С.Л. Василенко

Сокрытые закономерности циклических числовых форм

То ли неудачи цикличны,
то ли циклы неудачны
(М. Мамич)

Истоки предмета исследований. Всякое большое происходит из малого. Незначительное рождает существенное.

За мелководьем часто идёт глубина.

Мелочи, способны решать всё и, вероятно, есть самое главное.

Наша жизнь тоже соткана из многочисленных нюансов и мелочей.

Часто бывает, как несущественная зацепка способна выстроить полноценную логическую цепочку к «месту, где зарыта собака». Когда начинаешь достоверно понимать, что именно в этом-то и заключалась суть исследуемого вопроса...

Недавно на страницах АТ прозвучала критика [1]: «Кстати (точнее, некстати), о моей статье [2] *не упомянуто* в работе С.Л. Василенко [3], не без претензий, с его точки зрения, на объективное и справедливое подведение итогов Международного Online-семинара... В его работе, если быть точным, упомянуты и проанализированы пять моих работ и *упущена* статья [2], опубликованная именно в рамках Online-семинара... Полагаю, что в *утерянной* работе есть некие рациональные зерна» (*курсив наш – С.Л.*).

Прежде всего, отметим, что публикация [2] не потерялась. Как и прежде, она находится по своему старому электронному адресу.

То, что она не вошла в список цитируемой литературы из 102 наименований [3], из которых пять принадлежат перу-авторству В.Шенягина, произошло, к сожалению, случайно.

Чисто механическое упущение.

Да иначе и быть не могло, ибо там исследуется числовая гармония. – Интересная для нас проблематика, которой посвящено немало собственных статей, в частности [4–9].

Так или иначе, но тематика работ [1, 2], которая в математике достаточно хорошо проработана, невольно подтолкнула нас к более тщательному её рассмотрению и ... неожиданно привела к новым любопытным результатам.

Ради этого стоило ещё раз пройтись по глубинным анналам свойств-закономерностей циклических чисел.

Терминологические наслоения. Прежде всего, несколько небольших замечаний.

По отношению к общей числовой форме вызывает некоторое сомнение в строгости-корректности использования в [1] таких общих категорий как "анализ" и "синтез".

Формальное разбиение числа на отдельные наборы цифр, на наш взгляд, слабо подходит под действо анализа. Равно как и обратная механическая сборка.

В математике принято исследовать-изучать свойства чисел.

«Анализ числа» в чистом виде больше тяготеет к нумерологии, например [10].

Что касается синтеза, то генерируют (синтезируют) обычно последовательности или числовые ряды с наличием общих характерных особенностей.

«Синтез числа» представляется чем-то туманным. Больше с оттенком философствования.

Понятия "бифуркации" и "тектоники" по отношению к числам, по нашему разумению, вообще выглядят как-то невразумительно.

Так или иначе, но подобные терминологические излишества-наслоения в теории чисел пока «спросом не пользуются».

Пробы наработок. Наряду с геометрией, оперирование с числами – одна из древних и самобытных областей математики.

Количество выполненных исследований в этом направлении во всех уголках мира практически безмерно.

Поэтому в подаче того или иного материала велика вероятность ступить на давно протоптанные стёжки-дорожки.

Основание десятичной системы счисления имеет два сомножителя 10 = 2·5.

Допустим, мы хотим "пробежать" все цифры (0–9) в порядке арифметической прогрессии по модулю 10.

Тогда добавки-слагаемые не должны иметь общих сомножителей с двойкой и пятёркой.

Таковыми являются пары (1, 9) и (3, 7).

В частности, получаются два циклично-реверсных равнозначных варианта:

$$a_i = (a_{i-1} + 3) \pmod{10} \;\rightarrow\; 1470369258,$$

$$a_i = (a_{i-1} + 7) \pmod{10} \;\rightarrow\; 1852963074,$$

где $a_0 = 1,\ i = 1, 2, 3 \ldots$

То есть от чисел отсекаются старшие разряды и остаются только последние цифры.

Выискивать среди этих цифровых наборов начальные числа Фибоначчи (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8...) и Люка (2, 1, 3, 4, 7...) – занятие бесперспективное. Ибо вначале плотность их очень велика, и они наличествуют практически в любых многоразрядных числах.

Пытаться найти в этих 10-значных числах или их циклических перестановках что-либо сакрально-генетическое тоже малополезное творчество.

Они нигде не встречаются, разве что в бесконечной периодической последовательности последних цифр $c_n = c_{10k+n}$ для k = 1, 2, 3 … (A211770[1]):

1234567890, 24680, 3692581470, 48260, 50, 62840, 7418529630, 86420, 9876543210, 0,

1234567890, 24680, 3692581470, 48260, 50, 62840, 7418529630, 86420, 9876543210, 0, ...

Причём данное свойство характерно для любой позиционной системы счисления с целочисленным основанием.

Далее в работах [1, 2] описаны периодические свойства обыкновенных дробей n/p в их десятичной записи, где p = 7, 17, 47 и 97; $0 < n < p$ – целые положительные числа.

Это известные частные случаи более общего раздела теории чисел.

Циклические и "длинные" простые числа.

Полно-повторное простое p (full reptend prime) [11, 12] – такое число, что его обратная величина $1/p$ имеет в десятичной дроби максимальный период из p–1 цифр.

Иногда его называют *"длинным" простым числом* [13, с. 157–171].

Простое число p будет длинным только тогда, когда 10 является примитивным корнем по модулю p, то есть $10^k = 1 \pmod{m}$ для $k = p$–1 и не равно 1 для меньших значений k.

Напомним, что примитивный (первообразный) корень[2] по модулю m – целое число g такое, что $g^{\varphi(m)} = 1 \pmod{m}$ и $g^k \neq 1 \pmod{m}$ при $1 \le k < \varphi(m)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера.

Иначе говоря, степени g^k несравнимы между собой (по модулю) и образуют приведенную систему вычетов по модулю m. Первообразные корни существуют только для модулей вида $m = 2, 4, p^{\alpha}, 2p^{\alpha}$, где $p > 2$ – простое число.

---

[1] Библиотека числовых последовательностей OEIS – http://oeis.org/.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Primitive_root_modulo_n; http://mathworld.wolfram.com/PrimitiveRoot.html.

В этих случаях *мультипликативные группы* приведенных классов вычетов по модулю устроены наиболее просто, являясь циклическими группами.

Например, 7 – полно-повторное число:

$$\left(10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5,\ 10^6\right) = (3, 2, 6, 4, 5, 1)\ (\mathrm{mod}\, 7)\ .$$

Подобные числа образуют последовательность (A001913):

7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229, 233, 257, 263, 269, 313, 337, 367, 379, 383, 389, 419, 433, 461, 487, 491, 499, 503, 509, 541, 571, 577, 593 ...

Периодические части (отмечены скобками) десятичных разложений обратных "длинных" чисел называют *циклическими числами* [14, 15]:

1/7 = 0,(142857);	142+857 = 999;
1/17 = 0,(0588235294117647);	05882352 + 94117647 = 99999999;
1/19 = 0,(052631578947368421);	052631578 + 947368421 = 999999999;
1/23 = 0,(0434782608695652173913);	04347826086 + 95652173913 = 99999999999;
1/29 = 0,(0344827586206896551724137931);	03448275862068 + 96551724137931 = 99999999999999.

```
142857 × 1 = 142857
142857 × 5 = 714285
142857 × 4 = 571428
142857 × 6 = 857142
142857 × 2 = 285714
142857 × 3 = 428571
```

Циклическое число из n цифр имеет одно любопытное свойство: если его умножать на любое целое число от 1 до n, то все произведения имеют точно такие же цифры и в том же порядке, но перемещающиеся по кругу, образуя циклические перестановки!

Если цифры циклического числа разделить пополам и полученные числа сложить, то сумма представляет собой последовательность из одних девяток. – Это частный случай теоремы[3] французского математика Миди [16].

Отсюда также следует, что все циклические числа делятся на 9.

Число 142857 – по праву одно из самых замечательных среди целых чисел.

Не считая вырожденного случая единицы, это наименьшее циклическое число.

В настоящее время не известен общий метод для определения полно-повторных простых чисел и соответствующих им циклических чисел.

Сколько циклических чисел? Количество циклических чисел, не превышающих 10^n, для натуральных n образуют последовательность (A086018):

1, 9, 60, 467, 3617, 25883, 248881, 2165288, 19016617...

Была высказана гипотеза (пока не доказана), что существует бесконечное множество циклических чисел. Причем их доля среди всех простых чисел выражается константой Артина [17, 18] (A005596), которая определяется бесконечным произведением:

$$C = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_k^2 - p_k}\right) \approx 0.3739558, \qquad (1)$$

где $p_k = \{\ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\ ...\ \}$ – простые числа.

Таким образом, среди простых чисел циклические числа составляют около 37,4 %.

Величина C немного не дотягивает до малого числа Фидия $\phi = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}382$.

---

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Midy%27s_Theorem.

Но она вполне может пополнить банк данных модельных структур "квазиЗС", похожих на константу золотого сечения (ЗС) [19].

Надо сказать, сходимость формулы (1) неважная.

Константа C связана с дзета-функцией[4] $P(n)$ простых чисел:

$$\ln C = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{L_n - 1}{n} P(n), \tag{2}$$

где $L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n} = L_{n-1} + L_{n-2}$ – числа Люка, $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$; $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$;

$P(n) = \prod_p p^{-n}$ – бесконечное произведение обратных степеней простых чисел.

Скорость сходимости для суммирования (2) уже намного быстрее.

Заметим, что константа Артина имеет более общее обоснование-происхождение.

Пусть $n > 1$ – целое число, не являющееся полным квадратом и $n = n'b^2$, где n' – бесквадратная часть-число[5] (не делится ни на один квадрат, кроме 1), несравнимая с 1 по модулю 4: $n' \neq 1 \pmod 4$.

Тогда плотность $S(n)$ – множество простых чисел p таких, что n является примитивным корнем по модулю p, не зависит от n и равна константе Артина (1).

Если $n' = 1 \pmod 4$, а n по-прежнему не является полным квадратом, то плотность уже не равна C, но её допустимо выразить явной формулой [20]

$$C' = C \cdot \left[1 - \mu(n') \prod_{q|n'} \frac{1}{q^2 - q - 1} \right], \tag{3}$$

где $\mu(n')$ – функция Мёбиуса.

Особые частные случаи записываются для простого числа $n' = p$

$$C' = C \cdot \left(1 + \frac{1}{p^2 - p - 1} \right) \tag{4}$$

или произведения $n' = p \cdot q$ двух простых чисел, сравнимых с 1 по модулю 4:

$$C' = C \cdot \left(1 + \frac{1}{p^2 - p - 1} \cdot \frac{1}{q^2 - q - 1} \right). \tag{5}$$

Обратим внимание, что квадратные трёхчлены в (3)–(4) с единичными коэффициентами могут быть представлены через иррациональную константу Ф:

$$p^2 - p - 1 = (p - \Phi)\left(p + \Phi^{-1}\right);$$

$$q^2 - q - 1 = (q - \Phi)\left(q + \Phi^{-1}\right).$$

За всем этим в аналитических формах (1)–(5) стоит скрытая предельная золотоносность циклических чисел.

---

[4] http://mathworld.wolfram.com/PrimeZetaFunction.html.

[5] Бесквадратное число // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=50553095.

Вместо заключения. Таким образом, циклические числа и соответствующие им "длинные" простые числа посредством константы Ф непосредственно соотносятся с понятием, которое в математике характеризуется золотым сечением или в английской транскрипции золотым отношением (*golden ration*).

Как здесь не вспомнить, что вероятность сократимости наугад выбранной обыкновенной дроби любого порядка составляет тоже квазиЗС [19] $\nu = 1 - 6/\pi^2 \approx 0{,}392$.

То есть вполне оправданно можно предположить, что ряд основополагающих количественных характеристик целых чисел определённым образом "скучивается" вокруг золотоносного фактора:

$$0{,}374 \;\Rightarrow\; \phi \approx 0{,}382 \;\Leftarrow\; 0{,}392 .$$

В этом есть своя обусловленная закономерность.

При всей своей аксиоматической абстрактности числа способны отражать-описывать количественные аспекты бытия.

И если абсолютные значения чисел эквивалентно к материальным объектам ещё как-то под вопросом, ввиду условности-субъективности физических размерностей, то числовые отношения, включая их предельные формы, вполне самостоятельны и состоятельны.

Ну а то, что циклические числа и обыкновенные дроби в своих предельных проявлениях "грудятся" рядом с ЗС, оставляет нам надежду когда-нибудь отобразить основы мироздания с помощью нехитрого набора фундаментальных положений, в том числе основанных на константах, воспроизводящих отношение.

Выражаем признательность В. Шенягину за его критические высказывания, которые в итоге позволили найти на свежие интонации-созвучия в числовой гармонии – гармонии цикличности через числовые формы.

Литература:

1. *Шенягин В.П.* Тектоника чисел: анализ и синтез // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17793, 19.12.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162042.htm.

2. *Шенягин В.П.* Коды чисел: энтропийные, ключевые, бифуркационные. FLT-основа генетических кодов 2581470369 и 7418529630 // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17014, 23.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322042.htm.

3. *Василенко С.Л.* Математика и гармония: семинар глазами участника // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17290, 07.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321240.htm.

4. *Василенко С.Л.* Числовая гармония моноцифровой мозаики: репьюниты и репдигиты // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16152, 10.11.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161720.htm.

5. *Василенко С.Л.* Гармония самогенерирующихся чисел // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16261, 03.01.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161754.htm.

6. *Василенко С.Л.* "Двенадцать" в основаниях мироустройства // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 07.08.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11264.html.

7. *Василенко С.Л.* Числовые совпадения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17477, 23.05.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161960.htm.

8. *Василенко С.Л.* Числовая гармония Судоку // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 25.07.2012. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12147.html.

9. *Василенко С.Л.* Золотая константа в числовых рядах // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 10.10.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=87&sm=2.

10. *Корнеев А.А.* Метод анализа чисел – «нырок» (детально). – 1989. – http://www.xsp.ru/author/outpub.php?id=432.

11. *Weisstein E.W.* Full Reptend Prime // From Math World. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/FullReptendPrime.html.

12. *Full reptend prime* // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Full_reptend_prime.

13. *Conway J.H., Guy R.K.* The Book of Numbers. – New York: Springer-Verlag, 1996.

14. *Cyclic number* // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Cyclic_number.

15. *Weisstein E.W.* Cyclic Number // From Math World. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/CyclicNumber.html.

16. *William G.L.* A Theorem on Repeating Decimals // The American Mathematical Monthly, 74 (1967), 669–673.

17. *Weisstein E.W.* Artin's Constant // From Math World. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/ArtinsConstant.html.

18. *Artin's conjecture* on primitive roots // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Artin%27s_conjecture_on_primitive_roots.

19. *Василенко С.Л.* Квазизолотая пропорция в структурированных системах // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16054, 30.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.

20. *Matthews K.R.* A Generalization of Artin's Conjecture for Primitive Roots // Acta Arith., 29 (1976), 113–146.

Украина, Харьков

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html