Шелаев А.Н. **Сведения об авторе**

К ВОЗМОЖНОСТИ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ГАРМОНИИ – АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ В ЦЕЛОМ И ТРАНСЦЕНДЕНТНОЙ В ДЕТАЛЯХ НА ПРИМЕРЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАНКА

Исследование равновесного теплового излучения (излучения «чёрного» тела), описываемого формулами Планка (см., напр., [1]), на системную гармонию, понимаемую как совокупность соотношений, точно выражающихся через фундаментальные физические и математические константы, было начато автором статьи в [2,3,4].

Важность всесторонних исследований излучения чёрного тела обусловлена тем, что оно является базовым объектом оптики, термодинамики, квантовой механики и даже квантовой гравитации, поскольку, как выяснилось, чёрные дыры также могут излучать такое излучение [5].

В [2] было показано, что равновесное тепловое излучение не только выражается через фундаментальные физические константы (h - постоянную Планка, k - постоянную Больцмана, c - скорость света) и температуру T, но и через фундаментальные математические константы – трансцендентные числа π, e и алгебраические числа $\phi=(-1+\sqrt{5})/2\simeq 0,618$ и $\varphi=(1+\sqrt{5})/2\simeq 1,618$, связанные каноническими соотношениями $\varphi=1+\phi=1/\phi$ При этом было установлено, что суммарную плотность энергии излучения можно представить изящной комбинацией в виде суммы двух компонент, отношение суммарной плотности энергий которых равно $3/5=(\phi^2+\varphi^2)/(\phi+\varphi)^2$.

В [3] найдены выражения для спектральных плотностей энергии этих двух компонент, при которых выполняются необходимые для аппроксимации условия: 1) суммарная плотность энергии излучения этих двух компонент равна суммарной плотности, вычисляемой по формуле Планка; 2) отношение суммарной плотности энергий компонент равно 3/5; 3) сумма спектральных плотностей этих компонент близка к планковской плотности излучения (максимальное отклонение $\leq 10^{-2}$).

Однако в [2,3] для формул Планка при детальном анализе (в т. ч. при нахождении экстремумов функций) не было найдено ни одного гармонического соотношения, точно выражающегося через фундаментальные математические константы, хотя было найдено множество характерных квазигармонических соотношений, выполняющихся с высокой точностью $\leq 1\cdot 10^{-4}$. В этой связи в [4] был поставлен принципиальный вопрос о возможности сосуществования для идеальных систем гармонии в целом и квазигармонии в деталях. Поиску ответа на этот вопрос и на вопрос о возможности сосуществования различных типов гармонии и посвящена данная работа

Предложенная Планком формула для плотности спектрального излучения чёрного тела $u_\nu d\nu$ ($[u_\nu d\nu] = \text{Дж}/\text{м}^3$) в интервале частот [$\nu$, $\nu + d\nu$] имеет вид:

$$u_\nu d\nu = (8\pi h / c^3)\cdot \nu^3 d\nu / [\exp(h\nu / kT) - 1] \tag{1}$$

Спектральную плотность излучения по длинам волн λ запишем в виде:

$$u_\lambda d\lambda = (8\pi hc)\cdot d\lambda / \lambda^5 [\exp(hc / kT\lambda) - 1] \tag{2}$$

Интегрируя (1) и (2) по всем частотам и длинам волн (процесс интегрирования описан в [2]) получим формулу для суммарной плотности излучения u_Σ:

$$u_\Sigma = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = 8\pi^5 (kT)^4 / 15(hc)^3 \tag{3}$$

Из (3) следует, что суммарная плотность излучения не только выражается через фундаментальные физические константы c, h, k, но и, как впервые показано в [2], через фундаментальные математические константы π, ϕ, φ. Действительно, $8/15 = (3+5)/3\cdot 5 = (1/3 + 1/5)$, а числа 3, 5 красиво и симметрично выражаются через константы ϕ и φ: $3 = \phi^2 + \varphi^2$, $5 = (\phi + \varphi)^2$! Кроме того, числа 3, 5 определяют в (1), (2) спектральные плотности излучения по частотам (ν^3) и длинам волн ($1/\lambda^5$). Наконец, числа 3, 5, 8 являются членами фундаментальной последовательности Фибоначчи: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \varphi$, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n/F_{n+1} = \phi$.

В итоге суммарное излучение Планка можно представить в виде суммы двух слагаемых (компонент):

$$u_\Sigma = ((kT)^4/(hc)^3)\cdot\pi^5[1/(\phi^2+\varphi^2)+1/(\phi+\varphi)^2] \qquad (4)$$

Для упрощения анализа введём две безразмерные переменные α и β, пропорциональные ν и λ: $\alpha = \nu\cdot h/kT$ и $\beta = \lambda\cdot kT/hc$, $\alpha\cdot\beta = 1$. При этом спектральные плотности излучения (1), (2) выразятся через следующие функции $u_\nu(\alpha)$ и $u_\lambda(\beta)$:

$$u_\nu(\alpha) = \alpha^3/(e^\alpha - 1), \qquad u_\lambda(\beta) = 1/\beta^5(e^{1/\beta}-1) \qquad (5)$$

$$u_\nu d\nu = A\cdot u_\nu(\alpha)d\alpha, \quad u_\lambda d\lambda = A\cdot u_\lambda(\beta)d\beta, \quad A = 8\pi(kT)^4/(hc)^3 \qquad (6)$$

$$J = \int_0^\infty u_\nu(\alpha)d\alpha = \int_0^\infty u_\lambda(\beta)d\beta = \pi^4/15 = (\pi^4/8)\cdot(1/5+1/3) \qquad (7)$$

Графики функций $u_\nu(\alpha)$ и $u_\lambda(\beta)$ показаны на рис. 1, 2.

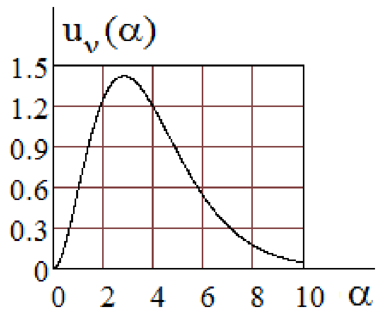

Рис. 1

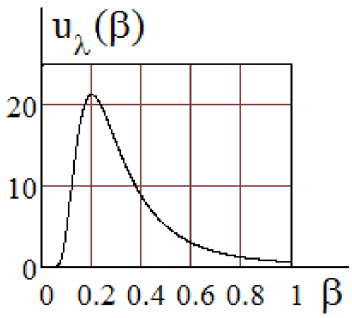

Рис. 2

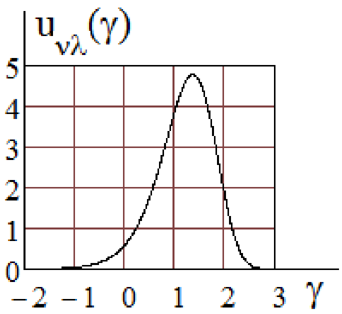

Рис. 3

Максимумы этих функций определяются из следующих уравнений:

$$e^{-\alpha} = 1-\alpha/3,\ \alpha_{max} \simeq 2{,}821\,439\,372,\ e^{-1/\beta} = 1-1/5\beta,\ \beta_{max} \simeq 0{,}201\,405\,235 \quad (8)$$

Учитывая, что $\beta = 1/\alpha$, уравнения (8) можно свести к одному уравнению

$$e^{-\alpha_n} = 1-\alpha_n/n, \qquad n = 3, 5 \qquad (9),$$

при этом $\alpha_3 = \alpha_{max} = 2{,}821\,439\,372$, $\alpha_5 = 1/\beta_{max} \simeq 4{,}965\,114\,231$.

Важно то, что в отличие от суммарного излучения (4) для соотношений (8) не было найдено аппроксимаций через константы ϕ, φ с точностью менее 10^{-5}. Так, $\alpha_{max} \simeq \varphi\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} / \pi \simeq 2{,}820\,969$, $\beta_{max} \simeq 1/5 = (\phi + \varphi)^{-2}$ с точностью $\leq 10^{-3}$. При этом $2 = \phi \cdot \varphi + \varphi \cdot \phi = \phi^2 + \phi^1 + \phi^0 = \sqrt{\phi^2 + \phi \cdot \varphi + \varphi^2}$, $3 = \phi^2 + \varphi^2$, $5 = (\phi + \varphi)^2$.

Максимальная точность $\sim 10^{-5}$ достигнута в следующих аппроксимациях: $\alpha_{max} \simeq \sqrt{(5 + 2 \cdot 3) / (\phi^2 + 1)} \simeq 2{,}821\,289$, $\beta_{max} \simeq \varphi^2 / (3 + 2 \cdot 5) \simeq 0{,}201\,387$.

О взаимосвязи и квазигармоничности экстремумов говорит не только то, что они определяются трансцендентными уравнениями (9) одного типа, но и то, что их отношение $\alpha_{max} / \beta_{max} = \alpha_3 \cdot \alpha_5 \simeq 14{,}009 \simeq 2\pi(\phi + \varphi) \simeq 14{,}049$.

Величины экстремумов также аппроксимируются квазигармонически:

$$u_\nu(\alpha_{max}) \simeq 1{,}421\,435 \simeq 2(\phi + \varphi) / \pi \simeq 1{,}423 \simeq \sqrt{3}\varphi\sqrt{\sqrt{\phi} + \sqrt{\varphi}} / 2\sqrt{2} \simeq 1{,}421\,490 \ ;$$

$$u_\lambda(\beta_{max}) \simeq 21{,}201\,435 \simeq (\phi^8 + \varphi^8) / (\phi + \varphi) \simeq 21{,}019\,039 \simeq 5^2 2\sqrt{\varphi} / 3 \simeq 21{,}200\,327 .$$

Интересно также то, что $u_\lambda(\beta_{max}) / u_\nu(\alpha_{max}) \simeq 14{,}915 \simeq 3 \cdot 5 = (\phi^2 + \varphi^2) \cdot (\phi + \varphi)^2$.

Важно, что длины волн для максимумов u_ν, u_λ различны: $\lambda_\nu = hc / kT\alpha_{max}$, $\lambda_\lambda = hc\beta_{max} / kT$, $\lambda_\lambda / \lambda_\nu = 0{,}568 \simeq \sqrt{\phi^2 + \varphi^2 + (\phi + \varphi)^2} / (\phi + \varphi)^2 \simeq 0{,}566$. Причём в закон смещения Вина входит λ_λ: $\lambda_\lambda \cdot T = hc\beta_{max} / k \simeq 0{,}289\,789$ см$\cdot$К.

Различие λ_ν и λ_λ связано с неравенством интервалов $d\nu$ и $d\lambda$ в (1), (2). Для устранения этого неравенства воспользуемся тем, что $\lambda = c / \nu$ и $|d\lambda| = c|d\nu| / \nu^2$, $|d\lambda| / (c / \nu) = |d\lambda| / \lambda = |d(\ln\lambda)| = |d\nu| / \nu = |d(\ln\nu)|$. Далее, выделим в (1) и (2), соответственно, $d\nu / \nu = d\alpha / \alpha = d(\ln\alpha)$ и $d\lambda / \lambda = d\beta / \beta = d(\ln\beta)$. Затем, полагая $\ln\alpha = \gamma$, $\ln\beta = \ln(1/\alpha) = -\gamma$, приведём (1), (2) к следующему виду

$$du_{\nu\lambda} = u_{\nu\lambda}\, d\gamma = A \cdot e^{4\gamma} / (e^{e^\gamma} - 1)\, d\gamma, \qquad A = 8\pi(kT)^4 / (hc)^3 \tag{10}$$

График зависимости $u(\gamma) = e^{4\gamma} / (e^{e^\gamma} - 1)$ показан на рис. 3. Эта функция имеет максимум при $\gamma_{max} \simeq 1{,}366\,267\,689 \simeq (\phi + \varphi)(5 + 2 \cdot 3) / (3 + 3 \cdot 5) \simeq 1{,}366\,485$ или $\alpha_{max} = \alpha_4 \simeq 3{,}920\,690\,039 \simeq \sqrt{\varphi \cdot (1 + 3 + 5 \cdot 3) / 2} \simeq 3{,}920\,627$, определяемым из уравнений, аналогичных (9):

$$e^{-e^{\gamma}} = 1 - e^{\gamma}/4, \qquad e^{-\alpha_4} = 1 - \alpha_4/4, \qquad 4 = \phi^2 + \phi\cdot\varphi + \varphi^2 \tag{11}$$

При этом $u(\gamma_{max}) \simeq 4{,}779\,840 \simeq (\phi+\varphi)47/22 \simeq 4{,}777$ $(47 = \phi^8 + \varphi^8,\ 22 = 5^2 - 3)$.

Таким образом, хотя, возможно, главные детали (положение максимумов) идеального физического объекта, которым является равновесное тепловое излучение, и не выражаются точно через алгебраические константы ϕ, φ, но положение этих максимумов во всех шкалах - частотной, волновой и введённой универсальной шкале (см. (10)) подчиняются общему закону через экспоненциальные уравнения (9), (11). Кроме того, для величин $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, определяющих положение максимумов, найдено точное уравнение связи:

$$\alpha_3/(1-e^{-\alpha_3}) + \alpha_5/(1-e^{-\alpha_5}) = 3+5 = 2\alpha_4/(1-e^{-\alpha_4}) \tag{12}$$

Существенно, что (9), (11) можно записать и в интегральном виде:

$$n\cdot(1-e^{-\alpha_n}) = \alpha_n \quad \text{или} \quad n\cdot\int_0^{\alpha_n} e^{-\alpha}d\alpha = \alpha_n \tag{13}$$

При этом интеграл в (13) равен площади под кривой $e^{-\alpha}$ в пределах $[0, \alpha_n]$. Графики левой и правой части (13) $\text{l.p.} = n\cdot S(\alpha) = n\cdot\int_0^{\alpha} e^{-\alpha}\,d\alpha$ для $n = 2, 3, 4, 5$ (кривые 2, 3, 4, 5) и $\text{r.p.} = \alpha$ (прямая 1) показаны на рис. 4:

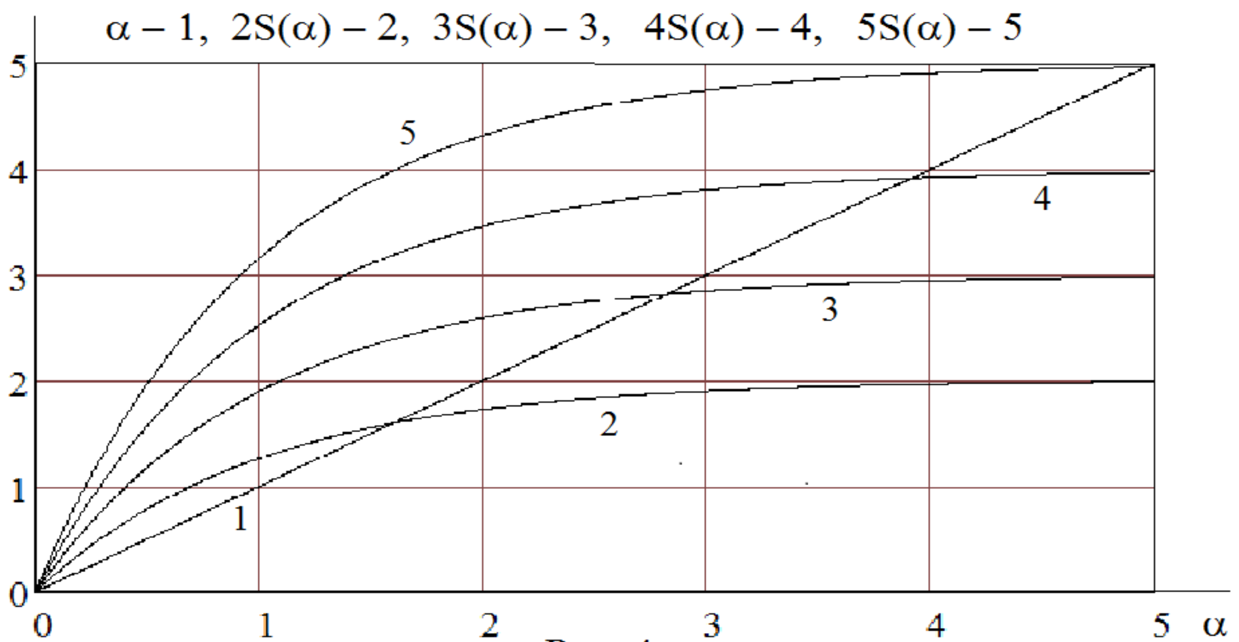

Рис. 4

Таким образом, получен следующий важный результат: вид гармонии для идеального объекта может быть различным - алгебраическим в целом и трансцендентным в деталях.

В этой связи укажем также, что аналогичные трансцендентные зависимости были установлены нами и для положения максимумов в спектре флуктуаций излучения Планка, исходя из того, что дисперсию спектральной плотности равновесного излучения $\overline{(\Delta u_\nu)^2}$ можно найти следующим образом:

$$\overline{(\Delta u_\nu)^2} = \theta^2 \cdot \partial u_\nu / \partial\theta = h\nu \cdot u_\nu + (c^3 / 8\pi\nu^2) \cdot u_\nu^2 \qquad (14),$$

где $\theta = kT$. При больших частотах ($h\nu \gg kT$) дисперсия определяется первым слагаемым в (14), при малых частотах ($h\nu \ll kT$) – вторым слагаемым. Это же выражение для дисперсии было получено ранее Эйнштейном, но иным путём и при существенно более длинных расчётах [6].

Используя безразмерную переменную $\alpha = \nu \cdot h / kT$, получим, что

$$\overline{(\Delta u_\nu)^2} = [8\pi(kT)^4 / c^3h^2] \cdot [\alpha^4 / (e^\alpha - 1) + \alpha^4 / (e^\alpha - 1)^2] \qquad (15)$$

Зависимости $y_1(\alpha) = \alpha^4 / (e^\alpha - 1)$ - кривая 1, $y_2(\alpha) = \alpha^4 / (e^\alpha - 1)^2$ - кривая 2 и $y(\alpha) = y_1(\alpha) + y_2(\alpha)$ - кривая 3 показаны на рис. 5.

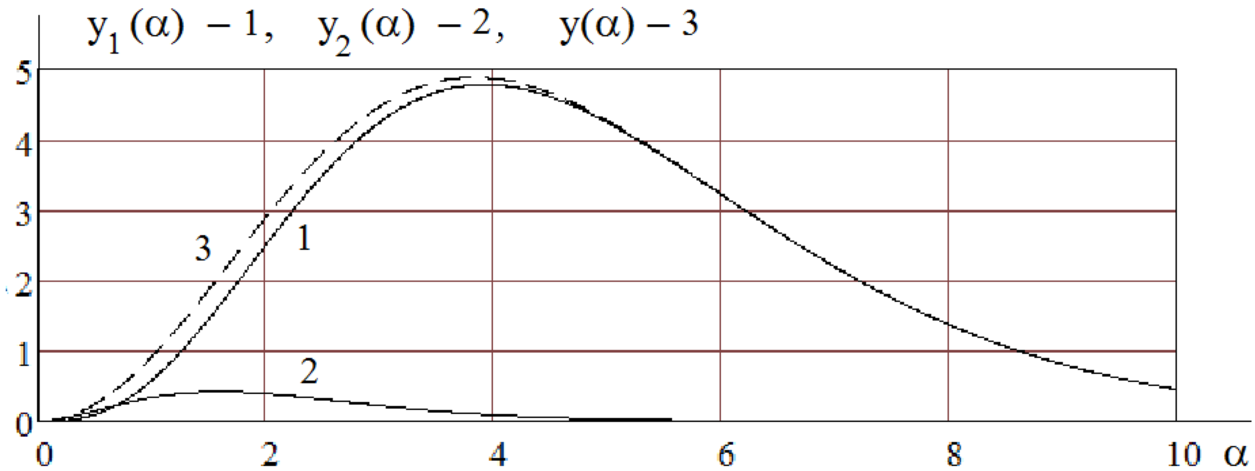

Рис. 5

При заданной температуре первое слагаемое в (15) имеет максимум при $\alpha_{max} = \alpha_4 \simeq 3{,}920\,690\,039 \simeq 5\pi / 4 \simeq 3{,}926$, т.е. при том же α, при котором имеет место максимум $u_{\nu\lambda}(\alpha)$! Второе же слагаемое в (15) имеет максимум при $\alpha_{max} = \alpha_2 = 1{,}593\,624\,260 \simeq 5/\pi \simeq 1{,}591$, также являющимся корнем уравнения типа (13): $e^{-\alpha_2} = 1 - \alpha_2 / 2$. Этот корень определяется пересечением прямой 1 с кривой 2 на рис. 4. При этом $\sqrt{\alpha_2 \cdot \alpha_4} \simeq 2{,}499621 \simeq 5/2$, а среднее арифметическое чисел α_n равно: $(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)/4 \simeq 3{,}325 \simeq 2 \cdot 5/3 \simeq 3{,}333$.

Отметим также, что первое и второе слагаемое в (15) равны при $\alpha = \ln 2$, т.е. при частоте $\nu = (kT/h) \cdot \ln 2$.

В связи с тем, что положение всех найденных максимумов определяется экспоненциальными уравнениями одного типа (13), отметим, что точки кривой $y(x) = e^{x/a}$ неэквивалентны, хотя эта кривая самоподобна. Так, напр., вид эскпоненциальной кривой радиоактивного распада $N(t) = N_0 \cdot e^{-t/<t>}$, (где $N(t)$ - число атомов, распавшихся ко времени t, $<t>$ - среднее время жизни, $N_0 = N(t=0)$) не зависит от начала отсчёта. Действительно, если отсчёт начинается с нового момента времени t_1, $t = t_1 + \tau$, $\tau -$ новое отсчитываемое временя, то $N(\tau) = N_0 \cdot e^{-(t_1+\tau)/<t>} = N_1 \cdot e^{-\tau/<t>}$, где $N_1 = N_0 \cdot e^{-t_1/<t>} = \mathrm{const}$.

Однако эволюта экспоненциальной кривой, определяемая её радиусом кривизны $R(x) = (1 + y'^2)^{3/2} / |y''| = a^2 (1 + e^{2x/a} / a^2)^{3/2} / e^{x/a}$, имеет экстремум: $R(x) = R_{min} = a^2 \cdot 3^{3/2} / 2$ при $x_{min} = (a/2) \cdot \ln(a^2/2)$. При $a = -1$ получим, что $R_{min} = 3^{3/2}/2$, $x_{min} = (-1/2)\ln(1/2)$ выражаются через «магические» числа Фибоначчи 2, 3, 5 и, следовательно, через указанные выше изящные комбинации ϕ и φ. Поэтому не исключено, что и $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ удастся точно выразить через экспоненциальные и логарифмические функции от ϕ и φ.

В заключение подчеркнём, что детальный анализ формулы Планка, в т.ч. и с точки зрения системной гармонии, обусловлен принципиальными причинами.

При создании теории равновесного теплового излучения (1900 г.) Планк использовал ряд предположений, не только противоречивых, но и ломающих принципы классической физики. В первую очередь, это относится к его гипотезе о квантовании энергии излучения. Далее, в качестве модели среды, с которой взаимодействует излучение, Планк использовал очень упрощённую модель в виде классических линейных осцилляторов, которые сравнивались с акустическими резонаторами, камертонами или колебательными контурами со слабым затуханием и различными собственными частотами. Однако такие осцилляторы могут реагировать лишь на излучение с теми же частотами, которое сами излучают, и никакого обмена энергией, необходимого для получения равновесного излучения, не допускают. Более того, Планк приписал осцилляторам не только температуру, но и энтропию, при этом без необходимых обоснований ввёл следующую зависимость второй производной от энтропии S по энергии осциллятора E:

$$(d^2S / dE^2)^{-1} = -(h\nu E + E^2) / k \qquad (16)$$

В этой связи сам Планк в своей Нобелевской лекции «Возникновение и постепенное развитие теории квант» (1920 г.) назвал полученное им выражение для спектральной плотности излучения всего лишь «счастливо угаданной интерполяционной формулой», позволившей одновременно описать разные экспериментальные зависимости как при малых частотах излучения (закон Рэлея-Джинса), так и при высоких частотах (закон Вина).

Эйнштейн же написал в [6], что «Формула Планка несовместима с теоретическими основами, из которых Планк исходил». И для устранения этой несовместимости он предложил, оставив полученное Планком выражение для средней энергии осциллятора $\overline{E}_\nu$ с частотой ν, находящегося в поле излучения с плотностью энергии u_ν

$$\overline{E}_\nu = u_\nu c^3 / 8\pi\nu^2 \qquad (17),$$

дополнить его гипотезой о том, что осциллятор может находиться в колебательных состояниях не с произвольной энергией, а лишь с энергией, пропорциональной $h\nu$.

Затем Эйнштейн решил задачу о спектре излучения абсолютно чёрного тела, введя положение о наличии спонтанных и вынужденных переходов атомов между двумя уровнями энергии и используя при этом классическую статистику Больцмана.

В дальнейшем формула Планка была получена и на основе квантовой статистики Бозе-Эйнштейна [6].

Таким образом, удивительно, но факт: при всех разных предположениях конечная формула для спектральной плотности равновесного теплового излучения получалась одинаковой ! Поэтому анализ причин неединственности решения данной проблемы и дальнейшие исследования различных моделей абсолютно чёрных тел, в т.ч. чёрных дыр, а также синхротронного излучения, безусловно, важны и актуальны.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Макс Планк*. Единство физической картины мира. Сб. статей. Научная автобиография. М., Наука, 1966, - 287 С.

2. *Шелаев А.Н.* Гармонические и квазигармонические соотношения для функций, описывающих излучение Планка. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 1, - С.76-79.

3. *Шелаев А.Н.* К возможности существования двух компонент в излучении Планка. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 2, - С.115-119.

4. *Шелаев А.Н.* К возможности сосуществования гармонии в целом и квазигармонии в деталях на примере излучения Планка. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 4, С.125-128.

5. *Хокинг С., Пенроуз Р.* Природа пространства и времени. Ижевск, НИИ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, - 160 С.

6. *Эйнштейн А.* Статьи из Сборника научных трудов, т.III, М., Наука, 1966. К теории возникновения и поглощения света, С.123-133. К современному состоянию проблемы излучения, С.164-179. Примеч. к статье С.Н. Бозе - Закон Планка и гипотеза световых квантов, С.473-474. Статья С.Н. Бозе, С.475-478.