Шелаев А.Н. **Сведения об авторе**

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНВАРИАНТНЫХ СУММ И РАЗНОСТЕЙ – СОФОКУСНЫЕ ЭЛЛИПСЫ И ГИПЕРБОЛЫ КАК ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ И СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ТОНКОГО РАВНОМЕРНО-ЗАРЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

Обобщённые геометрические модели инвариантных (в частном случае золотых) сечений и произведений, соответственно, - окружности и овалы Кассини были введены автором статьи в [1-4]. В этих же работах найдены электростатические модели инвариантных сечений и прозведений в виде тонких бесконечно длинных параллельных одноимённо- или противоположно-заряженных тел.

В данной статье (в развитие работы [5[), во-первых, вводятся инвариантные суммы и разности, геометрическими моделями которых являются софокусные эллипсы и гиперболы. Во-вторых, исходя из того, что эллипсы являются твкже эквипотенциальными линиями тонких прямолинейных равномерно-заряженных тел конечной длины, а софокусные и ортогональные этим эллипсам гиперболы - силовыми линиями полей тех же тел, для инвариантных сумм и разностей находятся характерные соотношения гармонии, выражающиеся через фундаментальные математические константы, прежде всего, π и константы золотых сечений $\phi = (-1+\sqrt{5})/2 \simeq 0,618$ и $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1+\phi = \phi^{-1} \simeq 1,618$.

Итак, пусть точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ (см. рис. 1) ограничивают тонкий -

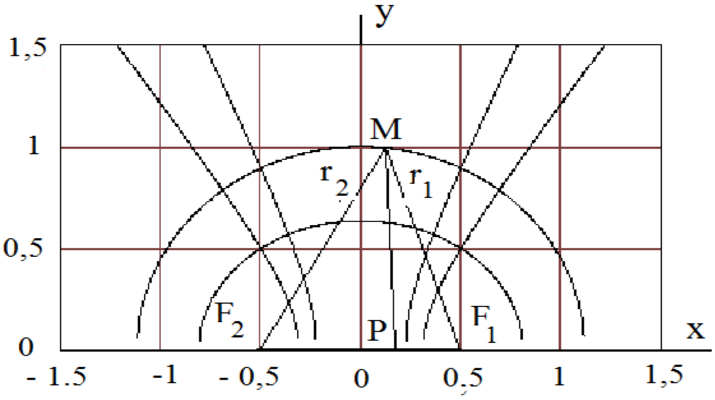

Рис. 1

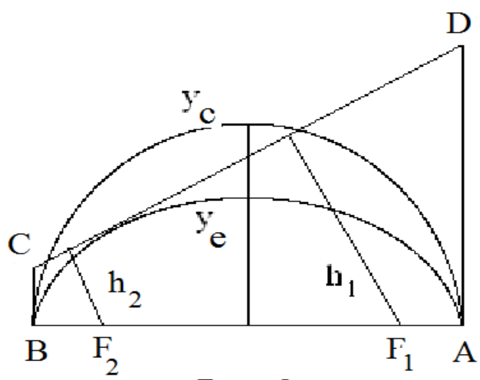

Рис. 2

равномерно-заряженный стержень в виде отрезка длины 2c с линейной плотностью заряда σ. Тогда потенциал $U(x,y)$ в произвольной точке $M(x,y)$ будет определяться суммой потенциалов зарядов σdx_P, находящихся в точках $P(x_P,0)$, $dU=\sigma dx_P/4\pi\varepsilon_0|PM|$:

$$U(x,y)=\alpha\cdot\int_{-c}^{c}dx_P/\sqrt{(x-x_P)^2+y^2}=\ln|(x+c+r_2)/(x-c+r_1)| \qquad (1),$$

где $\alpha=\sigma/4\pi\varepsilon_0$, $r_1=|F_1M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $r_2=|F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

Отметим, что плоскость XY - любая плоскость, проходящая через отрезок F_1F_2. В цилиндрической системе координат координате y соответствовала бы координата r, определяющая расстояние от точки M до отрезка F_1F_2.

Учитывая, что $x=(r_2^2-r_1^2)/4c$, из (1) получим, что потенциал равен:

$$U(x,y)=\alpha\cdot\ln[(r_1+r_2+2c)/(r_1+r_2-2c)] \qquad (2)$$

Из (2) следует, что эквипотенциальные линии $U(x,y)=\text{const}$ реализуются при $r_1+r_2=\text{const}=2a$, а этим соотношением определяется эллипс, фокусы которого F_1, F_2 находятся на концах заряженного отрезка:

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1, \quad b^2=a^2-c^2, \quad r_1=a-\varepsilon\cdot x, \quad r_2=a+\varepsilon\cdot x, \quad \varepsilon=c/a<1 \qquad (3)$$

Линии напряжённости электростатического поля $\vec{E}(x,y)$, перпендикулярные к эквипотенциальным линиям $U(x,y)$, определяются соотношениями

$$\vec{E}(x.y)=-\text{grad}\,U(x,y)=-(\partial U/\partial x\cdot\vec{i}+\partial U/\partial y\cdot\vec{j}) \qquad (4)$$

$$E_x=-\partial U/\partial x=\alpha\cdot(1/r_1-1/r_2) \qquad (5)$$

$$E_y=-\partial U/\partial y=\alpha\cdot[(c-x)/r_1+(c+x)/r_2]/y(x), \quad y(x)=\pm b\cdot\sqrt{1-(x/a)^2} \qquad (6)$$

и в данном случае являются гиперболами, софокусными к эллипсам (3) (см. рис. 1). Это следует, например, из того, что нормаль к эллипсу, определяющая направление линий напряжённости поля, делит пополам внутренний угол между фокальными радиусами F_1M и F_2M, В то же время этот угол делит пополам и касательная к гиперболе. В итоге в точке пересечения эллипса и гиперболы нормаль к эллипсу перпендикулярна нормали к гиперболе

Введя углы $\angle MF_1F_2 = \beta_1$, $\angle MF_2F_1 = \beta_2$ получим, что компоненты поля E_x, E_y можно записать в виде:

$$E_x = \alpha(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)/y, \qquad E_y = \alpha(\cos\beta_1 + \cos\beta_2)/y \tag{7}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \alpha\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\beta_1+\beta_2)}\,/\,y \tag{8}$$

Канонические уравнения софокусных эллипсов $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и гипербол $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ находятся путём вычисления двух значений параметра λ из уравнения, квадратичного по λ:

$$x^2/(a^2+\lambda) + y^2/(b^2+\lambda) = 1, \qquad \lambda \neq -a^2, -b^2 \tag{9}$$

$$\lambda_{\pm} = [x^2 + y^2 - a^2 - b^2 \pm \sqrt{(b^2 - a^2 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}\,]/2 \tag{10}$$

Так, полагая, что расстояние между фокусами эллипса и гиперболы $F_1F_2 = 1$, $c = 1/2$, $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}/2$, получим, что для эллипса и гиперболы, пересекающихся под прямым углом в точке $(x = c = 1/2,\ y = 3/4)$ $\lambda_+ = 0$, $\lambda_- = -15/16$. В итоге уравнения софокусных эллипса и гиперболы имеют вид:

$$x^2/1^2 + y^2/(\sqrt{3}/2)^2 = 1, \qquad x^2/(1/4)^2 - y^2/(\sqrt{3}/4)^2 = 1 \tag{11}$$

При этом эксцентриситет эллипса $\varepsilon_e = c/a = 1/2 < 1$, эксцентриситет же гиперболы $\varepsilon_h = c/A = 2 > 1$, а их произведение $\varepsilon_e \cdot \varepsilon_h = 1$.

Полагая $\varepsilon_e = c/a = \phi$, $\varepsilon_h = c/A = \varphi$, $\varepsilon_e \cdot \varepsilon_h = \phi \cdot \varphi = 1$ получим софокусные эллипсы и гиперболы, связанные золотым сечением по их эксцентриситетам.

Гипербола - геометрическое место точек, для которых разность расстояний до 2-х фокусов константа. Причём, для левой ветви гиперболы $r_1 - r_2 = 2A$, для правой $r_2 - r_1 = 2A$. Для нахождения точек пересечения софокусных эллипсов и гипербол используем следующий способ. Полагаем фокусы F_1, F_2 центрами эквидистантных концентрических окружностей с радиусами $r_{1,n} = n \cdot r_0$, $r_{2,m} = m \cdot r_0$, $n, m = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда точки пересечения этих окружностей зададут систему координат, в которой эллипсы определяються точками, в которых $n + m = \mathrm{const}$, гиперболы – точками, в которых $n - m = \mathrm{const}$.

Семейства софокусных эллипсов и гипербол задают также эллиптическую систему координат $x = a \cdot \text{ch}\mu \cdot \cos\nu$, $y = a \cdot \text{sh}\mu \cdot \sin\nu$, $\mu > 0$, $\nu \in [0, 2\pi]$, при этом эллипсы - линии уровня μ, гиперболы - линии уровня ν, так как

$$x^2 / (a \cdot \text{ch}\mu)^2 + y^2 / (a \cdot \text{sh}\mu)^2 = \cos^2\nu + \sin^2\nu = 1 \qquad (12)$$

$$x^2 / (a \cdot \cos\nu)^2 - y^2 / (a \cdot \sin\nu)^2 = \text{ch}^2\mu - \text{sh}^2\mu = 1 \qquad (13)$$

Наконец, система софокусных эллипсов и гипербол равнодиагональна, так как в криволинейных 4-х угольниках, образованных двумя эллипсами и двумя гиперболами (см. рис. 1) диагонали равны.

Помимо инвариантных сумм и разностей для эллипсов и гипербол есть и постоянные произведения и отношения, определяемые различными средними: арифметическим - $\overline{M}_A(p,q) = (p+q)/2$, геометрическим - $M_G(p,q) = \sqrt{p \cdot q}$, гармоническим - $\overline{M}_H(p,q) = 2/(1/p + 1/q)$, квадратичным - $\overline{M}_Q = \sqrt{(p^2 + q^2)/2}$.

Так, произведение высот $h_{1,2}$, опущенных из фокусов F_1, F_2 на касательную к эллипсу (см.рис.2), равно $b^2 = a^2 - c^2$, $b = \sqrt{h_1 h_2}$. Величине b равно и среднее геометрическое отрезков BC, AD, отсекаемых касательной к эллипсу и осью OX от линий, перпендикулярных оси OX в концах большой оси эллипса.

Сумма же квадратов расстояний от точек эллипса до прямых $y = \pm(b/a) \cdot x$, являющихся асимптотами гиперболы, равна $2a^2b^2/(a^2 + b^2) = \overline{M}_H(a^2, b^2)$.

Для гиперболы произведение длин перпендикуляров от фокусов до любой касательной также константа, равная B^2. Произведение же расстояний от точек гиперболы до асимптот равно $A^2B^2/C^2 = A^2B^2/(A^2 + B^2) = 1/(1/A^2 + 1/B^2)$, т.е. равно $\overline{M}_H(A^2, B^2)/2$.

Если в окружность радиуса $r = 1$ вписан эллипс с большой полуосью $a = 1$ и малой полуосью b, то при изменении абсциссы x отношения $y_e / y_c = b$ и $y_e/(y_c - y_e) = b/(1-b)$ будут постоянными, где $y_c = \pm\sqrt{1 - x^2}$ - ордината окружности, $y_e = \pm b\sqrt{1 - x^2}$ - ордината эллипса. Если $b = \phi$, то $b/(1-b) = \varphi$.

Из самих уравнений эллипса и гиперболы также следуют интересные соотношения гармонии, выражающиеся через константы ϕ, φ.

Так, из уравнений эллипса в алгебраической и тригонометрической форме следует, напр., что при $x = a/(\phi+\varphi) = a\cos\theta$, $y = \pm b\sqrt{1-(x/a)^2} = b\sin\theta$ и $\sin\theta = 2/\sqrt{5}$, $\cos\theta = 1/(\phi+\varphi) = 1/\sqrt{5}$, $\theta = \mathrm{arctg}\,2 = \pi/2 - \mathrm{arctg}(1/2) = 2\,\mathrm{arctg}\,\phi = \pi/2 - (\mathrm{arctg}\,\varphi - \mathrm{arctg}\,\phi)$.

И поскольку $2/(\phi+\varphi) = 2/(1/\varphi + 1/\phi)$, получаем, что $\overline{M}_H(\phi,\varphi) = 1/\overline{M}_A(\phi,\varphi)$.

Аналогично, из записи уравнений гиперболы с помощью алгебраических и гиперболических функций $x = A(\phi+\varphi)/2 = A\,\mathrm{ch}\,\mu$, $y = \pm B2/(\phi+\varphi) = B\,\mathrm{sh}\,\mu$ следует, напр., то, что $\mu = \mathrm{arch}((\phi+\varphi)/2) = \mathrm{arsh}(1/2) = \ln\varphi$

Интересные соотношения гармонии были получены и из рассматриваемой электростатической модели. Полагая в (4-8) $\alpha = 1$, введём следующие нтегралы

$$I(E,a) = \int_o^a E(x)\cdot\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx, \quad I(E^2,a) = \int_o^a E^2(x)\cdot\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx \quad (14)$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}, \; E_x(x) = 2\varepsilon x/(a^2 - \varepsilon^2 x^2), \; E_y(x) = 2(ca - \varepsilon x^2)/y(x)(a^2 - \varepsilon^2 x^2) \quad (15)$$

Зависимости $E_x(x)$, $E_y(x)$, $E(x)$, $E_x(x)\cdot E_y(x)$ - кривые 1-4 соответственно показаны на рис. 3 для случая $a = 1$, $c = 1/2$.

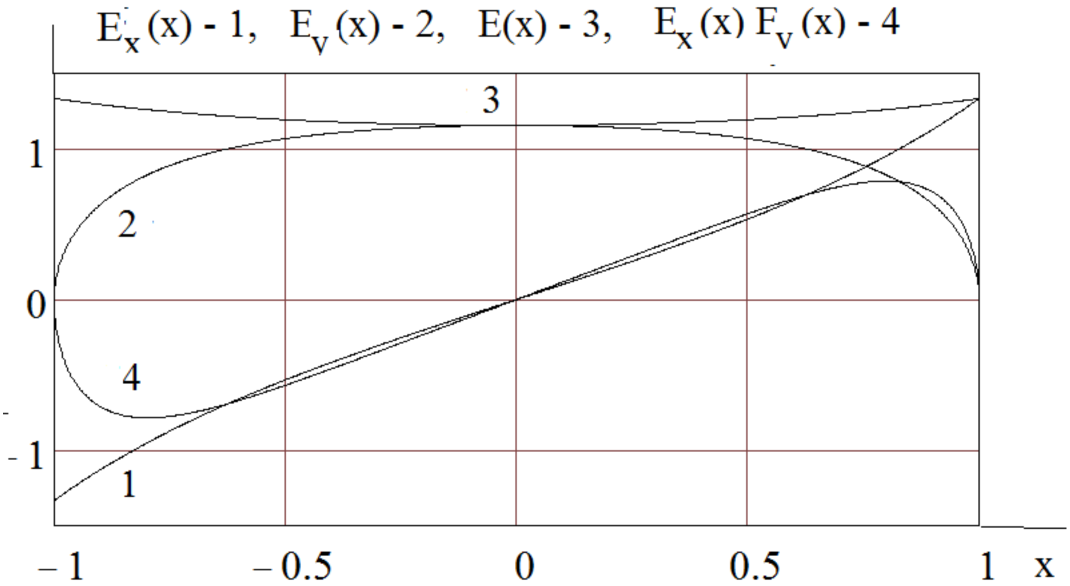

Рис. 3

Отметим, что, $E_x(1/2) = 8/15 = (3+5)/3\cdot5 = 1/3 + 1/5 = 1/(\phi^2+\varphi^2) + 1/(\phi+\varphi)^2$,

$E_y(1/2) = 2E_x$, $E_x = E_y = \sqrt{7}/3 = \sqrt{\phi^4 + \varphi^4}/(\phi^2 + \varphi^2)$ при $x = 2/\sqrt{7} = (\phi^2 + \varphi^1)/\sqrt{\phi^4 + \varphi^4}$.

Расшифровка (преобразование) численных значений интегралов (14-15), найденных с помощью компьютерных расчётов, в аналитическую форму позволила установить следующие нетривиальные закономерности:

1. Криволинейные интегралы 1-го рода $I(E, a)$, взятые от модуля поля по эквипотенциальным линиям, являются инвариантами для всех эллипсов с равным эксцентриситетом: $\varepsilon = c / a = \mathrm{const}$.

2. Если расстояние между фокусами в некоторых единицах $F_1F_2 = 1\,(c = 1/2)$, то $I(E, \sqrt{2}/2) = \pi$, $I(E, \sqrt{3}/2) = \pi/\sqrt{2}$, $I(E, \sqrt{4}/4 = 1) = \pi/\sqrt{3}$, $I(E, \sqrt{5}/2) = \pi/2$ и т. д. Если для 1-го интеграла $\varepsilon_1 = 1/\sqrt{2}$, то для n-го интеграла $\varepsilon_n = 1/\sqrt{n+1}$. В итоге мы получаем следующее замечательное соотношение:

$$I(E, 1/\sqrt{2}, \varepsilon_n) = \pi \cdot \varepsilon_{n-1} = \pi \cdot 1/\sqrt{n} \qquad (16)$$

3. Учитывая, что любое целое число можно точно выразить через ϕ, φ, напр., $2 = \phi^2 + \varphi$, $3 = \phi^2 + \varphi^2$, $4 = \varphi^3 - \phi^3$, $5 = (\phi + \varphi)^2$ и т. д., можно утверждать, что вся бесконечная последовательность интегралов (14) точно выражается через фундаментальные математические константы π, ϕ, φ. В этой связи отметим также, что $I(Ex,\, a = 1/\sqrt{2},\, c = 1/2) \simeq 1{,}762 \simeq 5/\sqrt{8} = (\phi + \varphi)^2/(\phi^2 + \varphi)^{3/2} \simeq 1{,}767$,

$I(Ey,\, a = 1/\sqrt{2},\, c = 1/2) \simeq 2{,}221 \simeq 2^2 \cdot 5/3^2 = [(\phi^2 + \varphi)(\phi + \varphi)/(\phi^2 + \varphi^2)]^2 \simeq 2{,}222$.

$I(E,\, a = 1,\, c = 1/2) \simeq 1{,}813 \simeq 3^2/5 = (\phi^2 + \varphi^2)^2/(\phi + \varphi)^2 = 1{,}8$

4. Интегралы $I(E^2, a)$ по ε не инвариантны, но при одновременном росте значений c, a в k раз $I(E^2,\, k \cdot a,\, k \cdot c) = I(E^2,\, a,\, c)/k$. Поэтому, поскольку, напр., интеграл $I(E^2,\, a = 1,\, c = \varepsilon = 1/2) = 2{,}247 \simeq (\phi + \varphi) \simeq 2{,}236 \simeq \sqrt{2}(\phi + \varphi)^2/\pi \simeq 2{,}250$ и $I(E^2,\, a = 1/\sqrt{2},\, c = 1/2,\, \varepsilon = 1/\sqrt{2}) = 10{,}48823 \simeq 2\pi\sqrt{2}(\phi + \varphi)^2\phi^3 \simeq 10{,}4882$, то и все подобные интегралы от квадрата поля по эквипотенциальным линиям в виде эллипсов с заданными ε также можно выразить через π, ϕ, φ !

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для электростатической модели обобщённых золотых сечений – длинных параллельных противоположно-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, - С.131-134.

2. *Шелаев А.Н.* Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений. М., Эл. № 77-6567, публ. 17511, 08.06.2012. www.trinitas.ru/doc/0232/009a/1252-shl.pdf

3. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для электростатической модели обобщённых золотых произведений – длинных параллельных одноимённо-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 4, -С.95-98

4. *Шелаев А.Н.* Электростатические и гравитационные модели инвариантных произведений.М.. Эл № 77-6567, публ.17609, 06.08.2012. . www.trinitas.ru/ doc/0232/009a/1252-shl.pdf.

5. *Шелаев А.Н* Соотношения гармонии для электростатической модели золотых сумм и разностей – тонкого прямолинейного равномерно-заряженного тела. Актуальные проблемы современной науки., 2011, № 5, С.116-120.