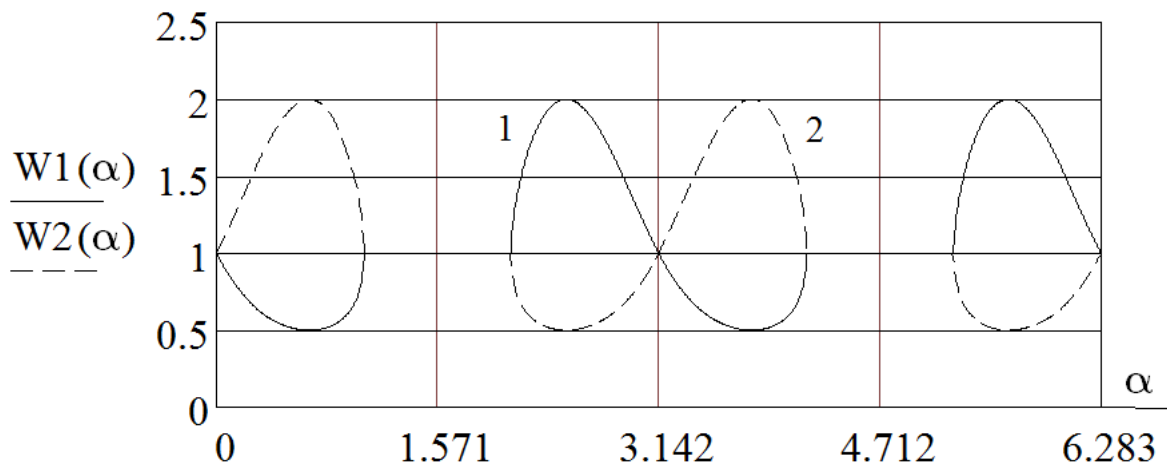


Рис. 1

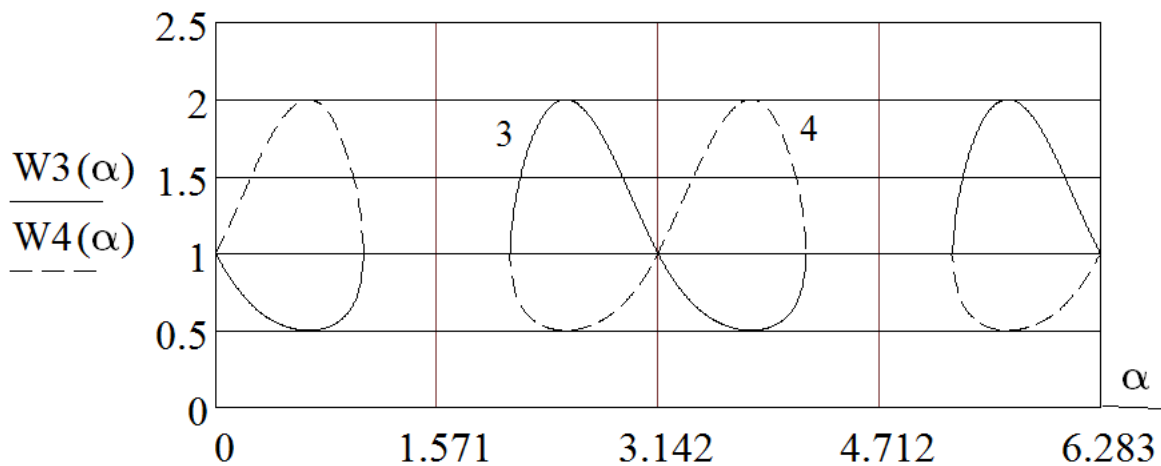


Рис. 2

Графики зависимостей модулей  $|\rho_{1-4}(\alpha)|$ , действительных  $\text{Re}(\rho_{1-4}(\alpha))$  и мнимых  $\text{Im}(\rho_{1-4}(\alpha))$  частей модулей комплексных чисел  $\rho_{1-4}(\alpha)$  показаны на рис. 3,4. Кривые на рис. 3, 4 пронумерованы в порядке их записи на этих рисунках = сверху вниз.

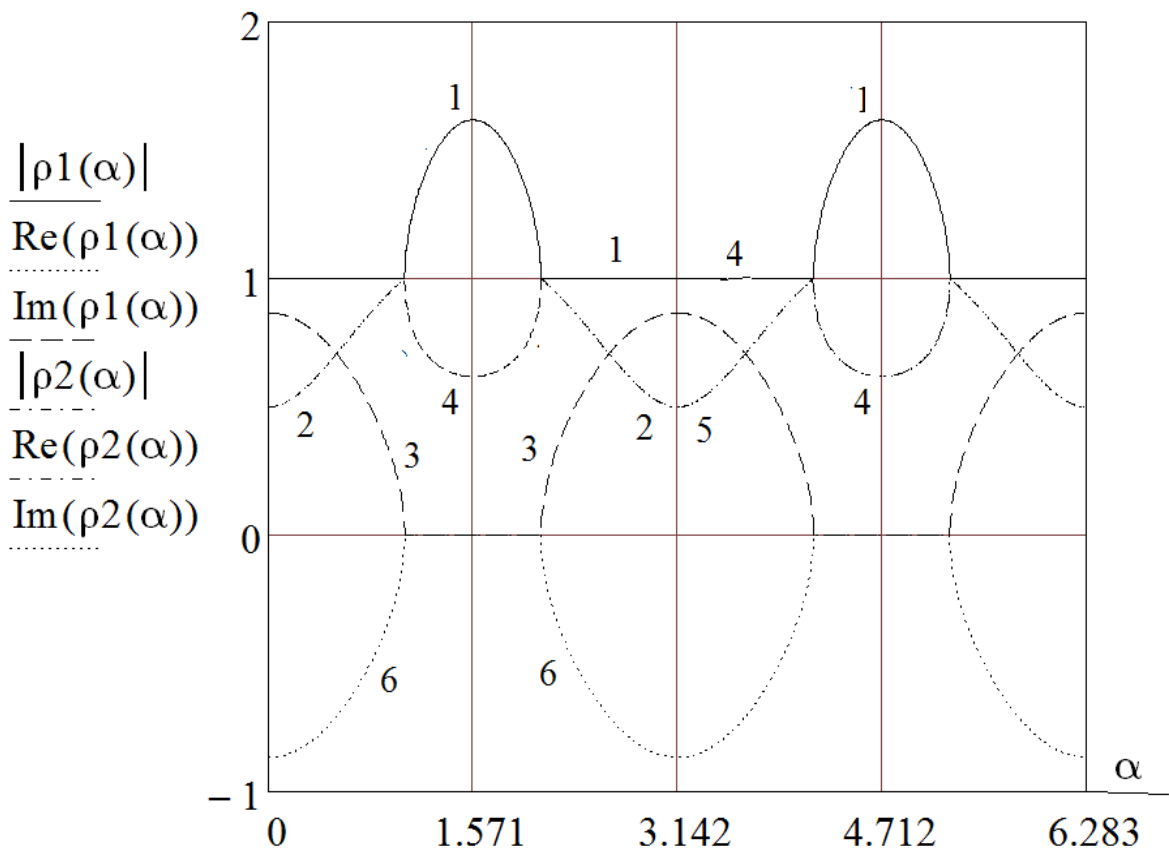


Рис. 3

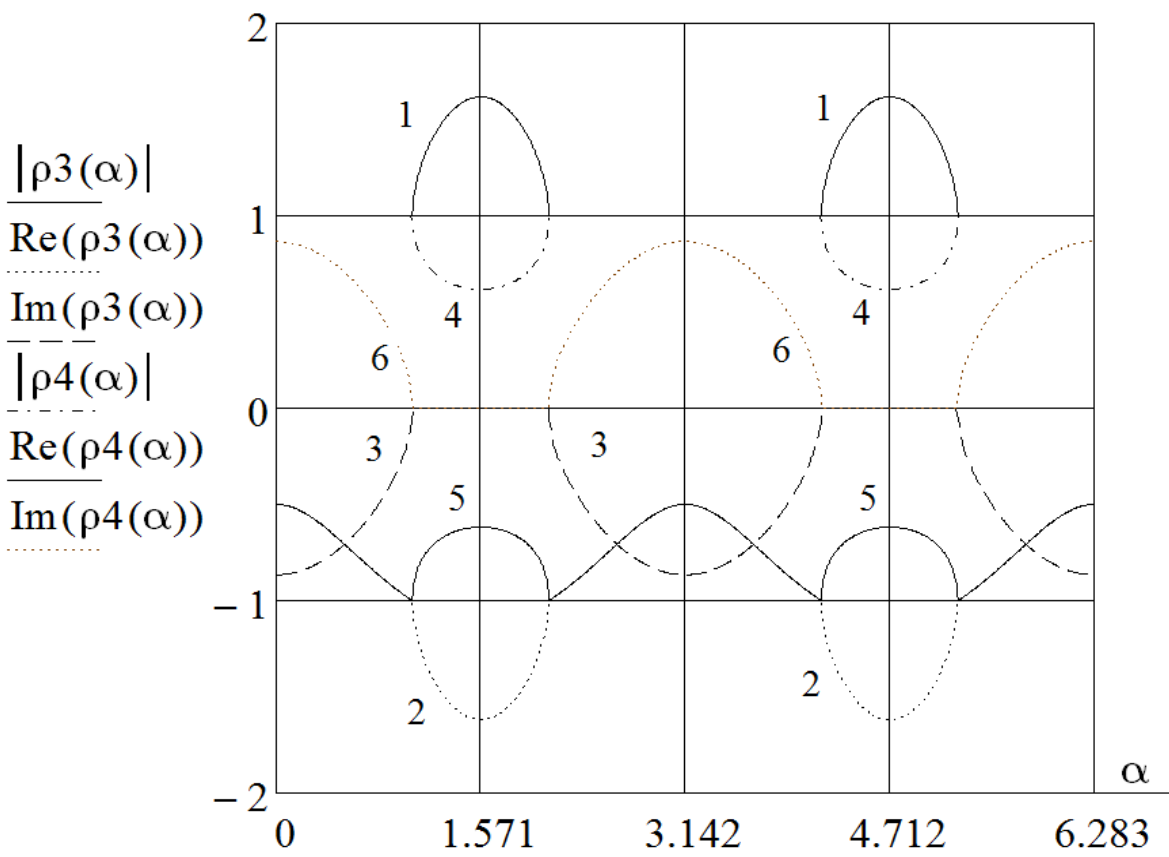


Рис. 4

Из рис. 1-2 следует, что на периоде изменения функций  $W_{1-4}(\alpha)$   $\Delta\alpha = \pi$  эти функции равны 1 как при действительных модулях  $\rho$  для всех  $\alpha$  в областях  $\pi/3 + n\pi \leq \alpha \leq 2\pi/3 + n\pi$ , так и при комплексных (!) модулях  $\rho$  при  $\alpha = n\pi$

Однако это формальное противоречие определению модуля комплексных чисел  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$  снимается при учёте того, что в комплексных числах  $z_{1-4}(\alpha) = \rho(\alpha) \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$  от  $\alpha$  зависит также фазовый множитель  $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$ . В итоге одно и то же комплексное число формально может быть обозначено по разному.

Напр., согласно (14)  $\rho_1(0) = (1 + i \cdot \sqrt{3}) / 2$  - комплексное число, поэтому  $z_1(0) = \rho_1(0) \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin(0)) = (1 + i \cdot \sqrt{3}) / 2$ , В то же время также согласно (14)  $\rho_1(\pi/3) = 1$  и  $z_1(\pi/3) = \rho_1(\pi/3) \cdot (\cos \pi/3 + i \cdot \sin(\pi/3)) = (1 + i \cdot \sqrt{3}) / 2$ ,  $z_1(0) = z_1(\pi/3)$  и  $W_1(0) = W_1(\pi/3) = 1$ .

Аналогично, несложно показать, что  $\rho_1(\pi) = (1 + i \cdot \sqrt{3}) / 2$ ,  $\rho_1(4\pi/3) = 1$  и  $z_1(\pi) = z_1(4\pi/3) = -(1 + i \cdot \sqrt{3}) / 2$ ,  $W_1(\pi) = W_1(4\pi/3) = 1$ . Таким образом, в данном случае комплексные числа с комплексным модулем сводятся к «обычным» комплексным числам с действительным модулем  $\rho \geq 0$ , и указанный в начале статьи парадокс комплексных чисел успешно разрешён.

Перейдём теперь к анализу соотношений гармонии, следующих из рис. 1-6. Подчеркнём, что эти рисунки можно назвать магическими, так как множество характерных, в частности, экстремальных значений решений уравнений точно выражается через фундаментальные математические константы  $\pi, \phi, \varphi$  !!

Максимумы и минимумы функций  $W_{1-4}(\alpha)$  ( см. рис. 1, 2 ), равные соответственно  $2 = \phi \cdot \varphi + \varphi \cdot \phi$  и  $1/2 = \phi \cdot \varphi / (\phi^2 + \varphi^1)$  имеют место при  $\alpha = \arccos(1/4) / 2 \approx 0,659\ 058$  и  $\alpha \approx \pi - \arccos(1/4) / 2$ . При этом  $4 = \varphi^3 - \phi^3$ . Диапазон же изменения этих функций  $\Delta W_{1-4} = 3/2 = (\phi^2 + \varphi^2) / (\phi^2 + \varphi^1)$ .

Более того, оказалось, что даже площади криволинейных фигур под графиками функций  $W_{1-4}(\alpha)$  выражаются через константы  $\phi, \varphi$ . Так, напр.,

$$\int_0^{\pi/3} W_{2,4}(\alpha) d\alpha = \sqrt{3} = \sqrt{\phi^2 + \varphi^2}, \text{ а } \int_0^{\pi/3} W_{1,3}(\alpha) d\alpha \approx \arccos(1/4)/2 !$$

Как следует из рис. 3, 4 и расчётов функции  $\rho_{1-4}(\alpha)$  и  $y_{1-4}(\alpha)$  действительны при  $\pi/3 + k\pi \leq \alpha \leq 2\pi/3 + k\pi$ . Функции же  $\rho_{1-4}(x)$  и  $y_{1-4}(x)$  действительны при  $-(\phi + \varphi)/4 \leq x \leq (\phi + \varphi)/4$ .

Далее, на этих рисунках максимальные значения ординаты замкнутой фигуры равны  $\varphi$ , минимальные  $\phi$ , а их высота равна  $\varphi - \phi = 1$ .

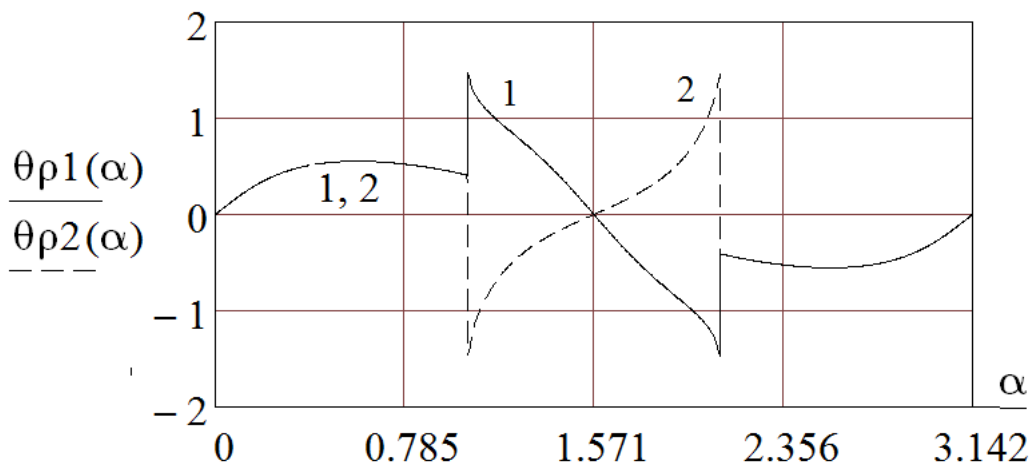


Рис. 5

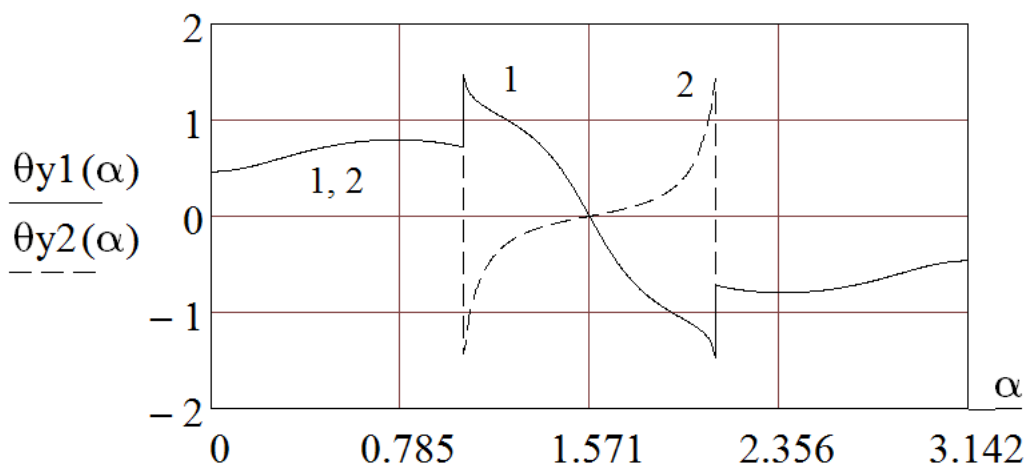


Рис. 6

Удивительно, но даже характерные значения первых, вторых и третьих производных в найденных решениях точно выражаются через  $\pi, \phi, \varphi$  !!

Так, углы наклона касательных для функций  $\text{Re}(\rho_{1,2}(\alpha))$  (см.рис. 4,5)  $\theta\rho_{1,2}(\alpha) = \text{arctg}(d \text{Re}(\rho_{1,2}) / d\alpha) \cdot 180 / \pi$  имеют максимумы и минимумы, равные  $\text{arctg}(\pm\phi) \approx \pm 31,717 474 411^{\circ}$ , Укажем также, что эти экстремумы реализуются при  $\alpha_{\max} \approx 33,772 242 419^{\circ}$ ,  $\alpha_{\min} \approx 146,227 757 581^{\circ}$ , при этом  $\text{tg}(\alpha_{\max, \min}) \approx \pm 1 / \sqrt{\phi + \varphi}$ ,  $\alpha_{\max} + \alpha_{\min} = \pi$ .

На границе появления мнимой компоненты  $\rho_{1,2}(\alpha)$  угол наклона первой производной слева равен  $\theta\rho_{1,2}(\pi/3 - 0) = 23,413 223 095^{\circ}$ . при этом  $\text{tg}(\theta\rho_{1,2}(\pi/3 - 0)) = \sqrt{3} / 4 = \sqrt{\phi^2 + \varphi^2} / (\phi^3 - \varphi^3)$ .

Один из максимумов угла наклона касательной к кривой  $\text{Re}(y_{1,2}(\alpha))$  равен  $\theta y_{1,2}(\alpha = 0, \pi) = 26,565 051 177^{\circ} = \text{arctg} \varphi - \text{arctg} \phi = 58,282 525^{\circ} - 31,717 484^{\circ}$  При этом  $\theta y_{1,2}(\alpha = 0, \pi) = \text{arctg}(1/2) = \arccos(2 / \sqrt{\phi + \varphi}) = \arcsin(1 / \sqrt{\phi + \varphi})$ .

Углы наклона вторых производных  $\beta\rho_{1,2}(\alpha) = \text{arctg}(d^2 \text{Re}\rho_{1,2}(\alpha) / d\alpha^2)$  имеют максимум  $\beta\rho_{1\max} = -70,940 403 769^{\circ} = \text{arctg}(4\varphi / (\phi + \varphi))$  и минимум  $\beta\rho_{1\min} = 47,870 989 974^{\circ} = \text{arctg}(4\phi / (\phi + \varphi))$  при  $\alpha = \pi/2$ . В то же время  $\beta\rho_{1,2}(0) = \beta\rho_{1,2}(\pi) = 63,434 948 823^{\circ} = \text{arctg} 2 = 2\text{arctg} \phi$ .

$$\text{Re}\rho_1(\alpha) / \text{Re}\rho_2(\alpha) = \varphi \text{ при } \alpha = \text{arctg} \varphi^{3/2} \approx 64,086 353 811^{\circ}.$$

$$\text{Re}\rho_1(\alpha) = \text{Im}\rho_1(\alpha) = 1 / \sqrt{2} = \phi \cdot \varphi / \sqrt{\phi^2 + \varphi^1} \text{ при } \alpha = \pi/6.$$

Не занимаясь анализом того, до какой цифры после запятой верны величины интегралов, получаемые при численном счёте, отметим, напр., что:

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} (|\rho_1(\alpha)| - |\rho_2(\alpha)|) d\alpha \approx 0,812 59 \approx (\phi + \varphi)\sqrt{\phi - \varphi}^{3/2} \approx 0,812 91,$$

$$\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1 - \text{Re}\rho_{1,2}) d\alpha \approx 0,588 16 \approx \varphi\sqrt{\phi - \varphi}^{3/2} \approx 0,588 29,$$



$$\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (\operatorname{Im} \rho_1(\alpha) - \operatorname{Im} \rho_2) d\alpha \approx 2,6877 \approx \pi(e^\phi - 1) \approx 2,6869,$$

$$\int_{-(\phi+\varphi)/4}^{(\phi+\varphi)/4} (|\rho_1(x)| - |\rho_2(x)|) dx \approx 0,8555 \approx e^\phi - 1 \approx 0,8553.$$

Приведённых примеров, даже без рассмотрения зависимостей  $u_{1-4}(x)$ ,  $x_{1-4}(\alpha)$  и их производных, очевидно, достаточно, чтобы показать очень высокую насыщенность решений рассматриваемых уравнений различными нетривиальными соотношениями гармонии, точно выражающимися через фундаментальные математические константы.

В этой связи следует отметить, что левая часть уравнений (1) в простейшем случае при  $a = b = 1$ , знаке "+" и без знака модуля соответствует известной функции Жуковского  $W = (z + 1/z)/2$ , играющей большую роль при рассмотрении задач аэродинамики.

При этом интересно то, что без жесткого ограничения на функцию Жуковского, т. е. без знака модуля, соответствующие уравнения имеют всего лишь два решения. Так, уравнение  $W_+ = (z + 1/z) = 1$  имеет решения  $z_{1,2} = (1 \pm i \cdot \sqrt{3})/2$ , при этом  $z_1 \cdot z_2 = 1$ , так как  $W_+(z) = W_+(1/z)$ . Уравнение  $W_- = (z - 1/z) = 1$ , также имеет два решения  $z_{1,2} = \varphi, -\varphi$ , но в этом случае  $z_1 \cdot z_2 = -1$  поскольку  $W_-(z) = -W_-(1/z)$ .

В то же время, как показано в данной статье, уравнение  $|z + b/z| = a$  даже при жестком ограничении на величину модуля ( $a < 2$  при  $b = 1$ ) имеет бесконечное множество разных решений  $z_{1-4} = \rho_{1-4}(\alpha) \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$  при всех  $\alpha$  из области  $\pi/3 + n\pi \leq \alpha \leq 2\pi/3 + n\pi$ , определяемой условием положительности дискриминанта  $D \geq 0$ :  $\cos \alpha \leq a^2/2b - 1$ . И решение  $(1 \pm i \cdot \sqrt{3})/2$ , реализуется, напр., для  $z_1(\pi/3)$ ,  $z_2(\pi/3)$  и даже при  $\alpha = 0$ .

Ещё более неожиданным может показаться то, что при  $b = 1$  и  $a \geq 2$  уравнение  $|z + 1/z| = a$  имеет четыре типа решений  $z_{1-4}(\alpha)$  при любых (!)  $\alpha$ :

$$z_{1-4}(\alpha) = \pm \sqrt{a^2 - 2\cos(2\alpha) \pm \sqrt{(a^2 - 2\cos(2\alpha))^2 - 4}} \cdot e^{i\alpha} / \sqrt{2} \quad (18)$$

Это связано с тем, что уравнение со знаком модуля накладывает на самом деле меньшие ограничения, чем уравнение без знака модуля, поскольку в последнем случае нужно приравнять действительные и мнимые части уравнения, а в случае наличия модуля нужно только получить заданную величину модуля комплексного числа. При этом один и тот же модуль может быть у бесконечного числа различных комплексных чисел.

В заключение стоит отметить ещё один аспект, связанный с тем, что показанные на рис. 1-6 симметричные и эстетичные графические зависимости содержат в скрытом виде большой объём интересных и нетривиальных математических соотношений. При этом, как отмечено в [1], подобные математические образы могут быть использованы для дешифрации астрологической, религиозной и магической символики. Если в древних рукописях, рисунках на храмах и т.д. удастся найти такие фигуры, содержащие в зашифрованном виде фундаментальные математические закономерности и константы, то это будет весомым доказательством существования на Земле в прошлом высокоразвитых цивилизаций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Шелаев А.Н.* К проблеме математической дешифрации астрологической, религиозной и магической символики. Актуальные проблемы современной науки, 2009, № 6, С.71-73.