

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

Предлагается краткое изложение теории подобия с новым взглядом на некоторые ее положения, касающиеся критериев подобия.

Теория подобия является прикладным научным направлением, обосновывающим правила, по которым реализуется моделирование при проведении эксперимента. Предметом внимания теории подобия являются тела, жидкости и газы и процессы, с ними происходящие. Для краткости они объединены одним названием – событие.

1.Определение подобия

Два события называются подобными, если возможно такое преобразование определяющих событие параметров, после которых события выглядят одинаковыми.

2.Пример подобия

Этот пример иллюстрирует преобразование, приводящее к установлению подобия.

Великан и лилипут похожи как клоны, но отличаются габаритами. Рост великана три метра, а его ступня тридцать сантиметров. Рост лилипута тридцать сантиметров, а его ступня три сантиметра. После деления роста на размер ступни получаем, что рост великана и лилипута равен 10, то есть ,как бы, одинаков. Согласно определению подобия великан и лилипут подобны.

В этом примере преобразованием было деление роста на размер ступни. Результатом явилось совпадение параметров великана и лилипута, что в действительности не имеет места. Состоялся перенос из реальности в некоторое виртуальное пространство, в котором длины измеряются не в метрической системе

единиц, а в длинах, связанных с объектами нашего внимания. В технике такое встречается достаточно часто. Например, артиллерист отличает пушку от гаубицы по длине стволов, измеренных не в метрах, а в калибрах орудий. Из приведенного примера следует, что каждый параметр, измеренный в независимых от события единицах, таких как метр, может быть измерен еще и в единицах, связанных с событием, например, в размере ступни или калибре орудия.

Второй вывод заключается в том, что для выявления подобия следует переводить параметры события из независимой системы измерения типа международной системы СИ, в связанную с событием систему измерений.

3. Поиск критериев подобия

Мяч диаметром d_m массой m кг подбрасывается вертикально вверх с начальной скоростью v м/с. На полет мяча влияют плотность воздуха ρ кг/м³ и притяжение Земли, характеризуемое ускорением силы тяжести g м/с². Следует обратить внимание на то, что все пять параметров постоянные величины.

3.1. Упомянутые пять параметров представляют собой список №1, который является необходимым и достаточным для того, чтобы однозначно определить параметры полета мяча, образующие список №2. Последний включает, например, высоту подъема мяча h_m , время t_c его возвращения на землю. Список №2 в ограничениях не нуждается.

3.2. Список №1 содержит параметры с независимыми от события размерностями, которых в нашем примере пять. Из них только три, а именно кг, м, с, являются основными. Остальные размерности образуются из этих трех. Чтобы решить задачу установления подобия, необходимо избавиться от тех и других.

3.3. Прежде чем начинать процесс отказа от независимой системы измерений, необходимо определиться со связанными единицами измерений которые должны придти на смену независимым. Таких связанных единиц измерений должно быть три по числу основных независимых единиц измерений. Можно выбрать любое сочетание трех параметров из пяти списка №1 с одним условием – в

размерностях выбранных связанных единиц измерений должны встречаться, хотя бы по разу, все основные единицы измерений.

Пригодные сочетания: $dgr, pgu, \rho m, pmg, dmg, mgu, dpu, dum$.

Остановим свое внимание на варианте dum в качестве основных единиц измерений в связанной системе мер.

3.4. Определяющим действием в теории подобия является переход от независимой системы измерений к связанной. Он осуществляется умножением параметров списка №1 на основные единицы выбранной связанной системы мер в степенях, при которых параметры становятся безразмерными.

Истинные параметры	Преобразующие множители	Безразмерные параметры
d_m	d^{-1}	$d/d=1$
$m_{кг}$	m^{-1}	$m/m=1$
$v_{м/с}$	v^{-1}	$v/v=1$
$\rho_{кг/м^3}$	$m^{-1}d^3$	$\rho d^3/m=N$
$g_{м/с^2}$	dv^{-2}	$gd/v^2=1/Fr$

После таких преобразований два события считаются подобными, если у них совпадут безразмерные параметры N и Fr , получившие название критериев подобия. Критериям подобия принято давать имена известных ученых, например, Fr —число Фруда. Многие критерии подобия остаются безымянными.

4. Другие критерии подобия

4.1. Среди параметров списка №1 могут присутствовать векторные величины, что вызывает необходимость сформулировать условия подобия с учетом направления этих векторов. Можно показать, что условием подобия является равенство углов, определяющих ориентацию всех векторов из списка №1. Эти углы

имеют статус критериев подобия, несмотря на наличие у них размерности в градусах или радианах.

4.2.К числу параметров, изначально являющихся критериями подобия, относятся также безразмерные коэффициенты, такие, как, например, коэффициенты трения, аэродинамического сопротивления и другие.

4.3.В качестве критерия подобия может выступать не только постоянная величина, но и функция от параметров, меняющихся в процессе происходящего события. Например, коэффициент аэродинамического сопротивления летательного аппарата при больших скоростях зависит от числа Маха $c_x=f(M)$, где $M=v/a$, v – скорость аппарата, a – скорость звука.

События подобны, если коэффициенты сопротивления при полете аппаратов одинаковы при всех значениях чисел M . Встречаются и более сложные критерии подобия, зависящие от нескольких параметров события.

Когда критерий подобия представлен функцией, говорят о нелинейном подобии. Ранее речь шла о линейном подобии. Такое деление определяет два существенно различных направления в теории подобия, что отразилось на моделировании событий, основой которого является теория подобия.

5. Моделирование

Моделированием называется получение информации о событии подменой этого события ему подобным. При реализации модельного эксперимента следует руководствоваться правилами, приведенными ниже.

5.1. Линейное моделирование

В этом разделе приводится метод определения критериев подобия, способ обеспечения их равенства и порядок реализации модельного эксперимента. Перечисляются правила, которые при этом должны соблюдаться, чтобы избежать возможных ошибок. Изложение материала сопровождается примером из области баллистики движения тел в атмосфере. С него и начнем.

Полигон располагает двумя пневматическими пушками разного калибра для испытаний парашютов на прочность. Парашют крепится к холостому снаряду и при

выстреле испытывает максимальное натяжение строп. Выстрел из пушки при этих испытаниях характеризуется следующими параметрами.

Список №1. Исходные параметры

m - масса снаряда,

v – дульная скорость снаряда,

F - площадь купола парашюта,

ρ - плотность воздуха,

g - ускорение свободного падения,

Θ - угол возвышения ствола.

Это необходимый и достаточный список параметров, от которых зависит эксперимент. Все шесть параметров известны до выстрела и не меняются в процессе выстрела. Их численные значения приведены на рис.1А.

Зная цель эксперимента, следует заранее составить список параметров, которые нужно определить в результате его проведения.

Список № 2.Искомые параметры

L - дальность стрельбы,

T - время полёта снаряда,

R - максимальное натяжение строп.

Натурный парашют площадью 100м^2 может быть испытан только на пушке большого калибра. Из-за технических проблем принимается решение проводить испытания на пушке малого калибра. Задача состоит в том, чтобы с помощью теории подобия определить исходные параметры модельного эксперимента.

Приступая к определению параметров модельного эксперимента, следует поставить цель избавиться от привычных единиц измерений, от килограмм, метров, секунд и их производных единиц, и перейти к связанным с выстрелом единицам измерений. При этом будем руководствоваться определенными правилами.

Правило 1.Число основных связанных единиц измерений должно быть равно числу основных единиц из международной системы единиц СИ.

В нашем случае их должно быть три, поскольку в списке №1 встречаются три размерности: кг, м, с. Из списка №1 приходится выбирать три параметра из пяти.

Правило 2. Основные единицы связанной системы измерений должны содержать все основные размерности исходной системы измерений.

gFv -система измерений непригодна, так как не содержит размерность массы, а ρFt -система не содержит размерность времени. Список возможных вариантов, из которых можно было бы выбирать связанную систему измерений, выглядит следующим образом: $Fg\rho$, ρgv , $m\rho v$, mFv , mgr , mFg , $Fv\rho$, mgv .

Правило 3. Ни одна связанная единица измерений не должна равняться нулю.

Нулевой меркой ничего не измеришь.

Выбор пал на площадь парашюта F , дульную скорость v и массу снаряда m . Величины этих трех параметров стали единицами измерений. Образовавшуюся связанную систему измерений будем именовать Fvm -системой измерений.

Правило 4. Производные единицы измерений следует образовывать умножением и делением параметра из списка №1 на основные связанные единицы измерений, вынесенные в название выбранной системы единиц, добиваясь исчезновения независимых единиц измерений.

Рис.1. иллюстрирует переход от параметров в системе с независимыми размерностями, принятыми в СИ, к этим же параметрам в связанной системе единиц измерений. Черта над параметром является знаком того, что параметр находится в виртуальном пространстве, где все измеряется в Fvm -системе единиц измерений. Размерностям килограмм, метр, секунда там нет места.

Следует обратить внимание на то, что какую бы связанную систему измерений мы не выбрали, параметры, не удостоенные названия основной единицы измерений, превратятся в виртуальном пространстве в критерии подобия. Так

плотность воздуха стала числом $N = \frac{\rho \cdot F \cdot \sqrt{F}}{m}$, а ускорение свободного падения g

числом $1/Fr$, где Fr – число Фруда $Fr = \frac{v^2}{g \cdot \sqrt{F}}$.

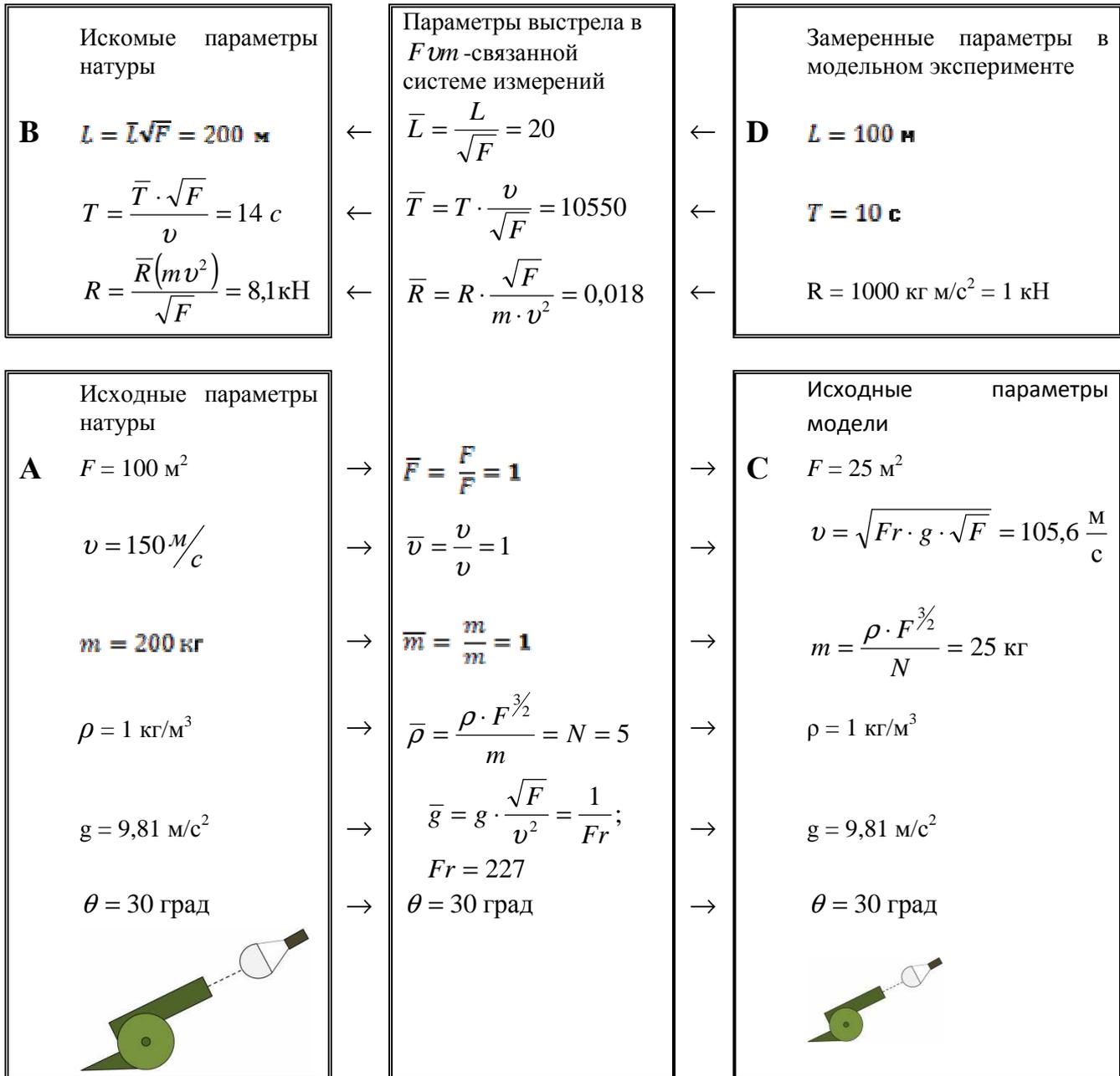


Рис. 1. Схема реализации модельного эксперимента

Перейдем к определению параметров модельного эксперимента. Площадь модельного парашюта была выбрана 25 м^2 . Из условия равенства чисел Фруда определяется дульная скорость $v = 105,6 \text{ м/с}$, а из условия равенства чисел N масса снаряда должна быть равна 25 кг .

Правило 5. При наличии в списке №1 исходных данных векторных величин, углы между векторами являются критериями подобия.

В нашем примере таким критерием подобия является угол возвышения ствола Θ . При переходе от натуральных параметров к модельным он остается неизменным.

Следующий шаг на пути моделирования это производство самого выстрела с замером параметров, указанных в списке №2: дальности полета снаряда, времени полета и натяжения строп парашюта. Пусть это будут величины, указанные на рис.1D. Далее следует пересчет замеренных параметров в связанную систему единиц измерений с последующим пересчетом полученных результатов в систему СИ с целью определения ожидаемых значений дальности, времени и нагрузки при натурном выстреле из большой пушки, рис.1B.

5.2. Нелинейное моделирование

Необходимость в нелинейном моделировании возникает, когда имеется математическая модель натурального события, но отсутствует информация о величине входящей в эту математическую модель функции, без знания которой использование математической модели невозможно. Такой функцией может быть упомянутая зависимость $c_x=f(M)$. Натурный эксперимент по воспроизведению события может быть затруднен или невозможен. Возникает потребность в моделировании натурального события в более доступных условиях проведения эксперимента. При этом модельный эксперимент должен быть подобен натурному событию.

Применительно к нелинейному подобию определение подобия выглядит несколько иначе, чем определение, данное в начале статьи.

Два события нелинейно подобны, если их математические модели содержат одинаковую функцию, и значения этой функции для обоих событий при одинаковых значениях аргумента равны.

При нелинейном моделировании поступают следующим образом. В математической модели выделяют фрагмент, по которому отсутствует информация о его величине. Этот фрагмент, будь то константа или функция, переводят в связанную систему единиц измерений и наделяют его полномочиями критерия

подобия. Далее подбирают условия проведения модельного эксперимента, в котором этот критерий подобия может быть определен.

В нашем примере математической моделью являются уравнения баллистики, а критерием подобия – переменный коэффициент сопротивления $c_x=f(M)$. Геометрически подобную модель тела помещают в сверхзвуковую аэродинамическую трубу и продувают модель на разных скоростях, измеряя скорость потока и силу сопротивления R модели. Коэффициент сопротивления определяют по формуле $c_x = \frac{2 \cdot R}{F \cdot \rho \cdot v^2}$, где ρ - массовая плотность воздуха, F - площадь миделева сечения тела.

Полученную зависимость $c_x=f(M)$ используют в уравнениях баллистики для расчета траекторных параметров натурального объекта.

Список использованных источников

- 1 Веников В.А. Теория подобия и моделирование, М., Высшая школа, 1968г.
- 2 Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике, М., Наука, 1967 г.