**Шелаев А.Н.** **Сведения об авторе**

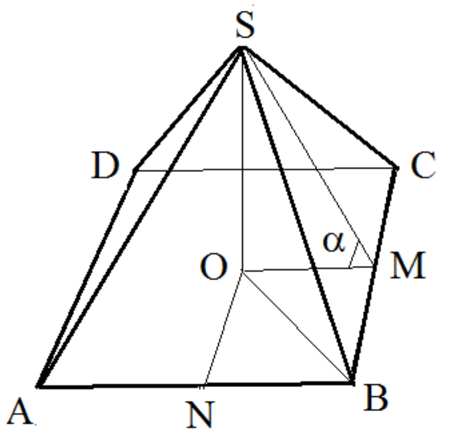
# К РАСКРЫТИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТАЙН ВЕЛИКИХ ПИРАМИД

Описанию геометрии Великих Пирамид и различным предположениям об их предназначении посвящено большое количество популярных работ. Однако с математической точки зрения в этих работах не было проведено главного - детального анализа геометрии пирамид.

В настоящей работе сообщается о раскрытии ряда геометрических тайн Пирамиды Хеопса. В статье впервые найдены не только замечательные геометрические соотношения, но и соответствующие им экстремумы геометрических величин, выражающиеся через фундаментальные математические константы системной гармонии $\phi = (-1+\sqrt{5})/2 \simeq 0{,}618\,034$ и $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1+\phi = 1/\phi \simeq 1{,}618\,034$.

При этом в данном случае под системой *в первом приближении* понимается исходная правильная 4-х угольная пирамида с вписанными в неё сферой и полусферой, в которую, в свою очередь, вписана пирамида с углом наклона боковой грани к основанию $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\sqrt{\phi}$, связанным с соответствующим углом исходной пирамиды $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\varphi}$ соотношением $\alpha + \alpha_1 = \pi/2$. При этом сумма радиусов сферы $r_S = k \cdot \phi^{3/2}$ и полусферы $r_{SS} = k \cdot \phi^{1/2}$ оказывается равной высоте пирамиды $h = k \cdot \sqrt{\varphi}$ ($k$ - множитель, зависящий от выбора единицы измерения длины), а разность радиусов $r_{SS} - r_S$ имеет экстремум – максимум именно при значении $h = k \cdot \sqrt{\varphi}$.

Итак, приступим к рассмотрению геометрических соотношений в правильной 4-х угольной прирамиде $SABCD$, показанной на рис.1 Как было установлено в результате проведённых измерений, угол наклона грани Пирамиды Хеопса к её основанию $\alpha_{exp} \approx 51{,}83^{o}$. Поскольку этот угол весьма близок к углу $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\varphi} \simeq 51{,}827292^{o}$, будем считать, что строители пирамиды стремились получить именно угол $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\varphi}$.




$AB = BC = CD = DA = a = 2$

$OM = ON = a/2 = 1$

$SA = SB = SC = SD = q$

$SO = h = \varphi^{1/2}$

Рис. 1

Пусть высота пирамиды $SO = h$, длина стороны квадрата в основании пирамиды $AB = 2a$, тогда $\mathrm{tg}\alpha = h/(a/2)$. Проводившие измерения исследователи пирамиды полагают, что её исходные размеры составляли $a \approx 230{,}3$ м, $h \approx 146{,}6$ м, длина ребра $q \simeq 225$ м.

Для упрощения вычислений будем считать, что единица длины такова, что $a = 2$. Тогда $h$ будет равняться $\sqrt{\varphi}$ (коэффициент $k = 1$), а апофема $m = SM = \varphi$. Отсюда вытекают два соотношения, лежащих в основе геометрии Пирамиды Хеопса. 1. Площадь квадрата со стороной, равной высоте пирамиды, равна площади боковой грани пирамиды, численно равной $\varphi$. 2. Отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её основания равно $\varphi$:

$$h^2 = m \cdot a/2 = \varphi, \qquad 4\varphi/a^2 = \varphi \qquad (1)$$

В ходе детального анализа геометрии пирамид было выявлено много интересных соотношений, однако, в данной статье основное внимание будет уделено только таким соотношениям, для которых были найдены экстремумы геометрических величин при значениях параметров $h = \sqrt{\varphi}$ и $\alpha = \mathrm{arctg}(\sqrt{\varphi})$. Такие с оотношения были обнаружены, прежде всего, для радиусов различных сфер вписанных в пирамиду.

Зависимости радиуса сферы $r_S = QO = QP$ (S – Sphere), вписанной в пирамиду (см. рис.2) , определяются соотношениями:

$$r_S = (a/2)\cdot tg(\alpha/2) = (a/2)\cdot[\sqrt{h^2+(a/2)^2} - a/2]/h \qquad (2)$$

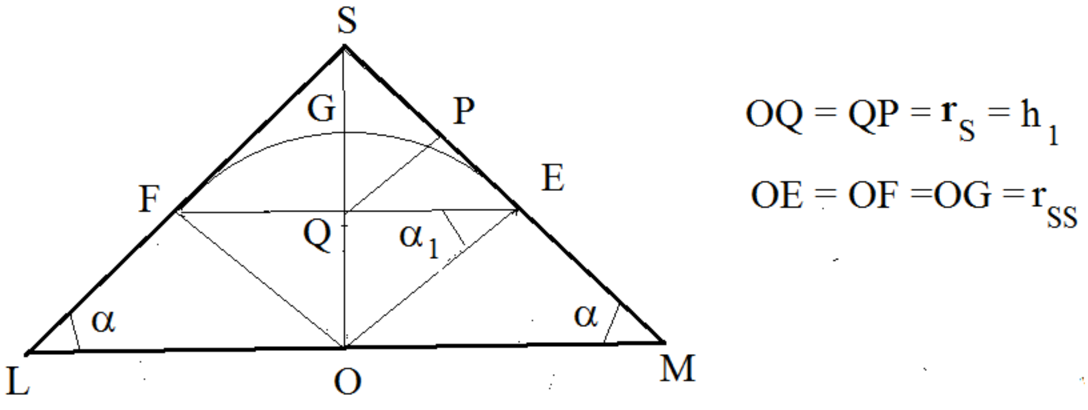



Рис. 2

Зависимости же радиуса полусферы $r_{SS}$ (SS - SemiSphere), вписанной в пирамиду (см. рис. 2) так, что плоскость проходящая через центр полусферы совпадает с плоскостью, в которой лежит основание пирамиды имеют вид:

$$r_{SS} = (a/2)\sin\alpha = (a/2)\cdot h/\sqrt{h^2+(a/2)^2} \qquad (3)$$

Радиусы $r_S(h)$ и $r_{SS}(h)$ монотонно растут с ростом $h$, однако, трудно предсказуемым является, во-первых, то, что разность радиусов $\Delta r(h) = r_{SS}(h) - r_S(h)$ (см. рис. 3) имеет экстремум – максимум именно при $h = \sqrt{\varphi}$ (!!).

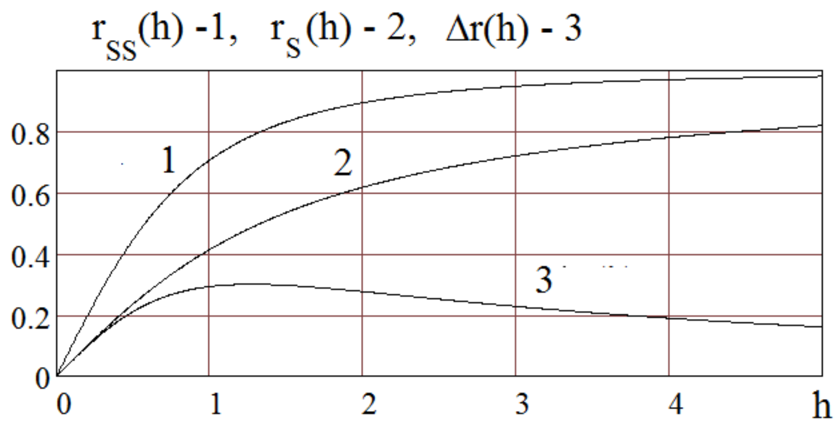



Рис. 3

При этом выполняются следующие замечательные соотношения:

$$r_{SS}(\sqrt{\varphi}) = \phi^{1/2}, \quad r_S(\sqrt{\varphi}) = \phi^{3/2}, \quad r_{SS}(\sqrt{\varphi}) + r_S(\sqrt{\varphi}) = \phi^{1/2} + \phi^{3/2} = \sqrt{\varphi} = h \qquad (4)$$

Наличие найденного экстремума характерно лишь для пирамиды данных размеров, а также для подобных ей пирамид. Напр., этот экстремум будет выполняться при уменьшении размеров пирамиды в $\varphi$ раз при $h = \sqrt{\phi}$, $a = \phi$, $m = 1$, а также для подобной пирамиды вписанной в сферу, вписанную в исходную пирамиду, при этом размеры новой пирамиды будут меньше размеров исходной пирамиды в $R(h)/r_S(h)$ раз, где $R(h)$ - радиус описанной сферы:

$$R(h) = (h^2 + a^2/2)/2h = a(3+\cos 2\alpha)/4\sin 2\alpha \qquad (5),$$

при $a = 2$ $R(\sqrt{\varphi})/r_S(\sqrt{\varphi}) = (3\varphi+1)/2$.

Впишем теперь в полусферу радиуса $r_{SS}$ пирамиду так, что её вершина будет в точке О (см. рис. 2), а вершины основания $E, F$ и др. будут совпадать с точками касания полусферы с боковыми гранями исходной пирамиды. Эта пирамида будет инвертирована и повёрнута относительно исходной пирамиды (по вертикальной оси) на угол $\pi/4$. Её высота $h_1$ и сторона основания $a_1$ определяются следующими соотношениями:

$$h_1 = a^2 h / 4(h^2 + a^2/4), \qquad a_1 = ah^2/(h^2 + a^2/4) \qquad (6)$$

При $a = 2$ и $h = \sqrt{\varphi}$ получим: $h_1 = \phi^{3/2}$, $a_1 = \phi$, отсюда следует, что у новой пирамиды угол наклона боковой грани к плоскости основания $\alpha_1$ равен

$$\alpha_1 = \mathrm{arctg}(2h_1/a_1) = \mathrm{arctg}(\sqrt{\phi}) = \pi/2 - \alpha \qquad (7),$$

поскольку $\mathrm{arctg}\sqrt{\phi} + \mathrm{arctg}\sqrt{\varphi} = \pi/2$. В связи с этим отметим то, что при замене значений высоты и основания $(h_1 \leftrightarrow a_1)$ новая пирамида становится подобной исходной пирамиде. Так, полагая $a = 2\phi^{3/2}$ получим, что максимум разности $\Delta r(h) = r_{SS}(h) - r_S(h)$ реализуется именно при $h = \phi$, а сумма радиусов равняется высоте пирамиды: $r_{SS}(h) + r_S(h) = \phi^2 + \phi^3 = \phi$ !

Интересно также то, что при $h=\sqrt{\varphi}$ площадь треугольника OEF (см. рис. 2) равна площади треугольника основание которого равна a, а высота - длине сегмента QG, равной $(r_{SS}-h_1)$:

$$a_1 h_1/2=\phi^{5/2}=a(r_{SS}-h_1)/2 \qquad (8)$$

Наконец, при $h=\sqrt{\varphi}$ имеет место экстремум – минимум модуля разности $|h_1(h)-r_S(h)|$ (см. рис. 4)

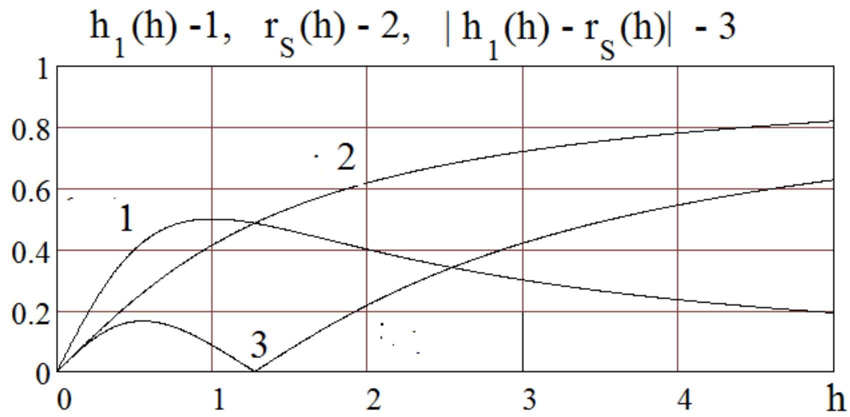



Рис. 4

Разность же функций $h1(h)-r_S(h)$ имеет экстремум - максимум при $h\simeq 0{,}551\simeq\sqrt[3]{\sqrt{\phi}-\phi}\simeq(\sqrt{3}/4)\cdot\sqrt{\varphi}\neq\sqrt{\varphi}$. Этот экстремум, как и ряд других экстремумов при $h\neq\sqrt{\varphi}$, не определяет гармонию данной системы в целом. Отметим, что $h\simeq 0{,}551$ является корнем уравнения $4h^6+3h^4+2h^2-1=0$.

Рассмотрим теперь под каким углом к плоскости основания $\beta$ могли бы направить проектировщики пирамиды восходящую лестницу. Во-первых, они могли бы направить её из точки M в точку Q (см. рис. 2). В этом случае выполнялись бы следующие примечательные соотношения для угла $\beta$ и длины лестницы L:

$$\beta=\mathrm{arctg}\,\phi^{3/2}=\mathrm{arctg}(\sqrt{\varphi}-\mathrm{arc}\sqrt{\phi})=(\mathrm{arctg}\sqrt{\varphi})/2\simeq 25{,}913\,646^{o}, \quad L=\sqrt{2\phi} \qquad (9)$$

Однако, поскольку измерения показывают, что $\beta_{exp}\simeq 26{,}5^{o}$, можно предположить, что был выбран другой вариант, в частности, потому, что он более изящен с математической точки зрения. В нём лестница направляется из точки $M$ в точку, лежащую на высоте пирамиды и отстоящую от основания на расстоянии $1/2 = a/4$. В этом случае угол $\beta$ и длина лестницы $L$ равны:

$$\beta = \mathrm{arctg}(1/2) = \mathrm{arctg}(\varphi) - \mathrm{arctg}(\phi) \simeq 26{,}565\,051^{o}, \quad L = \sqrt{5}/2 = (\phi + \varphi)/2 \qquad (10)$$

Важной особенностью правильной 4-х угольной пирамиды с углом наклона боковой грани к основанию $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\varphi}$ является то, что произвольная фигура, будучи спроецированной с любой боковой грани вначале на основание, а затем на соседнюю боковую грань в итоге даст фигуру, подобную исходной с коэффициентом подобия $\phi$. Действительно, при проецировании размеры фигуры вдоль одной из осей уменьшатся с коэффициентом $k = \cos\alpha = \cos(\mathrm{arctg}\sqrt{\varphi}) = \phi$. При проецировании же с основания на соседнюю боковую грань размеры фигуры уменьшатся в перпендикулярном направлении с тем же коэффициентом $k = \cos\alpha = \phi$. Чтобы убедиться в этом плоскости боковых граней следует повернуть к плоскости основания относительно соседних сторон основания, напр., $AB$ и $AD$. При этом апофемы $SM$ и $SN$ зададут ортогональные направления, вдоль которых происходит изменение размеров проектируемой фигуры.

В этой связи отметим также то, что двугранный угол $\delta$ между боковыми гранями правильной $n$-угольной пирамиды с углом наклона боковых граней к основанию $\alpha$ равен:

$$\cos(\delta/2) = \sin\alpha \cdot \sin(\pi/n) \qquad (11)$$

Для 4-х угольной пирамиды с $n = 4$ и $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\varphi}$ получим: $\sin\alpha = \sqrt{\phi}$ и $\cos(\delta/2) = \sqrt{\phi/2}$, $\delta = \arccos(-\phi^2) \simeq 112{,}455^{o}$.

Таким образом, в данной работе установлена ключевая роль констант системной гармонии $\phi, \varphi$ в обнаруженных замечательных геометрических соотношениях, определяющих геометрию Пирамиды Хеопса.

В связи с установлением особой роли констант $\phi, \varphi$ в самых разных областях знаний укажем, что в работах автора данной статьи [1.2] введено новое истолкование констант $\phi, \varphi$, как инвариантных отношений при движении точки вдоль определённых окружностей инвариантных отношений. В [3,4] установлена связь констант $\phi, \varphi$ с функциями средних значений. В [5-8] найдены электростатические модели инвариантных отношений и произведений в виде длинных параллельных и, соответственно, противоположно- или одноимённо-заряженных тел. При этом найденные соотношения гармонии, выражающиеся через константы $\phi, \varphi$, имеют место при движении точек вдоль различных эквипотенциальных линий: окружностей – для инвариантных отношений или овалов Кассини (в особом частном случае, вдоль лемнискаты Бернулли) – для инвариантных произведений.

### ***Литература***


1. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы длин, площадей и их производных в обобщённой модели золотого сечения. Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 6, - С.162-164.

2. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных. М., Эл. № 77-6567, публ. 17431, 29.04.2012. www.trinitas.ru/ rus/doc/0232/ 009a/1252-shl.pdf

3. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии в обобщённой геометрической модели золотых сечений и функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 1, - С.118-120.

4. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений. М., Эл. № 77-6567, публ. 17485, 28.05.2012. www.trinitas.ru/ doc/0232/009a/1252-shl.pdf

5. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для электростатической модели обобщённых золотых сечений – длинных параллельных противоположно-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, - С.131-134.

6. *Шелаев А.Н.* Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений. М., Эл. № 77-6567, публ. 17511, 08.06.2012. www.trinitas.ru/ doc/0232/009a/1252-shl.pdf

7. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для электростатической модели обобщённых золотых произведений – длинных параллельных одноимённо-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 4, -С.95-98

8. *Шелаев А.Н.* Электростатические и гравитационные модели инвариантных соотношений.М.. Эл № 77-6567, публ.17609, 06.08.2012. . www.trinitas.ru/ doc/0232/009a/1252-shl.pdf.