С.Л. Василенко, А.В. Никитин

От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию

Содержание

Терминологический парадокс..1
"Золотые" построения в древние века..3
Чёртова размерность..5
От анализа к синтезу..6
Новая форма золотой модели..6
Структурирование членов пропорции...7
Часть целого..8
Приращение-увеличение..9
От деления к отклонению...14
Золотая спираль..19
Формообразование единичных объемов..23
Самоуточнение результата...25
Заключение..26

Даже в шутках надо сохранять равновесие между "слишком" и "почти"... (Русская поговорка)

Терминологический парадокс

Все имеющиеся формулировки вокруг понятия «золотого сечения», как правило, сходны в одном. Это типичный анализ, в основе которого лежит дробление, расчленение, разъединение, измельчение...

В понятийном пространстве состояний здесь изначально присутствует некая разрушительная составляющая.

Да ещё "часто густо" под соусом гармонии. Эка, сидят и расчленяют ... живого человека на гармоничные составляющие. Довольно неестественная, вообще-то вещь, которая многими воспринимается как должное действо.

Даже формулировка задачи ориентирована не на созидание, а на разбиение.

Резать, отсекать, вырезать, вычленять... Парадоксально!

Как ни странно, но отсюда и вектор мозговых усилий подсознательно выстраивается подобающим образом.

Что уж там рассуждать, если мы даже в исследовательских задачах ничего не добавляем. Зато успешно режем, благополучно пилим, счастливо разделяем и размельчаем.

Сплошная экзекуция-хирургия. Просто жуть берёт...

Справедливости ради напомним, что было время, когда форма представления математического выражения была установлена примерно так:

– "хороший стиль", – формула дана в виде отношения или произведения;
– "плохой стиль", – формула представлена суммой или разностью.

То есть, хорошим стилем считалось выстраивать различного рода пропорции, причём часто безотносительно конкретных единиц измерения. За счёт отношений однородных величин.

Следует также отметить, что в теоретическом плане напыщенное раздувание "золотоносного" фактора в гармонии содержит сразу две наиболее принципиальные методологические ошибки:

– золотое сечение необязательно обусловливает гармонию, хотя и может задавать добротное структурирование;

– всё, что находится вне поля зрения золотого сечения, необязательно негармонично, а по своему структурированию способно на порядки превосходить "золотые" конструкции.

Особенно неестественным выглядит использование-интерпретация золотого сечения в архитектуре. Анализ сооружений порой напоминает не зодчих, а вандалов-разрушителей... На обломках старины.

Какую часть храма нужно разрушить (отсечь), чтобы бывшее целое так относилось к разрушенной части, как она – к оставшейся части? – Даже не смешно.

Что можно сказать по этому поводу?

– Если бы кроме сечения-деления не было других задач, относящихся к золотой пропорции, то можно было бы и не заострять внимания на неточном, если не сказать абсурдном, названии числа $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ золотым сечением.

Как говорится, сойдёт и так. Привыкли, ну, и ладно.

Главное здесь видится в ином.

Само по себе золотое сечение – это, по сути, частная задача.

Исторически она возникла ещё в античности, исключительно для построения строптивого правильного пятиугольника. Уж больно эта геометрическая фигура задевала своим неподдающимся построением самолюбие древних учёных на фоне правильного треугольника, шестиугольника и квадрата. Но без пентагона никак не обустраивалась теория правильных многогранников – Платоновых тел. Собственно и всё.

После того как научились чертить правильную пятиконечную звезду, деление в крайнем и среднем отношении забыли на многие-многие века. За ненадобностью.

Никакого там золота и в помине не было.

Потому оно (разбиение-деление) и вторично.

Кстати, в англоязычной литературе для числа Ф подавляющее распространение имеет термин «золотого отношения» (golden ratio).

Отношение – это суть любой структуры с её проявлением "золотых" свойств.

И это совершенно правильно.

Также как и деление, результат которого, например, в арифметике называют частным.

При рассмотрении равенств отношений, хорошо подходит «золотая пропорция» (golden proportion). Допустимо и понятно называть константу Ф золотым числом (golden number).

И даже золотым средним (golden mean). Как частный случай геометрического среднего.

Но вот в русском языке из всех возможных вариантов при переводе выбрали, можно сказать, наихудший аналог.

Скорее всего, это литературная обработка математического термина "деление".

В конце 19 века вспыхнул интерес к Древней Греции. В Европе была опубликована книга Цейзинга «Эстетические исследования», и при переводе на русский язык понадобился красивый аналог этого понятия [1].

Тогда и появился русский вариант – «золотое сечение».

И сегодня в подавляющем большинстве константу Φ называют «золотым сечением».

То есть, не мудрствуя лукаво, евклидовы математические рассечения и деления-разбиения автоматически перенесли на конечный числовой результат.

Обычно так и пишут «Φ – золотое сечение». – Остаётся добавить фразу: из «страны Абсурдистан». Там уж точно, число словесно уравнивается с геометрическим действом.

Более того, само число в исходной задаче на деление геометрически не представимо.

Его невозможно нарисовать-изобразить. Ибо *оно безразмерно, не привязано к метрике целого и выражает отношение* двух отрезков.

Видимо, пришло время понемногу как-то корректировать писательский стиль специалистов.

Ведь ничего не мешает немного подправлять-редактировать и называть Ф «числом (константой) золотого сечения».

Но ещё лучше, на наш взгляд, и проще: «Ф – золотое число». Или как по-английски «золотое отношение».

В каких задачах, процессах или явлениях оно используется, уже вторично. Будь-то разбиение-сечение. Или рост–присовокупление, как, например, в явлениях филлотаксиса или развития некоторых моллюсков. Где термин "сечение" точно выглядит как стоп-сигнал у кроликов Фибоначчи. – Вместо роста-развития сплошная регрессия, деградация и упадничество.

В природе важнее синтез, направленный на созидание и приумножение.

Помнится и Фибоначчи не вырезал и не забивал, а размножал кроликов.

Сравните: сколько нужно вырастить кроликов, чтобы их общее количество так относилось к исходному, как оно – к вновь выращенному?

Потому и кролики, и числа Фибоначчи F_n выстраиваются как бесконечное животворящее действо.

Пусть математически-абстрактное, но всё-таки воспроизводство.

При этом аттрактор модели вычисляется через предел-асимптоту ($n \to \infty$) роста

$$\Phi = \lim F_{n+1}/F_n.$$

По логике и константу должны были назвать не золотым сечением, но чем-то иным, отражающим увеличение.

Золотым присоединением-добавкой или золотым накоплением, ростом. Да мало ли?

Тем не менее, всё время почему-то твердят о золотом сечении-дроблении.

Хотя может спокойно присутствовать "золотое" приумножение, типа золотого пополнения счёта, наращивания производства и т.п.

Так или иначе, но называть фундаментальную константу Ф «золотым сечением», на наш взгляд, признак дурного математического вкуса.

Это как «один трамвай зелёный, а другой ... свернул за поворот».

"Золотые" построения в древние века

Традиционная и наиболее узнаваемая формулировка золотой пропорции (отношения, геометрического сечения) восходит к Древней Греции.

В интерпретации Евклида она выражена в двух формах.

Первая форма связана с традиционным для того времени отношением и равенством площадей [2, с. 75]:

Предложение 2.11[1]. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

Необходимые пояснения и комментарии можно найти в работе [3].

Там же приведено наглядное геометрическое представление этой формулировки в максимальном приближении к историческому духу и подходу древних греков (рис. 1).

"Прямая" здесь означает исходный прямолинейный отрезок и одновременно целое.

[1] В нумерации 2.11 первое число означает 2-ю книгу "Начал", другое число – 11-е предложение.

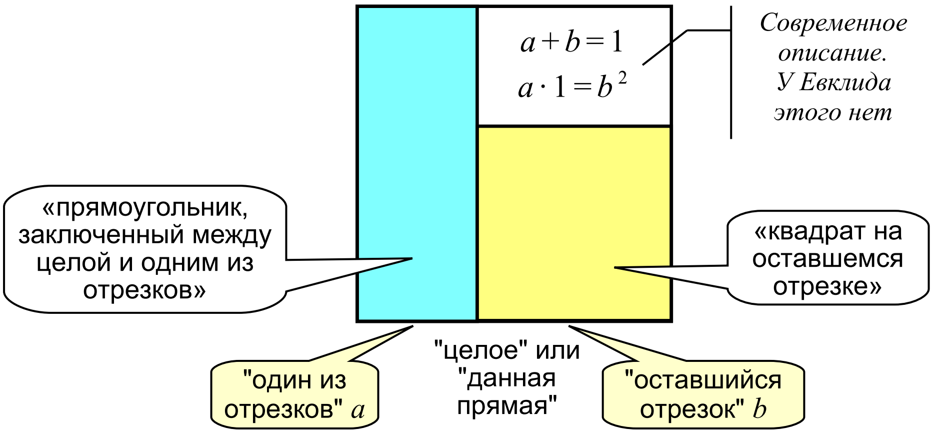


Рис. 1. Геометрическая интерпретация предложения 2.11 Евклида

Вторая форма известна как задача деления отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое её описание звучит так:

Определение 3.6. Говорится, что прямая делится в крайнем и среднем отношении, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [2, с. 173].

Речь идёт о пропорции $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$, в основе которой лежит вышеупомянутое геометрическое среднее $b=\sqrt{ac}$.

Учитывая частый разнобой в обозначениях задачи ЗС и некоторых других пропорциональных отношений, на наш взгляд, целесообразно как-то зафиксировать такие обозначения с ассоциациями на величины:

c – целое, – от произношения латинской буквы "цэ";

b – большая, выделенная, взятая часть, – ассоциация с произношением "бэ" и русским "вэ";

a – (а)статок, (а)тклонение, – русскоязычное произношение буквы "о" звуком "а".

Осмысление понятий "крайнего отношения" и "среднего отношения" изложено в работе [4]. Ограничимся лишь заключительным образом-констатацией гипотетического объяснения. Как писали математики в Древней Индии «Смотри!» (рис. 2).

Рис. 2. Понятийный смысл терминов "крайнего и среднего отношений" в интерпретации точки сопряжения

Средняя точка как бы выбирает собственное положение относительно двух других опорных точек.

Пропорция о крайнем и среднем отношениях: одно отношение касательно крайней точки, другое – средней точки.

Отсюда и ключевое число "три": две крайних и одна средняя точка.

Как неравноплечные весы, эквилибр или компаратор[2].
С двумя точками подвеса грузов и внутренней точкой опоры.

Решение задач Евклида в обоих случаях приводит к иррациональной константе $\phi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$.

Она численно равна длине большей части b в долях от исходного отрезка c.

При этом отношение целого к большему или большего к меньшему выражается безразмерной величиной $\Phi = \phi^{-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

Осовремененный вариант звучит примерно так: *золотое сечение* – деление целого на две части, при котором целое относится к большей части так, как большая – к меньшей.

Более точно золотое сечение следует представлять как деление целого в определённом соотношении:

целое так относится к одной части, как она относится к другой.

Большее и меньшее получаются уже потом, в процессе решения задачи.

Понятие целого здесь представлено широко и не обязательно соотносится с прямолинейным отрезком, да и геометрией вообще.

В общем случае деление целого на две неравные части допускает бесконечное множество отношений между целым и одной из его частей, а также между самими частями целого. Но только в единственном варианте эти отношения могут быть равными.

Этот вариант и представляет собой золотое сечение – высшее проявление структурного и функционального единения целого и его частей.

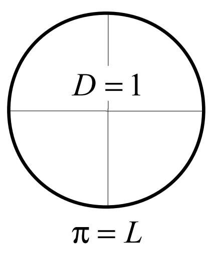
Чёртова размерность

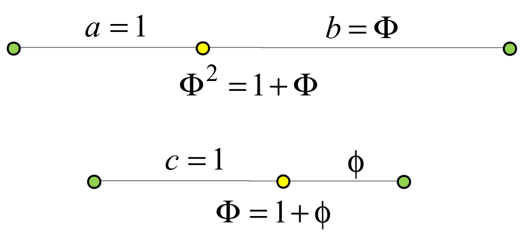
Вернёмся к задаче золотого сечения в её классическом рассмотрении.

Как уже говорилось, константа Φ безразмерна и численно выражает отношение двух отрезков $\Phi = b/a$.

Конечно, можно попытаться выразить её геометрически в единицах измерения, положив знаменатель (меньшую часть целого) равным $a = 1$.

Подобным образом представляют, например, константу π, как численное выражение длины окружности L единичного диаметра $D = 1$.





Всё бы и ничего. Но чтобы выделить на общем отрезке части 1 и Φ, нам нужно сначала нарисовать сам отрезок длиной Φ^2. Что изначально не представляется возможным.

Попадаем в заколдованный круг.

Для отображения метрики Φ необходим исходный отрезок Φ^2.

Вот и получается, что в задаче на деление мы не можем представить число Φ с чётким содержательным смыслом и толкованием.

---

[2] http://ru.wikipedia.org/?oldid=42839299.

Само число, безусловно, как-то "вычертить" можно.

Но применительно к задаче деления отрезка на геометрической плоскости это число ничего не выражает. Оно как бы зависает над этой плоскостью, характеризуя лишь отношение отрезков.

Число π, казалось бы, тоже выражает отношение длины любой окружности к её диаметру. Но одновременно отлично "прорисовывается" (прочерчивается) одним поворотом циркуля из середины единичного отрезка.

От анализа к синтезу

Всё сразу становится на свои места, как только мы переходим от анализа к синтезу.

То есть задачу разбиения целого на части переиначиваем в противоположную задачу золотого наращивания единичного отрезка.

В этом случае золотая константа Ф численно и метрически равна отрезку, который образуется увеличением единичного отрезка в отношении золотой пропорции.

Геометрически это выполняется элементарно (см. рис. 6). – Буквально одним поворотом циркуля с центром в середине стороны квадрата 1×1 и радиусом $\sqrt{1+(1/2)^2}$.

Таким образом, часто употребляемый в математике термин «Ф – золотое сечение» не верен, с каких бы сторон мы к нему ни подошли.

Ни *геометрически*, когда в задаче на сечение мы его не можем наглядно представить.

Ни *словесно*, ведь число – не есть сечение.

Ни *онтологически*. Мало ли, что его проявление впервые обнаружили в задаче на деление геометрического отрезка. Просто так совпало.

На самом деле, это число не сечения, ибо там оно прямо не выражается.

Ф – это число роста и приумножения.

Именно поэтому оно обычно проявляется-встречается в живых системах-творениях.

А то, что некоторые исследователи пытаются его "внедрить-насадить" в костные конструкции или созданные произведения искусства, больше походит на игру воображения и фантазии. Ввиду исключительно слабой (или никакой) аргументации.

О точном доказательстве вообще говорить не приходится.

Новая форма золотой модели

Рассмотренная выше модель золотого роста и традиционное золотое сечение – суть одного и того же процесса.

Отличие состоит в изменении некоторого начального (исходного) единичного объекта в сторону увеличения или уменьшения. Золотая пропорция как раз и устанавливает соответствующую уникальную связь между двумя объектами (старым и новым) и величиной приращения (положительного или отрицательного).

В одном случае исходный объект увеличивается, в другом – наоборот уменьшается.

Так мы приходим к обобщённой *канонической форме модели золотого равновесия*:

при изменении объекта большее так относится к меньшему, как оно – к приращению.

1) Единичную <u>прямую 1 увеличить</u> так, чтобы новая длина $\Phi = 1+\Delta$ относилась к старой (исходной) 1, как она – к приращению Δ:

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1+\Delta}{1} = \frac{1}{\Delta}.$$

Исходная длина – среднее геометрическое нового отрезка и линейного приращения.

2) Единичную <u>прямую 1 уменьшить</u> так, чтобы старая длина 1 относилась к новой $\phi = 1 - \Delta$, как она к "приращению":

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\phi}{1-\phi} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{1-\Delta} = \frac{1-\Delta}{\Delta}.$$

Новая длина – среднее геометрическое исходного отрезка и линейного приращения.

Здесь ϕ – новый объект при уменьшении целого или большая часть в золотом сечении. Величина Δ – отрезаемая часть от целого или меньшая часть в золотом сечении, равная ϕ^2.

Таким образом,

Φ – новая длина при золотом увеличении или *константа золотого роста*.

ϕ – новая длина при золотом уменьшении или *константа золотого убывания*.

Учитывая противоположную направленность двух одинаковых процессов роста/убывания, произведение констант равно единице $\phi \cdot \Phi = 1$.

Структурирование членов пропорции

Пропорция, как равенство двух отношений, предполагает наличие четырёх элементов

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4}.$$

Если речь идёт о некотором делении целого c на две части, то за счёт дополнительного равенства $a + b = c$ один элемент свободы утрачивается, и остаются три элемента p_1, p_2, p_3.

Для определённости, не теряя общности рассуждений, целое можно принять в виде единицы $c = 1$. Неопределёнными становятся только два члена p_1, p_2.

Наконец, задавая форму связи между целым и частями (параметрами a, b, c), получаем одно алгебраическое уравнение с одним неизвестным.

В частности, золотая модель образуется при среднем геометрическом $b = \sqrt{ac}$ или $b^2 = a,\ c = 1$.

Квадрат переменной b легко реализуется при составлении пропорции.

Достаточно её разнести по разные стороны равенства, сделав средними или крайними членами:

$$\frac{u}{b} = \frac{b}{v} \quad \Leftrightarrow \quad u : b = b : v;$$

$$\frac{b}{u} = \frac{v}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b : u = v : b.$$

Именно так образуется золотая пропорция[3] $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ или $\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b}$.

Она приводит к квадратному уравнению золотого сечения: $b^2 = 1 - b \Rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Отрицательное значение большей части $b < 0$, которое часто отбрасывается, имеет немаловажное значение, означая внешнюю точку золотого деления.

---

[3] Целое относится к большему, как большее – к меньшему.

Часть целого

Теперь перейдем к другим пониманиям отклонения, например, в виде части целого.

Как говорит А. Маклаков о взаимоотношении целого и части в восприятии:

«Воспринимая его как целое, мы вместе с тем воспринимаем и отдельные его части. Обе эти стороны восприятия теснейшим образом связаны между собой: восприятие целого обусловлено восприятием его частей и свойств, в то же время оно само влияет на их восприятие...

Важность роли восприятия части в восприятии целого не означает, что для узнавания предмета необходимо воспринимать все его части. Многое из того, что имеется в объекте, совсем не воспринимается, или воспринимается неясно, или не может быть воспринято в данный момент, но, тем не менее, мы узнаем предмет» [5, с. 218–219].

Заметим, что произвольная пропорция с двумя частями не воспроизводится в крайней точке $(a, b) = (0, 1)$. Потому как меньшей части нет физически. То есть, предикат отсутствует.

Равенство нулю не выводит систему из состояния неопределённости.

Если же задачу формулировать в отклонениях (разностях, отличиях), то предикат есть: это отклонение большей существующей части от чего-то.

Отклонение понимается не как некоторая ненормальность или странность в поведении (по Ожегову), но как отклонение от заданной нормы или несовпадение с чем-либо.

Получается, что так такового <золотого> сечения может и не быть.

Это человек придумал-формализовал такую геометрическую задачу. На самом деле имеет место постоянное соотнесения своего положения с собственным отклонением. И поиск-схождение точки пропорционального равновесия.

Фиксируется своя величина b по отношению к одному краю и затем соотносится с отклонением от другого края.

По сути, это точка пропорционального баланса-равновесия, а не деления!

Заметим, не середина. А именно равновесие. С наличием явной асимметрии.

То есть с точки зрения целого выделяется всего одна часть!

Это совершенно меняет многие представления о физическом содержании золотой константы Φ.

Соответственно видоизменяется и основная формулировка:

целое относится к своей части так, как она – к своему отклонению от целого.

В этом случае:

золотое равновесие (отношение) – это пропорциональное увеличение отрезка, при котором новый отрезок так относится к исходному, как исходный – к приращению.

Взять те же семечки в цветке подсолнуха.

Разве они что-то делят-секут в своём формировании расположения? – Нет. Им это от природы не дано.

Нот они способны выбирать место <под солнцем> пропорционального или золотого равновесия.

Конечно, можно рассуждать о некоем делении пространства или линий (отрезков).

Но всё это будет на уровне воображаемых геометрических объектов.

Де факто семечки выстраиваются вдоль логарифмической спирали со степенным параметром на основе золотого числа Φ.

Исходная запись золотой пропорции на языке отклонений имеет вид: $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$.

В данной структуре отношений присутствуют только две величины (!): целое 1 и его некая часть x. Величина $1–x$ есть отклонение части от другого края (точки) или разность между целым и данной частью. Именно отклонение. А не вторая часть.

Здесь нас вообще не интересует наличие-отсутствие второй части. Может, их там ещё целая сотня.

Нужно просто убрать отрезок и оставить одни точки, с условно встроенным радаром на среднюю из них.

"Стрельнули радаром" в одну сторону. Затем "стрельнули" в другую сторону, проверив отклонение. Подправили. Ещё раз проверили. И готово.

Теснота клеткам или семечкам понятна на уровне взаимных потенциалов.

Иначе говоря, мы "сверяем часы" не по второй части, которой у нас собственно нет, а по отклонению одной выделенной части от целого.

В геометрии, это будет расстояние. Но может быть время, например, у эхолота.

То есть у нас вообще отсутствует понятие второй части (элемента), как таковое.

Таким образом, золотое сечение можно переформатировать как задачу выделения "золотой" части из целого. Заметим, одной единственной части.

Подобное выделение главного и второстепенного по отношению к целому может касаться чего угодно.

Как главное соотносится с общим, так и второстепенное соотносится с главным.

Правда здесь уже чётко просматривается деление общего на две части: главную и оставшуюся – второстепенную.

Сюда же, как ни странно, можно отнести и любопытную "пупковую философию" [6]. Поскольку части человеческого тела, находящиеся по разные стороны пупка, не имеют чётких названий и толкований.

Можно сказать совершенно абстрактные части.

В общем случае допустимо рассуждать и в категориях средних величин.

Золотая часть – среднее геометрическое целого и отклонения золотой части от целого

$$x = \sqrt{1 \cdot (1 - x)} .$$

Если целое принять равным $c = 1$ и $\ln 1 = 0$, то $\ln b = \dfrac{\ln a}{2}$.

То есть *логарифм выделенной части равен половине логарифма остатка. – Это тоже золотое сечение–равновесие*. Но его лучше выражать в процентах.

Приращение-увеличение

Так или иначе, но исходным посылом возникновения золотой константы, которое сохранились до сих пор, стало сечение-рассечение, деление-разбиение и тому подобное.

Всё это атрибутика анализа.

Движение если и не назад, то точно не вперёд.

Здесь не просматривается развитие или созидание.

Поэтому мы поворачиваем телегу. Как говорится, перезапрягаем лошадь и двигаемся по пути синтеза.

Вот, например, как бы могла выглядеть первая формулировка Евклида относительно золотоносного равенства площадей (древнегреческий стиль выражения сохраняется):

- данную прямую увеличить так, чтобы квадрат на ней стал равен прямоугольнику, заключённому между увеличенной прямой и добавленным отрезком (рис. 3).

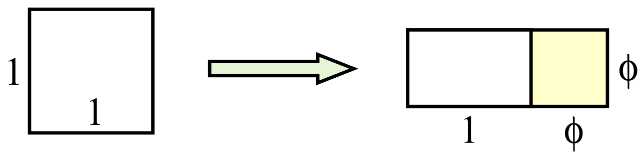


Рис. 3. Модификация предложения Евклида по схеме синтеза модели золотого равновесия на принципах созидания

Возможна и несколько осовремененная модификация:

Прямую добавить (увеличить, нарастить) так, чтобы квадрат на исходной прямой 1×1 был равен прямоугольнику между увеличенной прямой $1+\phi$ и её приращением ϕ.

Вторая форма выглядит ещё более наглядной и удобной:

- прямая увеличивается в *крайнем и среднем отношении*, если как увеличенная прямая к целому, так и целое к приращению: $\frac{1+x}{1}=\frac{1}{x}$.

В результате получаем то же характеристическое уравнение для малой константы золотого сечения: $\phi^2+\phi-1=0$. Но уже безо всякого дробления-деления.

Аналогично тому, как деление отрезка можно было выполнять справа или слева, приращение также может осуществляться с двух концов.

Кроме того, само по себе приращение может иметь обратный знак, становясь "отрезанием", вычитанием, вычленением и т.п.

1) Рассмотрим наращивание или приращение в положительном направлении.

Имеют место два решения

$$\frac{1+x}{1}=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad x^2+x=1 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2}=(\phi,-\Phi)\,.$$

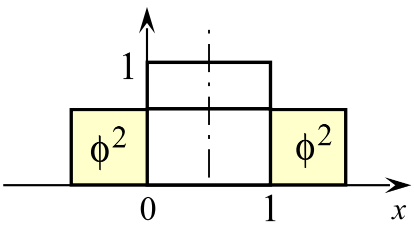


Рис. 4. Приращение отрезка в положительном направлении

Первое из них даёт обычное приращение к единичному отрезку величины ϕ вправо (рис. 4).

Второе – такое же приращение, но влево. Поскольку прибавление к единице отрицательного значения $-\Phi$ даёт $1-\Phi=-\phi$.

То есть, в итоге имеем два абсолютно симметричных решения относительно оси единичного квадрата.

2) Пусть теперь приращение идёт в отрицательном направлении.

Другими словами, имеем де-факто не приращение, а нечто отрезания. Тогда само приращение изменит знак на противоположный.

В результате получаем снова два решения

$$\frac{1-x}{1}=\frac{1}{-x} \quad\Rightarrow\quad x^2-x=1 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2}=(-\phi,\Phi)\,.$$

Первое из них даёт вычленение из единичного отрезка величины ϕ влево (рис. 5), что фактически совпадает с задачей Евклида о делении целого на две части.

Получается не приращение, а урезание.

Формулировка Евклида превращается в частный случай золотого равновесия на принципах созидания, но с отрицательным приращением.

Второе решение становится внешним решением задачи и наоборот даёт теперь увеличение отрезка на величину Ф.

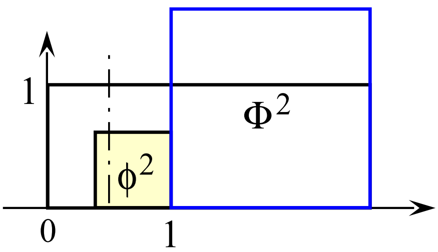


Рис. 5. Приращение отрезка в отрицательном направлении

В результате получается равновеликость прямоугольника $1\times(1+\Phi)$ и квадрата Φ^2 с соответствующими отношениями $\frac{1}{\Phi}=\frac{\Phi}{1+\Phi}$.

Эта пропорция имеет следующее толкование:

отрезок нарастить так, чтобы прямоугольник между исходным и новым отрезком $1\times(1+\Phi)$ был равен квадрату на приращении Φ^2.

Относительно расположения смежной точки двух отрезков числителя и знаменателя можно различать (по Евклиду):

$\frac{1}{\Phi}$ – *среднее* отношение, со смежной (общей) точкой посредине;

$\frac{\Phi}{1+\Phi}$ – *крайнее* отношение, со смежной точкой с края.

Алгоритм построения. Рисунок 4 даёт нам общее направление решения задачи на построение увеличенного отрезка (рис. 6).

Берём квадрат 1×1 и делим основание пополам.

Проводим дугу радиусом, заключенным между серединой основания и вершиной квадрата. Всё!

Получаем отрезки длиной $1+\phi=\Phi$.

Довольно наглядно и очевидно. Число определяется одним поворотом циркуля относительно середины квадрата.

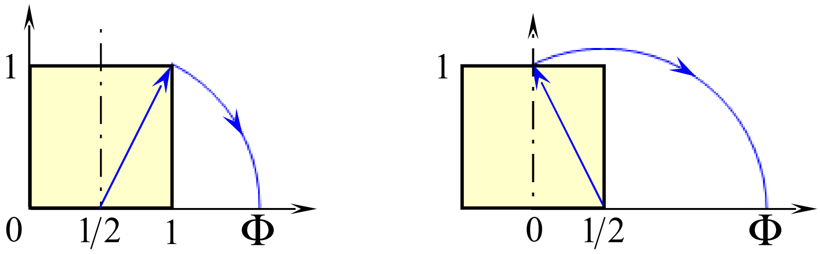


Рис. 6. Формирование золотой константы

Данная модель приращений имеет целый ряд неоспоримых преимуществ по сравнению с обычным или традиционным делением отрезка.

1) Константа Ф приобретает *чёткую метрику* и содержательный геометрический смысл. Это новый увеличенный отрезок. Или новое увеличенное (подросшее) целое в результате увеличения исходного единичного отрезка на величину приращения ϕ. В тех же самых единицах, что исходный отрезок 1 и добавка к нему ϕ.

Другими словами, все величины в равенстве $1+\phi=\Phi$ имеют одинаковую метрику.

Очень важное методологическое расширение!

Ибо в задаче на евклидово деление отрезка величина Ф метрики не имела и определялась, как отношение большей части к меньшей. То есть, само сечение мы проводили, а геометрически представить величину Ф не могли.

Теперь у нас золотое число Ф – «новая созидательная единица», образуемая из обычной единицы 1 в золотой пропорции.

2) Имеем *минимальную форму* в записи пропорции по количеству наличия в ней неизвестной величины $\frac{1+x}{1}=\frac{1}{x}$. – Это верный признак правильности выбранного нами пути решения и осмысления!

3) Имеем *минимальное количество операций* (с помощью циркуля и линейки) для решения геометрической задачи на построение. Чтобы выполнить сечение отрезка, нам нужно было ещё дополнительно провести дугу радиусом ϕ с центром в правой нижней вершине квадрата. Задача на золотое увеличение-приращение (приумножение) решается всего лишь одним поворотом циркуля.

Так поступает и природа. Этот момент является определяющем в синтезе и развитии растений с их вездесущим филлотаксисом. Одним движением поворота, образуя спираль.

Именно формирование, рост, созревание являются главными посылами. Но не пресловутое золотое деление, которое в природе практически не встречается.

4) Можно сформулировать пропорцию в категориях *динамического изменения состояния*: новое так относится к старому, как оно – к приращению.

При этом становится более понятной и отчётливой связь возрастающих чисел Фибоначчи приблизительно в геометрической прогрессии с константой-аттрактором Φ.

Или те же кролики... С их рождением-ростом-созреванием. Но никак не умерщвлением-вырезанием-гибелью.

Допустимая операция в математике, с её расчленением и разбиением, становится мало востребованной аналогией в теории жизни.

5) Если изначально взять за основу задачу деления (целого, отрезка), то она таковой и остаётся. То есть всё заканчивается анализом.

В задаче на приращение всё обстоит иначе.

В рамках одной проблематики мы можем проводить *одновременно анализ и синтез*.

Дело лишь в определении направления движения-приращения.

В последнем можно лишь изменить ориентацию, и тогда образуется не наращивание, а урезание (деление).

Таким образом, привычное *золотое сечение – модель анализа и разрушения*. Причём более сложная в реализации и построении конструкция.

Золотое приращение или равновесное развитие – модель синтеза и созидания.

Модель простая, наглядная и жизненно востребованная.

А вот ещё **уникальная трактовка золотого созидания**:

некая величина $1-x$ дополняется x так, чтобы новое количество 1 относилось к исходному (старому), как оно – к пополнению x, то есть

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1-x}{x} \quad \Rightarrow \quad (1-x)^2=x \quad \Rightarrow \quad x^2-3x+1=0 \quad x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1-\phi=\phi^2.$$

Вроде знакомый конечный результат. Но одновременно, как всё сильно разнится от классического золотого сечения.

Не только созидательным мотивом формирования утверждения-пропорции.

Но и алгебраическим уравнением, в котором уже не все коэффициенты равны 1.

После перевода в эквивалентный возвратный (разностный) аналог $z_{n+1}=3z_n+z_{n-1}$ и выбора традиционных начальных условий $(z_0, z_1)=(0,\ 1)$, можно построить рекуррентный числовой ряд: 0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, ...

Хорошо видно, что он являет собой чётные числа Фибоначчи $z_n = F_{2n}$, где $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$: **0**, 1, **1**, 2, **3**, 5, **8**, 13, **21**, 34, **55**, 89, **144**, ...

Есть смысл подвести некоторую объединительную черту в представлении разных вариантов зависимой переменной.

Сначала привычная для многих читателей интерпретация золотого сечения единичного отрезка: целое $1 = a + b$ так относится к одной части (большему b), как она – к другой (меньшей a):

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b} \quad \Rightarrow \quad b^2 + b - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{– большее;}$$

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{a} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 3a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \phi^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{– меньшее;}$$

$$x = \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} = \frac{1+x}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{– большее/меньшее.}$$

Теперь сформируем пропорции и уравнения в терминах синтеза:

увеличенная прямая (новое целое) 1+Δ так относится к <исходному> целому 1, как оно – к приращению Δ:

$$\frac{1+\Delta}{1} = \frac{1}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad \Delta^2 + \Delta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{– приращение;}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{– новое целое.}$$

Как видно, за счёт уникальных свойств золотой пропорции задача деления целого, равно как и задача пропорционального приумножения целого, приводят к одинаковым числовым результатам. Только с разными интерпретациями.

Причём второй случай более реалистичный. Можно сказать созидательный.

В одних метрических единицах он позволяет прекрасно интерпретировать константу Φ в рамках базового *тождества синтеза*: $1 + \phi = \Phi$.

Золотая константа Φ – обновлённый исходный продукт (целое).

<Малая> золотая константа ϕ – добавка (приращение) к исходному продукту.

Кстати, как и любое приращение, величина может иметь отрицательный знак.

Так мы приходим к первоначальной классической интерпретации – мысленного вычленения (отъёма, выделения) одной части целого.

Итак, допустимо

$$1 + \phi = \Phi \text{ – тождественная модель } \textit{синтеза};$$

$$1 - \phi = \phi^2 \text{ – тождественная модель } \textit{анализа}.$$

Первую конструкцию можно также называть *моделью золотого роста*.

Небольшое уточнение. Когда мы делим, точка золотого равновесия находится внутри.

Когда мы наращиваем, точка равновесия прикладывается с края. И только после этого идёт наращивание.

С точки зрения созидательного подхода, на наш взгляд, легче составляются и интерпретируются другие, похожие по строению, пропорции.

Например,

– новое <состояние> так относится к старому, как его половина – к приращению:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{1/2}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2+x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\approx 0{,}3660\,.$$

Или другая интерпретация этой же пропорции:
– целое относится к своей части, как она – к своему отклонению от половины целого.

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1/2-x} \;\Rightarrow\; x^2+x-\frac{1}{2}=0\quad .$$

Данный пример составлен специально, чтобы в окончательном решении появился иррациональный корень из трёх.

От деления к отклонению

Понятие, соотносящееся с такой категорией, как золотое сечение, не обязательно нужно формулировать в терминах «большее – меньшее» или вообще в двух частях-элементах. Как мы уже выяснили, можно выражать это и в системе координат «целое – часть».

То есть, с точки зрения целого выделяется всего одна часть!

Она фиксируется по отношению к одному краю и далее соотносится с отклонением относительно другого края.

Отклонение включает в себя несколько пониманий. Это и ошибка измерения или отображения, величина отклонения от эталона. Это и приращение, не изменяющее понимание "целого", что лежит в основе роста природных образований. Если хорошенько поискать, можно найти и другие формы-варианты понимания и/или толкования отклонения.

Рассмотрим отклонение, как ошибку отображения [7] хотя бы потому, чтобы защитить число Φ от излишней предубежденности и фетишизации. Всё-таки константа Φ обнаружена в некоторых формах живой природы.

Попробуем ответить на вопрос: почему параметр Φ появился в этих естественных живых объектах? И второй вопрос: Почему число Ф в своем точном значении почти не встречается при анализе природных образований?

Иначе говоря, есть в природе число Φ, как основа гармонии, или его – нет?

С одной стороны есть, и мы четко фиксируем это при исследовании "средних" отклонений. Но как только дело доходит до конкретных измеренных величин и соотношений, так константа Φ куда-то исчезает…

Здесь мы пока можем констатировать только то, что число Φ в своем точном значении и не может стать «мерилом гармонии», а если и становится, то гармонии «мертвой», застывшей, что никак не соотносится с природными очень динамичными процессами роста и формообразования.

Видимо, постоянная Ф как основа формообразования имеет определенную устойчивость к ошибкам. Это обеспечивает нечувствительность к некоторым искажениям формы при её формировании. И позволяет строить сложные формы-образования в условиях наличия ошибок, как обязательной составляющей этого процесса. По этой причине большинство возникающих ошибок не приводят к катастрофическому срыву структурирования и позволяют успешно завершить начатое.

Проверим на такую устойчивость несколько известных систем счисления.

Начнем с ошибок измерения и сравнения. Как набегающих (накапливающихся), так и однократных. Мы с ними сталкиваемся при различных вычислениях постоянно.

Вот, с этими ошибками и разберемся.

Современная теория ошибок измерения[4] очень отличается от того понимания, которое она имела хотя бы полвека назад. Совместить сегодня понимание погрешности измерения[5], метрологическую точность измерений и классы точности измерений[6] на бытовом уровне практически невозможно.

Вот, например, как выбирается доверительный интервал (ДИ):

> Интерпретация ДИ, основанная на интуиции, будет следующей: если вероятность p велика (скажем 0,95 или 0,99), то ДИ почти наверняка содержит истинное значение θ измеряемой величины.
>
> Еще одно истолкование понятия ДИ: его можно рассматривать как интервал значений параметра θ, совместимых с опытными данными и не противоречащих им.

На фоне сложнейших формул вычисления этого интервала такой подход как-то не очень смотрится. Но, формулы формулами, а как-то определяться надо, хотя бы и примерно, для себя…

Хуже дело обстоит с оценкой точности отображения цифровых систем измерения.

Считается, что если счет идет в целых единицах, то принятая предельная величина такой ошибки составляет $\pm 0{,}5$ единицы счета.

Если ошибка измерения или отображения превышает это значение, то результат корректируется, увеличивая целое значение на единицу. Если ошибка меньше, то она отбрасывается. Так обычно делают и при вычислениях.

Попробуем разобраться подробнее...

Мы, почти автоматически приняли как постулат, что если величина отклонения измерения не превышает какой-то счетной части единицы системы, то такая ошибка не выводит систему к срыву счётного процесса.

Это лучше показать в двоичной системе:

$$M_2 = M.0_2 \pm 0.1_2, \tag{2}$$

где M_2 – отображаемое двоичное целое число;

$M.0_2$ – фактическое значение целого двоичного числа в формате с одним дробным разрядом.

В этом случае предельная погрешность отображения в целых единицах счёта соответствует величине:

$$\Delta = \pm 0{,}1_2 = 2^{-1} = \pm 0{,}5. \tag{3}$$

Мы подошли к различию в понимании погрешности цифрового отображения результата. Для измерения в линейных величинах максимальная ошибка составляет $\pm 0{,}5$ единицы измерения или счёта, а для цифровой шкалы – это $\pm 0{,}1_n$, где n – основание системы счёта. И только для двоичной системы счёта эти погрешности отображения и измерения совпадают. Для цифровых систем отображения результата это первый дробный разряд числа в системе счета. Чему же равна одна единица первого дробного разряда для разных систем счисления?

В общем случае, она определяется так:

$$0{,}1_n = 1/n. \tag{4}$$

И чем больше основание системы, тем меньше эта единица первого дробного разряда.

---

[4] Теория ошибок измерений изучает свойства ошибок и законы их распределения, методы обработки измерений с учетом их ошибок, а также способы вычисления числовых характеристик точности измерений. – http://edu.dvgups.ru/METDOC/ITS/GEOD/LEK/l10/L1.htm.

[5] Погрешность измерения – оценка отклонения измеренного значения величины от её истинного значения. Погрешность измерения является характеристикой (мерой) точности измерения. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=45427300.

[6] Классы точности средств измерений.

Для двоичной системы получаем 1/2, а для десятичной – 1/10.

Итак, максимальная ошибка цифрового отображения для целых чисел $\Delta_{max} < 0{,}1_n$, где n – основание системы счёта. При появлении такой ошибки, на цифровом табло мы будем видеть неизменный результат. Сколько бы измерений одной и той же величины мы не производили.

Чтобы обеспечить такую ошибку измерения для цифровой формы отображения мы должны обеспечить надежную регистрацию минимальной фиксируемой ошибки уже на уровне $\delta = 0{,}01_n$. Это уровень ошибки, регистрируемый системой, но не отображаемый цифровыми средствами отображения.

Пока ошибка измерения будет находиться в пределах ($0{,}01_n < \delta < 0{,}1_n$), можно считать, что точность отображения результата измерения на цифровой шкале не изменится, и соответственно не приведет к срыву вычислений.

Возникает естественный вопрос, в какой счётной системе предельная ошибка может достигать максимального значения и не приводить к срыву вычислений изменением цифрового отображения?

При проведении автоматических вычислений это уже вопрос удержания стабильности получения результата. И не только стабильности, но также потраченного времени, а это уже более понятно. Например, только одна возможность пропустить незначительные погрешности вычислений, не ведущие к прямому ухудшению конечного результата, позволяет ускорить процесс вычислений почти в 15 раз[7]. – За счет отказа от повторных вычислений в случае любой случайной ошибки в вычислениях.

Ответ напрашивается сам собой.

Чем меньше по весу различаются разрядные единицы в счётной системе, тем более высокого допустимого уровня может достигнуть предельная ошибка без срыва стабилизации системы. Различие весов разрядных единиц системы уменьшается с уменьшением величины основания системы.

Конечно, как видно, величины разрядных единиц $0{,}1_2$ и $0{,}1_{10}$ различаются в 5 раз.

Возможно, это один из основных факторов применения двоичной системе счёта в качестве основы для машинных вычислений.

Кстати, двоичная система отвечает ещё одному желательному признаку упрощения получения результата – чётности основания.

Но вот странное дело, любое чётное основание природной системы автоматически переходит в свой минимальный[8] аналог чётности – 2.

А любое нечётное основание счётной системы, кроме единичного аналога, конечно, оказывается больше двух. Это резко повышает сложность технической реализации автоматического процесса вычисления.

И хотя известно, что наибольшая плотность информации числа достигается при основании счета *e*, это только осложняет жизнь при попытках реализации такой системы.

Потому, что *e*-основание не только больше двух, но оно еще иррационально и трансцендентно.

Если верхним пределом сложности основания системы установить двойку, то любая система счисления с иррациональным основанием должна укладываться в промежуток 1..2.

Для этого достаточно любое нечетное основание счётной системы разделить на какой-то целочисленный коэффициент для перевода этой счетной системы на новое иррациональное основание в диапазоне 1..2.

В этом случае мы вполне вправе использовать бинарную систему записи числа, то есть с применением только двух цифр: 0 и 1.

---

[7] *Малянов Д.* Правильные ошибки. – 04.06.2012. – http://m.gazeta.ru/science/2012/06/04_a_4610845.shtml.

[8] Рекурсивное определение // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=49905509.

Представление основания счётной системы в виде отношения основания и коэффициента представляет собой множественность отражения четности или заданной иррациональности основания системы счёта.

Для четных систем это, например: 4/2=8/4=10/5=12/6… и т.д. Мы видим, как увеличивается основание системы счета – 4, 8, 10, 12,…, при этом увеличивается и коэффициент пересчета – 2, 4, 5, 6, …, а их отношение остается постоянным показателем четности – 2. Конечно, это и есть математическая пропорция в своем «высшем» понимании.

В системах с нечетным основанием для возможности отображения чисел бинарной записью можно подобрать коэффициент в отношении старого основания системы и коэффициента для размещения-попадания в диапазон 1..2.

С учетом выбора отображения множественности оснований, все системы с основанием >1 *могут быть сосредоточены в диапазоне* 1..2*, включая крайние значения. Как четные, так и нечетные.*

В этом интервале уровень допустимой ошибки системы плавно растет от $\pm 0{,}5$ разрядной единицы двоичной системы, до ограничения точности в ± 1 с приближением основания системы к 1.

Пока в этом диапазоне оснований наиболее широко известны три счётные системы: единичная система, система Бергмана и двоичная система счёта.

Остается сравнить относительные уровни фиксации ошибки $\delta = 0{,}01_n$ и предельные ошибки $\Delta = 0{,}1_n$ для систем с основаниями (1, Ф, 2) с условием целочисленного счёта.

Единичная система счисления.

Единичная система счисления гранична во всех отношениях. Любая фиксируемая ошибка δ_1 сразу становится и уровнем предельной ошибки $\Delta_1 = 1$. Это немедленно приводит к неминуемому "фатальному" исходу – сбою вычисления или процесса формообразования:

$$\delta_1 = 1, \quad \Delta_1 = 1. \tag{5}$$

Единичная система, это предельная размерность счётной системы, позволяющая сохранять если не развитие, то хотя бы постоянство и жизнеспособность.

Все физические объекты, получаемые этой счётной системой, в философском смысле одномерны. Как природные образования, это, например, алмазные "усы" – углеродные нити алмазной структуры, толщиной в одну молекулу, впервые обнаруженные при разработке технологии алмазного покрытия микронной толщины. Скорость образования огромна, время роста – малые доли секунды, длина в десятки сантиметров. Ограничением роста являются только нарушения условий роста. Получаемая структура полностью стабилизирована и инертна. Но, любая первая ошибка в развитии чревата полным прекращением роста.

Система Бергмана.

Выше говорилось о появлении «золотого сечения» в природных объектах.

Какое отношение к этому имеет цифровое отображение погрешности измерения? – Самое прямое.

Мы ведём речь о счётных множествах. Прежде всего, о клеточных структурах и организмах, которые могут отображаться в целых числах – клетках.

Другого, более достойного эталона просто нет.

Погрешность измерения, в данном случае, приравнивается к разнице размеров отдельных клеток, составляющих то или иное природное образование.

Клеточная структура может формировать какой-то объем, чаще замкнутый, только при условии стабильности средних размеров своей «строительной единицы» – клетки. А так же наличия и/или отсутствия клетки в нужном месте в нужный момент.

Тут и статистическая ошибка, и ошибка измерения. Всё в одном флаконе…

Всё, что влияет на стабильность строительства.

Основой действия системы является операция «свертка – развертка»: 100 = 011. То есть новую разрядную единицу можно сложить из единиц двух предыдущих разрядов.

Таким образом, уровень 0,01 от разряда ограничения точности можно уверенно фиксировать, как появление ошибки:

$$\delta_{\Phi} = 1/\Phi^2 \approx 0{,}381; \quad \Delta_{\Phi} = 1/\Phi \approx 0{,}618. \tag{6}$$

Например, для счёта в целых единицах появление единиц на уровне 0,01 не будет пониматься, как ошибка счёта. И для результата 1,01 верным значением мы принимаем 1,0.

При наличии уже имеющейся ошибки 0,01, любая новая ошибка на уровне 0,01 приводит к превышению уровня, так как даже 0,01+0,01 = 0,1001. И предельно допустимая ошибка оказывается превышенной.

Установление фиксации появления ошибки в системе на уровне 0,01 кажется вполне естественным. Должен быть хотя бы минимальный запас прочности и времени на устранение ошибки. Фиксация этой ошибки дает шанс на её своевременное устранение без нарушения целостности системы. Это правило выведено эмпирическим путем задолго до открытия системы Бергмана, но здесь оно получает и доказательную базу.

Подойдем к этому же уровню фиксации ошибки в системе Бергмана с другой стороны:

$$1{,}0 - 0{,}1 = 0{,}01. \tag{7}$$

Вот он, запас прочности в одну разрядную величину 0,1 и остающаяся минимально фиксируемая ошибка 0,01. На эту ошибку система должна вроде бы реагировать, и при этом не только не делать никаких действий, но и «не замечать» появления этой ошибки.

Потому в диапазоне значений $0{,}1 < x < 1{,}1$ мы будем фиксировать на табло результат $1 \pm 0{,}1$. В десятичных числах это значит, что все значения 0,618 < x < 1,618 будут фиксироваться, как 1.

При этом, уровень фиксации ошибки 0,01. Есть «запас прочности» до уровня "фатальности". Второй такой ошибки без принятия каких-то мер, система уже не выдержит, но и это уже совсем неплохо. Если вовремя устранить последствия первой ошибки, то вторая уже не будет "смертельной" для системы. Снова появляется время для «наведения порядка». Основание счётной системы находится в диапазоне наибольшей устойчивости и одновременно обеспечивает равномерность развития системы.

Двоичная система.

Ошибки составляют:

$$\delta_2 = (1/2)^2 = 0{,}25; \quad \Delta_2 = 1/2 = 0{,}5. \tag{8}$$

Двоичная система счисления имеет наибольший запас времени от уровня фиксации ошибки до её нарастания и превращения в "фатальную", потому что единиц в десятке системы две: $\Delta_2 = 0{,}5 = 2\delta_2$.

Но уровень предельной ошибки Δ_2 имеет еще и вероятностную неопределенность, как раз из-за четности основания. Уровень предельной ошибки совпадает с вероятностным среднеарифметическим значением 0,5. Появляется вероятностная зона "фатальности" определения, когда мы не можем определить, куда нам следует округлить результат для уменьшения ошибки. В отношении "целых" объектов это выражается в неопределенности: 1> (1+0,5)>2. Сколько же это в "целых" объектах, все еще - один или уже два?

Вычислительная машина особенно чувствительна к этой неопределенности, что никак не способствует устойчивости вычислений. Для преодоления неопределенности мы должны зафиксировать наше действие и уже «на подступах» к достижению предела 0,5 или после его преодоления. Сложная задача…

В природе эта вероятностная зона неустойчивости выражается в вариантном многообразии. Но, в то же время ведет к локализации каждого отдельного варианта развития.

Например, формирование кубических кристаллов солей в растворе.

Чем быстрее скорость их образования, тем меньших размеров они достигают. Предел локализации – молекулы, состоящие из пары атомов. И потому, по этой же причине, почти все элементные газы основной формулой имеют тип N_2.

Итак, сравнили...

Оказалось, что *система Бергмана имеет наиболее высокую устойчивость к разовым случайным ошибкам вычислений*. Максимальная ошибка, допустимая в этой системе равна $\Delta_\phi = \phi = \pm 0{,}618\ldots$, что больше среднеарифметической ошибки $\Delta = \pm 0{,}5$ и за пределом неопределенности...

Таким образом, *при основании системы* Φ *максимальная ошибка может доходить почти до величины* ϕ *и не приводить к остановке формообразования*.

Это позволяет строить сложные формы природы с высокой вероятностью их успешного завершения или создавать однотипные объекты с большим разнообразием в размерах. Видимо, именно это качество счётной системы Бергмана привело к объективной необходимости использования данной системы в формообразовании живой материи.

По этой причине мы и находим число Φ в природе.

Золотая спираль

Вернёмся ещё раз к исходной созидательной модели золотого равновесия.

Итак, некое исходное количество 1 дополняем Δ так, чтобы новое количество $1+\Delta$ относилось к старому 1, как оно – к пополнению Δ:

$$\frac{1+\Delta}{1} = \frac{1}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad \Delta^2 + \Delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Интерпретация такой золотой модели состоит в наращивании исходного единичного квадрата 1×1 до прямоугольника $1\times\Phi$, $\Phi = 1+\phi$ (рис. 7).

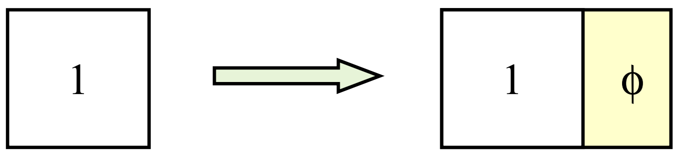


Рис. 7. Схема синтеза модели золотого равновесия на принципах созидания

По сути, исходный квадрат достаточно просто достраивается до золотого прямоугольника (см. рис. 6).

Средним членом пропорции становится само целое – 1.

Причём в записи пропорции неизвестная величина x фигурирует всего два раза! – В отличие от традиционной схемы золотого сечения, например, для большей части единичного отрезка $\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b}$ (целое – к большему b, как большее – к меньшему).

Дальнейшее развитие-наращивание модели заключается в последовательном пристраивании квадратов со стороной последнего прямоугольника.

Каждый вновь образующийся квадрат имеет отношение сторон, равное Φ (рис. 8).

Добавив к "золотому" прямоугольнику с его большей стороны квадрат, мы снова получим "золотой" прямоугольник, только большего размера.

Пристраиваемые к "золотому" прямоугольнику квадраты располагаются по логарифмической спирали.

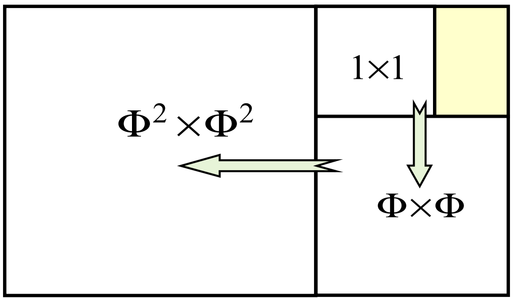


Рис. 8. Наращивание фигур согласно модели золотого равновесия

В результате образуется знакомая картинка золотой спирали из [8]:

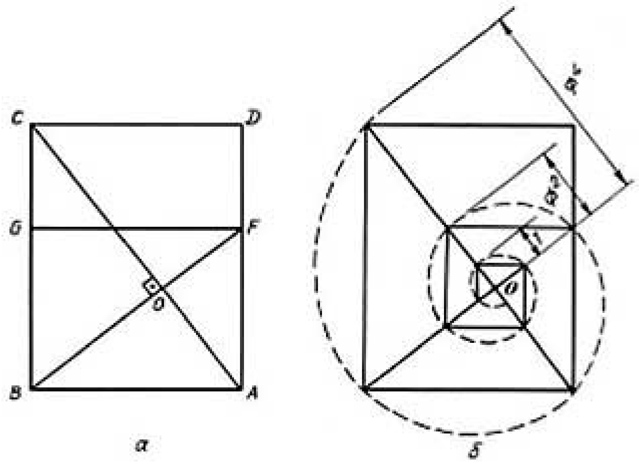


Рис. 9. Построение золотой спирали по Хэмбиджу

Или золотая логарифмическая спираль по Кокстеру (рис. 10) с её наглядным построением и геометрическими выкладками [9, с. 240–242]. Исходный текст построен в направлении анализа или деления-разбиения. Но ничего не мешает выполнить и обратное рассуждение по ходу обычного разворачивания спирали.

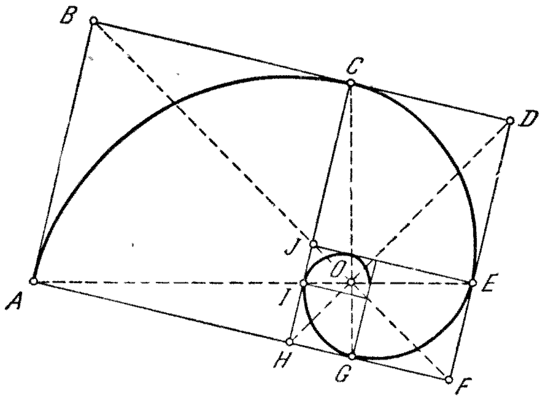


Рис. 10. Золотая спираль по Кокстеру

Соотношение $\Phi = 1 + \Phi^{-1}$ показывает, что путём присоединения квадрата *ABCH* золотой прямоугольник *CDFH* достраивается до большего золотого прямоугольника *ABDF*.

Точно так же достраивается меньший золотой прямоугольник.

И так до бесконечности.

Прямоугольники *HJEF* и *ABDF* гомотетичны. Поэтому вершина первого *J* принадлежит диагонали *BF* последнего. Следовательно, прямые *AE*, *BF*, *CG*, *DH* содержат все вершины всех прямоугольников.

Прямоугольник *ABDF* можно получить из исходного прямоугольника *CDFH* с помощью центрально-подобного вращения с центром *O*, лежащим в точке пересечения прямых *BF* и *DH*.

Такое вращение последовательно переводит точки в порядке последовательных схем:

$$\ldots I \to G \to E \to C \to A \quad \text{и} \quad \ldots J \to H \to F \to D \to B.$$

Оно является произведением вращения на 90 вокруг точки O и центрально-подобного преобразования (гомотетии) $O\left(\Phi^{-1}\right)$. Поэтому прямые BF и DH перпендикулярны.

Так как $\frac{OB}{OD} = \frac{BC}{CD} = \Phi$, то прямая OC делит пополам прямой угол BOD. Значит, прямые CG, AE пересекаются в точке O и делят пополам углы между BF и DH.

В полярных координатах с полюсом O центрально-подобное вращение, которое преобразует отрезок OE в OC, переводит всякую точку (r, θ) в точку $(\Phi r, \theta + \pi/2)$.

Выбирая отрезок OE за начальную прямую, а его длину за единицу измерения, получаем бесконечную последовательность координатных точек:

$$\ldots,\ I\left(\Phi^{-2}, -\pi\right),\ G\left(\Phi^{-1}, -\pi/2\right),\ E(1, 0),\ C(\Phi, \pi/2),\ A\left(\Phi^{2}, \pi\right), \ldots$$

или с полярными координатами

$$r = \Phi^{n}, \quad \theta = \frac{\pi n}{2}.$$

Все эти точки удовлетворяют уравнению $r = \Phi^{2\theta/\pi}$, то есть лежат на равноугольной (логарифмической) спирали $r = \mu^{\theta}$, где $\mu = \Phi^{2/\pi}$ (рис. 11).

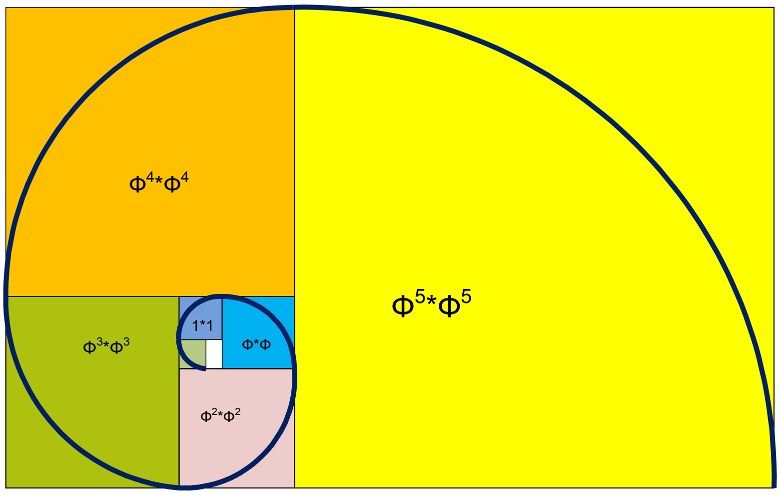


Рис. 11. Золотая логарифмическая спираль

Вот что об этой спирали говорит А.Ю.Чернов [6]:

> «Что общего у расположения полипептидных цепей нуклеиновых кислот, лепестков розы, раковин моллюсков, рогов млекопитающих, и далеких космических галактик?
>
> Ответ известен: структура, основанная на логарифмической спирали.
>
> Т. Кук открыл роль золотой логарифмической спирали в строении растительных и животных объектах, доказав что феномен роста в биологических объектах связан со спиралями золотого сечения.
>
> Что такое золотая логарифмическая спираль? В ее основе золотой прямоугольник: последовательно отрезая от него квадраты и вписывая в каждый по четверти окружности, мы и получаем золотую логарифмическую спираль».

Можно провести построения золотой логарифмической спирали [6] на достройке квадратов в соответствии с формулой последовательности.

И строится спираль графически, а не вычисляется.

Мы видим, как и из чего складывается сторона очередного квадрата наращивания спирали.

Во всех случаях элементами построения спирали приближённо являются четверти окружности, построенные на диагональных углах квадрата.

Сначала построим золотую спираль на основе степеней Ф. Как соотношение сторон квадратов.

Теперь построим спирали на основе чисел Фибоначчи и Люка (рис. 12).

Получаемые спирали отличаются только начальными "затравочными" числами.

Приближённая спираль строится фрактальным методом, повторяя четверти окружности на диагональных углах каждого последующего квадрата площади.

Отметим, что спирали на основе чисел Фибоначчи и Люка открыты для продолжения построения только с одной стороны, внешней. В сторону увеличения чисел.

Золотая спираль[9] открыта, как с внешней стороны, так и с внутренней.

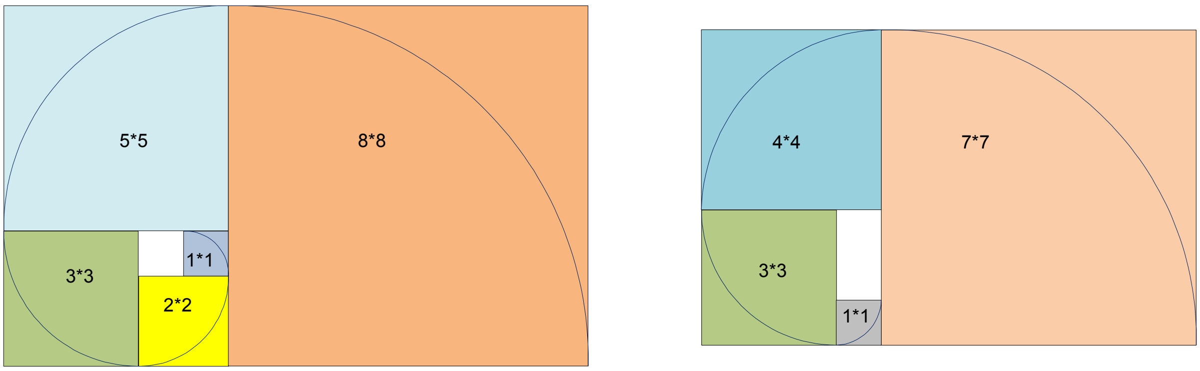


Рис. 12. Золотые спирали на основе чисел Фибоначчи и Люка

А теперь мы просто покажем:

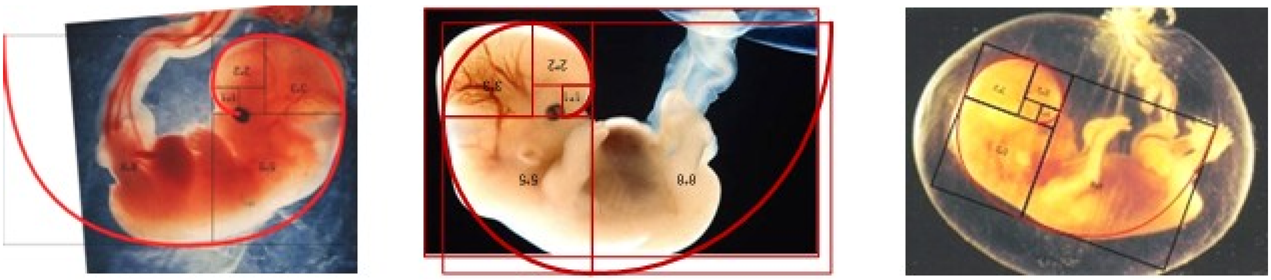


Рис. 13. Совмещение золотых спиралей и формы эмбриона человека

Нужны ли особые комментарии? – Похожесть формы эмбриона и спирали легко просматривается …

Кстати, спиральная линия и форма эмбриона показывают нам только временн*о*е сходство в определенные моменты времени.

По мере роста и развития эмбрион растет и видоизменяется. Меняются его соотношения, а вместе с ними варьируют и параметры спиральных эквивалентов.

Но как мы видим, формы спирали и эмбриона в целом имеют устойчивую тенденцию к сходству.

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral.

Формообразование единичных объемов

Конечно, золотыми спиралями формообразование на основе ЗС не заканчивается.

Важным звеном в этом процессе живой природы является получение единичных объемов с размерами на основе чисел Φ или ϕ.

Среди них: шар, призма, различные объемы вращения. Такие как эллипсоид, параболоид или гиперболоид вращения.

Формулы получения таких объемов различны. И все же…

Рассмотрим примеры приблизительно единичных объемов [8].

Шар, $r = \phi$:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\phi^3 = 0{,}988839... \approx 1 .$$

Сфероид – эллипсоид вращения, две из трёх полуосей (a, b, c) которого имеют одинаковую длину, $a = b = \phi^2$; $c = \Phi$:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi c a^2 = \frac{4}{3}\pi\Phi\left(\phi^2\right)^2 = \frac{4}{3}\pi\phi^3 = 0{,}988839... \approx 1 .$$

Данные формулы легко приводятся к одному виду с основанием $\phi = \Phi^{-1}$.

Собственно, примерно такое единство формообразования мы наблюдаем в живой природе. Действительно, эллипсоид вращения в разных вариациях – это наиболее общая форма живых образований.

Эллипсоид иногда образует и формы, очень близкие к сфере.

Нечто похожее мы наблюдаем и в *параболоиде вращения*[10], $r = \phi,\ h = \Phi$:

$$V_3 = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\pi\phi^2\Phi = \frac{\pi\phi}{2} = 0{,}970805... \approx 1 .$$

Эти формулы имеют общий вид

$$V = k\frac{\pi}{\Phi^n} . \qquad (9)$$

Данное соотношение содержит три основные составляющие: коэффициент пропорциональности k в счётных единицах и две фундаментальные математические константы, определяющие формообразование.

Остается только изменять степень n и получать любые вариации формообразования.

Напомним, нас в данном случае интересуют не столько абсолютно точные вычисления как таковые, сколько структурирование формообразования в живой природе.

Клеточные конструкции создают форму по законам физики и математики, но … примерно.

Клетки замыкают объем. Однако при этом продолжают расти и делиться.

Потому форма созданного объема будет отражать его в любой момент времени только приближенно (рис. 14).

---

[10] Образуется вращением плоской параболы вокруг её оси. Используется в качестве отражателя антенны.

Рис. 14. Растущий эмбрион человека на начальной стадии

Такой шаровой объём держит развивающийся из яйцеклетки эмбрион[11] человека.
Мы говорим о периоде А–Г на рис.15.

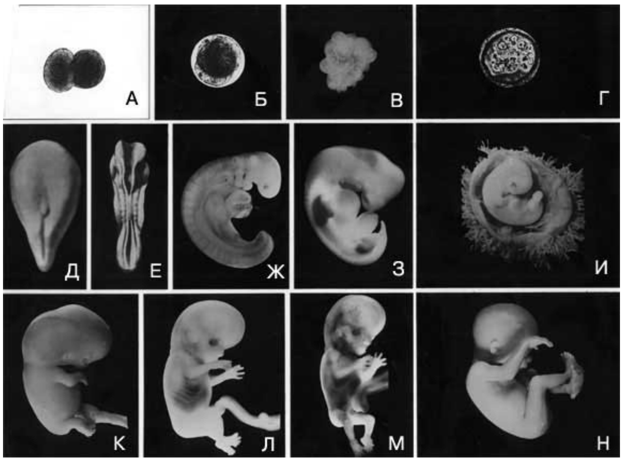


Рис. 15. Развитие эмбриона человека

При этом размеры отдельных клеток отличаются очень сильно. И конечно, время от времени возможны большие отклонения от сферы.

Но это короткий период развития. Очень скоро из этой сферы взметнутся три лепестка, которые дают начало функциональным системам человеческого организма. И форма эмбриона изменится (Е на рис. 15). Он переходит в другой этап-период развития.

Теперь вернемся к формуле (9).

Число Ф – это отношение двух размеров. Каких? – Любых соседних. Например, длины и ширины, объемов двух соседних клеток, или только их длины, ширины и высоты соответственно. В клеточных системах мы можем говорить лишь о ближней симметрии. О симметричности развития соседних клеток. Далее работает в основном физика и генетика.

Клетки во время роста меняют размер: от минимального до максимального.

При этом вся клеточная структура должна как-то сохранять форму.

Это возможно только при наличии одного эквивалента для всех эталонов формы.

Предположим, что это отношение равно Ф. В том числе и вместо фундаментального числа π.

Мы уже говорили о формообразовании тел вращения. Но, использовать константу π, это еще не значит создавать только шары и круги. Это значит синтезировать замкнутый объем плавным изменением кривизны поверхности.

---

[11] Эмбрион (др. греч. – *в оболочках*) – стадия развития организма, начиная со стадии зиготы до рождения или выхода из яйцевых оболочек.– http://ru.wikipedia.org/?oldid=44239948.

Оказывается, что эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды воссоздавать проще. Строим, куда кривая выведет, главное – плавно завершить. И чтобы по возможности прочно, надежно, с прицелом на дальнейшее развитие.

На жесткий контроль всего процесса строительства в целом, как того требует идеальная сфера, нет ни времени, ни средств. Потому что главная задача клеточной структуры – замкнуть объем, и выдержать примерное соответствие любой фигуре вращения.

Вот тут и начинает работать параметр Φ вместо константы π, как примерный эквивалент $\pi \approx 2\Phi$. Это позволяет отклониться от круговой формы, например, для получения отростков на стволе растения, листьев на ветке…

При этом точная цилиндрическая форма ствола и веток будет выдерживаться вероятнее всего только в общих чертах. Примерно. Давая возможность появлению зародышей почек и их последующего роста.

В этом смысле формула (9) дает широчайшие возможности замкнутого формообразования при использовании только фактора сравнения – ближней симметрии между соседними клетками, как отношения Φ.

Далее всё как в старой загадке: столько, да полстолька, да четверть столько, да еще один…, так и получим любую степень основания Φ элементарным сложением. И на этой основе строим сложнейшие объемы любой формы.

Заметим, не умножением, а сложением…, что позволяют только система Бергмана и простые двучленно-аддитивные последовательности чисел Фибоначчи и Люка.

Сдаётся, здесь и начинается филлотаксис и геометрия О.Боднара [10].

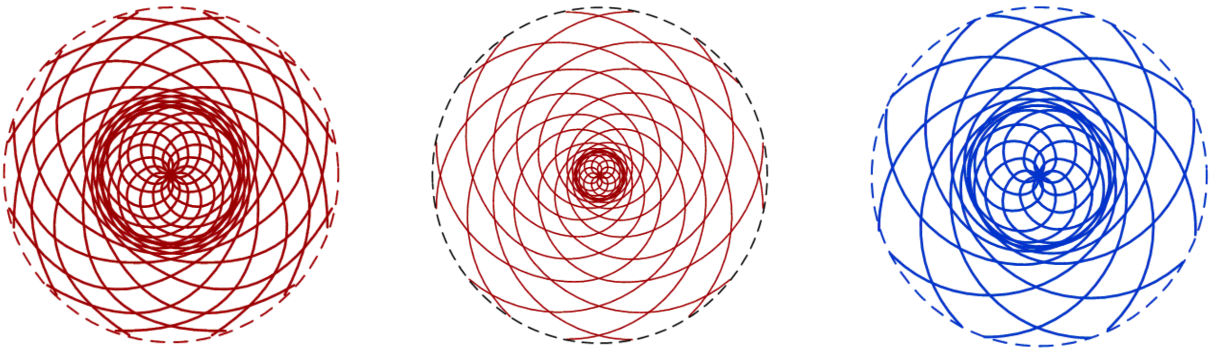


Рис. 16. Моделирование филлотаксиса

Рисунок 16 получен поворотом спирали на основе степеней Φ^n и чисел Фибоначчи.

Понятно, что это синтезировано в ориентировочном исполнении.

Но нам важно было показать процесс формообразования на основе простой модели приближенного получения <золотой> логарифмической спирали.

Самоуточнение результата

Рассмотрим изменение отклонения Φ^n от чисел рекуррентной последовательности Люка $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ – разновидности двухчленной аддитивной последовательности Фибоначчи с изменёнными начальными условиями $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$.

Данные числа замечательны, прежде всего, простой формой аналитического (не рекурсивного) представления

$$L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}.$$

Для чего же может быть предназначена величина Φ^n? – Для очень важной цели.

По сути дела, по мере роста индекса n мы всё время как бы переопределяем отклонение формы от целого.

Главное свойство, объединяющее эти числа – уменьшение иррациональности по мере роста результата. За конечное число шагов иррациональный результат становится рациональным в пределах точности системы.

В этом смысле числа, подобные Φ, выступают противовесом мировым математическим константам в организации Мира. Золотое число Φ создает рациональное начало. Единичность и законченность любого объекта нашего Мира.

Это его главная заслуга, что надо оценивать не только философски, но и на физическом уровне конкретного понимания.

Мы видим, как уменьшается абсолютная величина отклонения от целого с ростом числа. И очень быстро результат Φ^n становится эквивалентным целому L_n при любой погрешности измерения, априори принятой в вычислениях.

*Очень похоже, что числа Φ^n создают **измеряемость и локальность*** [7]. Это мостик, соединяющий рациональное и иррациональное начала нашего мироздания.

Собственно сам степенной ряд Φ^n – это последовательность созидания и приумножения. Причём на языке логарифмов он имеет прямую линию или арифметическую прогрессию.

То есть золотое накопление-созидание идёт по пути линейного роста логарифмов.

Если к тому же взять логарифмы по основанию Φ, то получаем обычный натуральный ряд: $\log_{\Phi} \Phi^n = n$.

Другими словами, *натуральный ряд – это золотое накопление в логарифмах по основанию* Φ.

Заключение

Итак, развита довольно оригинальная, на наш взгляд, идея по теме золотого сечения.

Можно сказать, под "новым" ракурсом.

Мы развернули угол зрения, что называется, на 180 градусов.

Вместо привычного деления (анализа), нами исследована золотоносная проблематика приумножения (синтеза).

Кроме того, задача деления целого на части переформатирована.

Теперь целое не раскладывается на две составляющие.

Из него выделяется одна часть (доля). Вторая часть физически присутствует (подразумевается), но «остаётся за кадром». Терминологически и понятийно она отсутствует. Вместо неё рассматривается отклонение вычлененной части от целого.

Несмотря на то, что меньшая часть как таковая не фигурирует, система вполне определена, поскольку она соотносится с существующим предметом – <большей> частью.

Сама задача формулируется следующим образом:

целое так относится к своей части, как она – к собственному отклонению от целого.

То есть, имеем целое и одну часть!

Оставшийся кусок нас не интересует. Ни структурно, ни методологически. Может там осталась ещё сотня или тысяча элементов.

Например, можно рассматривать один лепесток в общей структуре цветка.

Поэтому получается уже не золотое сечение, но обусловленное золотое равновесие.

Мы уже ничего не сечём и не делим.

Рассматривается золотое равновесие средней точки относительно краёв. Или золотое равновесие выделенной части относительно целого.

Литература:

1. *Никитин А.В.* История Золотого Сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16744, 11.08.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02321007.htm.
2. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
3. *Василенко С.Л.* "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.
4. *Василенко С.Л.* Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.
5. *Маклаков А.Г.* Общая психология: Учебник для вузов. – СПб: Питер, 2001. – 592 с. – http://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Psihol/makl/.
6. *Чернов А.Ю.* SECTIO AUREA. Имя, данное по ошибке: всё о золотом сечении. – http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_0_1.htm.
7. *Никитин А*.В. Посмотрим на Мир через математику и логику // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12748, 23.12.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320011.htm.
8. *Никитин А.В.* n-мерные суммы // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14517, 20.07.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161401.pdf.
9. *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – http://eek.diary.ru/p165970944.htm.
10. *Боднар О.* Динамическая симметрия в природе и архитектуре // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13656, 14.08.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321053.pdf.