

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ И ГРАВИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ИНВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Обобщённая геометрическая модель инвариантных сечений (ИС) – окружности ИС, являющиеся геометрическими местами точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек равно некоторой заданной константе, была введена автором статьи в [1,2]. В [3,4] показано, что эта модель является также и моделью функций средних значений. В [5,6] найдена физическая интерпретация окружностей ИС, как эквипотенциальных линий длинных тонких параллельных и противоположно-заряженных тел.

В [7] автором статьи введена электростатическая модель инвариантных произведений (ИП), определяемая эквипотенциальными линиями аналогичных тел, но одноимённо-заряженных. Такими линиями являются овалы Кассини и их особый частный случай – лемниската Бернулли. В [8] начато исследование соотношений гармонии для внутренних и внешних гравитационных полей однородных тел.

В данной статье, являющейся развитием работ [5-8], рассматриваются как электростатические, так и гравитационные модели ИП, поскольку законы Кулона и Ньютона (Всемирного притяжения) имеют одинаковый вид. Разница состоит в том, что одинаковые заряды отталкиваются, а массы, имеющие один знак, притягиваются.

Следует также указать, что изменяя расстояние между зарядами и выбирая разные эквипотенциальные линии, можно как ИС, так и ИП сделать равными любой константе, напр., фундаментальным трансцендентным константам π , e или алгебраическим константам $\phi = (-1 + \sqrt{5})/2$, $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, связанным между собой следующими соотношениями $\varphi = \phi + 1 = 1/\phi$.

Существенными особенностями констант ϕ , φ является, во-первых, то, что

они реализуются при безразмерных расстояниях между зарядами (массами) равными единице. Во-вторых, любое целое число можно точно выразить через алгебраические комбинации ϕ и φ , что является очень важным, поскольку позволяет выражать через ϕ и φ целые числа в базовых физических законах. В связи с этим основные расчёты в статье будут проведены для случаев ИП, выражающихся через константы ϕ , φ .

Итак, пусть в точках $A(-c, 0)$, $B(c, 0)$ (см. рис. 1) находятся центры сечений

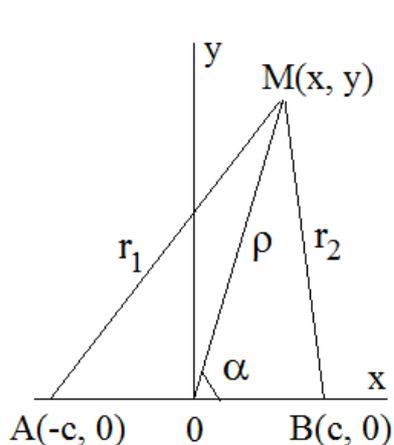


Рис. 1

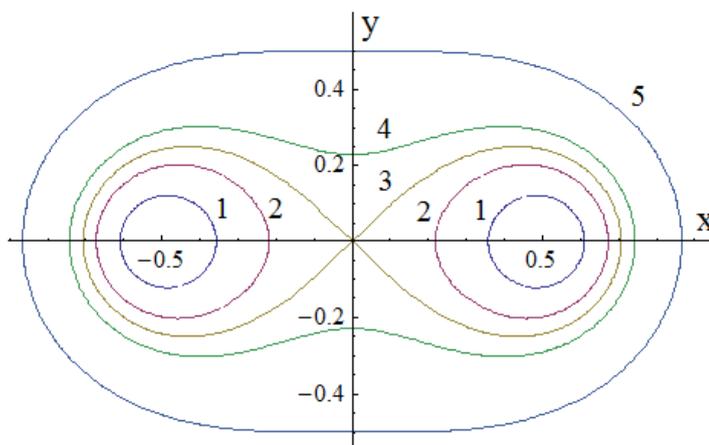


Рис. 2

длинных параллельных тонких стержней с одинаковой линейной плотностью зарядов σ (в двумерном случае в точках A, B находятся равные заряды одного знака). Полагая потенциал в точке O равным нулю, получим, что потенциал U в произвольной точке $M(x, y)$ равен:

$$U = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \cdot [\ln(c / r_1) + \ln(c / r_2)] = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \cdot \ln(c^2 / r_1 \cdot r_2) \quad (1)$$

Из (1) следует, что $U = \text{const}$ при $r_1 \cdot r_2 = \text{const}$. Учитывая, что

$$r_1 \cdot r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4} = a^2 \quad (2)$$

перейдём в полярную систему координат ($x = \rho \cdot \cos \alpha$, $y = \rho \cdot \sin \alpha$):

$$r_1 \cdot r_2 = \sqrt{\rho^4 - 2c^2\rho^2 \cos 2\alpha + c^4} = a^2 \quad (3)$$

Полученные соотношения (2), (3), определяющие эквипотенциальные линии электростатического поля длинных параллельных одноимённо-заряженных тел,

являются в то же время уравнениями овалов Кассини в декартовой и полярной системах координат. В частном случае при $a = c$ уравнения (2), (3) определяют лемнискату Бернулли. На рис. 2 показаны овалы Кассини при $c = \text{const} = 0,5$ и увеличении a : $a = 0,35; 0,45; 0,5; 0,55; 0,707$, кривые 1-5, соответственно.

Из определяющего овалы Кассини произведения $r_1 \cdot r_2 = a^2$ следует, что $r_1 = \phi$, $r_2 = \phi$ при $\alpha = 0$, $c = 0,5$, $a = 1$. Зависимости $r_{1,2}(\alpha)$ (кривые 1,2) и $r_2(\alpha) / r_1(\alpha)$ (кривая 3) показаны на рис. 3.

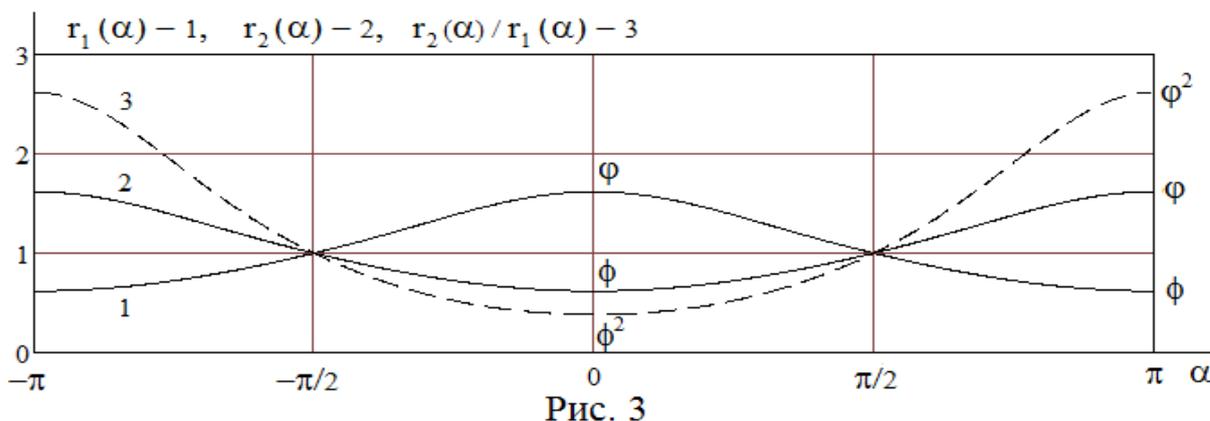


Рис. 3

Существенно, что $r_{1,2}(\alpha)$ изменяются в противофазе между константами ϕ и ϕ^2 , а их отношение $r_2(\alpha) / r_1(\alpha)$ изменяется от ϕ^2 до ϕ^2 .

При $\alpha = 0$ радиусы $r_{1,2}$ лежат на одной прямой, а отрезок $AB = 1$ делится точкой M внешним образом не в отношении ϕ , как это имеет место для ИС, а в отношении ϕ^2 : $r_2(0) / r_1(0) = \phi / \phi = \phi^2$.

Для лемнискаты, определяемой соотношениями $a = c$, $-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$ и $3\pi/4 \leq \alpha \leq 5\pi/4$ (см. кривая 3 на рис. 2), $r_1(\alpha)$ и $r_2(\alpha)$ также изменяются в противофазе. При $a = c = 1/2$ в 1-м и 4-м квадрантах $r_{1\text{max}} = r_1(0) = (\sqrt{2} + 1) / 2$, $r_{2\text{min}} = r_2(0) = (\sqrt{2} - 1) / 2$, $r_{1\text{min}} = r_1(\pm\pi/4) = 1/2$, $r_{2\text{max}} = r_2(\pm\pi/4) = 1/2$. При этом $(r_2 / r_1)_{\text{max}} = 1$ при $\alpha = \pm\pi/4$, $(r_2 / r_1)_{\text{min}} = 3 - 2\sqrt{2}$ при $\alpha = 0$. Во 2-м и 3-м квадрантах значения $r_{1,2}$ обратны, но $r_1(\alpha) \cdot r_2(\alpha) = 1/2$ при любых α .

Таким образом, характерные значения $r_{1,2}(\alpha)$ для лемнискаты выражаются через «магические» числа Фибоначчи 2, 3, 5, которые симметричным образом выражаются через константы ϕ и φ : $2 = \sqrt{\phi^2 + \phi \cdot \varphi + \varphi^2} = 5 - 3$, $3 = \phi^2 + \varphi^2$, $5 = (\phi + \varphi)^2$. В этой связи отметим также то, что из тригонометрического и алгебраического уравнений лемнискаты

$$\rho(\alpha, c) = c\sqrt{2\cos 2\alpha}, \quad y(x, c) = \pm\sqrt{\sqrt{c^4 + 4x^2c^2} - x^2 - c^2} \quad (4)$$

следует, что лемниската имеет два максимума и два минимума при $x = \pm c\sqrt{3}/2$ и $y = \pm c/2$, $-c\sqrt{2} \leq x \leq c\sqrt{2}$. Радиус кривизны лемнискаты $R = \rho/3\cos 2\alpha$ принимает наименьшее значение $R_{\min} = c\sqrt{2}$ при $\alpha = 0, \pi$.

Укажем также, что при $a = c \cdot \sqrt{2}$ в овалах Кассини исчезают провалы (см. кривую 5 на рис.1), и при $a > \sqrt{2} \cdot c$ овалы, как и эллипсы, выпуклые фигуры.

Овалы внутри лемнискаты (см. кривые 1,2 на рис. 1) образуются из двух частей, описываемых приведёнными ниже выражениями (10) для случая $a < c$. При этом угол α изменяется в пределах: $-\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $\pi - \alpha_0 \leq \alpha \leq \pi + \alpha_0$, где $\alpha_0 = \arcsin(a^2/c^2)/2 < \pi/4$. Каждому значению α соответствуют два $\rho_{1,2}$, причём $\rho_1(0) = \sqrt{c^2 + a^2}$, $\rho_2(0) = \sqrt{c^2 - a^2}$, $\rho_1(\alpha_0) = \rho_2(\alpha_0) = c\sqrt{\cos 2\alpha_0}$.

Важно то, что для овалов при $a < c$ найден 2-й ИП:

$$\rho_1(\alpha) \cdot \rho_2(\alpha) = \text{const} = c^2 \cos 2\alpha_0 = \sqrt{c^4 - a^4} \quad (5)$$

и, напр., при $c = \phi^{1/4}$ и $a = \phi^{3/4}$ $\alpha_0 = (1/2) \cdot \arcsin \phi$ и $\rho_1(\alpha) \cdot \rho_2(\alpha) = \phi$!

Электрическое поле $\vec{E} = -\text{grad}U$ определяется следующими выражениями

$$\vec{E} = -(\partial U / \partial x \cdot \vec{i} + \partial U / \partial y \cdot \vec{j}) = -(\partial U / \partial \rho \cdot \vec{n}_\rho + (1/\rho) \cdot \partial U / \partial \alpha \cdot \vec{n}_\alpha) \quad (6)$$

$$\partial U / \partial \rho = 2\rho(\rho^2 - c^2 \cos 2\alpha) / (\rho^4 - 2c^2\rho^2 \cos 2\alpha + c^4) \quad (7)$$

$$(1/\rho) \cdot \partial U / \partial \alpha = 2\rho c^2 \sin 2\alpha / (\rho^4 - 2\rho^2 c^2 \cos 2\alpha + c^4) \quad (8)$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{(\partial U / \partial \rho)^2 + ((1/\rho) \cdot \partial U / \partial \alpha)^2} = 2\rho / a^2 \quad (9)$$

Модуль поля $E = |\vec{E}| = \text{const}$ на силовых линиях, которые для случая эквипотенциальной линии, имеющей вид лемнискаты Бернулли ($a = c$, $\rho(\alpha) = c\sqrt{2\cos 2\alpha}$) также являются лемнискатами, но только повернутыми от исходной лемнискаты (эквипотенциальной линии) на углы $\pm\pi/4$ (см. рис. 4).

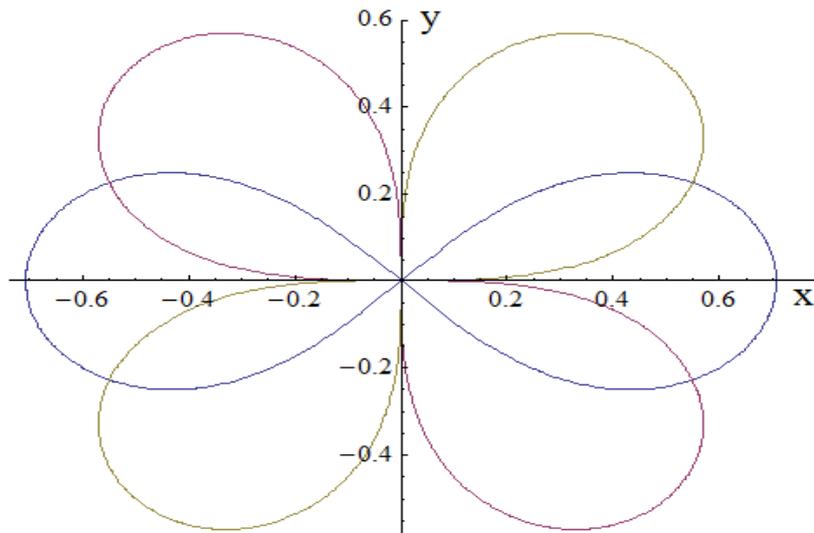


Рис. 4

Действительно, если кривая описывается дифференциальными уравнениями $F(x, y, y'_x) = 0$ или $F(\rho, \alpha, \rho'_\alpha) = 0$, то ортогональные кривые определяются уравнениями $F(x, y, -1/y'_x) = 0$ или $F(\rho, \alpha, -\rho^2 / \rho'_\alpha) = 0$. Учитывая, что

$$\rho(\alpha) = c\sqrt{\cos 2\alpha \pm \sqrt{a^4 / c^4 - \sin^2 2\alpha}}, \quad "+" \text{ при } a \geq c, \quad "\pm" \text{ при } a < c \quad (10)$$

$$\rho'(\alpha) = -\rho(\alpha) \sin 2\alpha / \sqrt{a^4 / c^4 - \sin^2 2\alpha} \quad (11)$$

заменяем в (11) ρ' на $-\rho^2 / \rho'$. В итоге, после разделения переменных, получим

$$d\rho / \rho = \sqrt{a^4 / c^4 - \sin^2 2\alpha} / \sin 2\alpha \cdot d\alpha \quad (12)$$

Правая часть (12) интегрируется при $a = c$, и силовыми линиями в этом случае являются две лемнискаты с ортогональными осями

$$\rho^2 = \text{const} \cdot \sin 2\alpha = \text{const} \cdot \cos[2(\alpha \pm \pi/4)] \quad (13)$$

Интегрируя модуль поля E вдоль эквипотенциальных линий, получим, что

$$I(E, a > c) = \int_0^{2\pi} (2\rho/a^2) \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho_\alpha'^2} d\alpha = 4\pi \quad (14)$$

$$I(E, a = c) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2\rho/a^2) \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho_\alpha'^2} d\alpha = 2\pi \quad (15)$$

при любых $a \geq c$. Отметим, что криволинейный интеграл I-го рода (15), взятый по всей лемнискате равен нулю, так как для одной петли лемнискаты контур интегрирования обходится слева, а для другой справа.

Овалы внутри лемнискаты ($a < c$) описываются соотношениями (10), при этом для индексов 1(+), 2(-)

$$I_{1,2}(E, a < c) = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (2\rho/a^2) \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho_\alpha'^2} d\alpha, \quad I_1 + I_2 = 2\pi \quad (16)$$

Подчеркнём, что соотношения (16) дают ряд важных следствий. Напр., при $c = 1/2$, $a = 1/2\sqrt{2}$ получим, что: $I_1 \simeq 4,188\ 790$, $I_2 \simeq 2,094\ 395$, $I_1 / I_2 = 2 = \sqrt{\phi^2 + \phi \cdot \varphi + \varphi^2}$, $E_1(\alpha = 0) / E_2(\alpha = 0) = \sqrt{3} = \sqrt{\phi^2 + \varphi^2}$.

Интегралы для квадрата поля по эквипотенциальным линиям также дают интересные и нетривиальные соотношения. Так, при $c = 1/2$ с ростом a

$$I(E^2, a > c) = \int_0^{2\pi} (2\rho/a^2) \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho_\alpha'^2} d\alpha \rightarrow 8\pi/a \quad (17)$$

и уже при $a = 8$ данный интеграл равен π с точностью 6 знаков.

При интегрировании квадрата поля вдоль лемнискаты получаем интегралы

$$I(E^2, a = c) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2\rho/a^2)^2 \sqrt{\rho^2 + \rho_\alpha'^2} d\alpha = (8\sqrt{2}/c) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\alpha} d\alpha \quad (18)$$

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\alpha} d\alpha = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} / (1+t^2)^{3/2} dt \simeq 1,198\ 141\ 032 \quad (19)$$

Интеграл I в (19) с точностью более 3-х знаков выражается через фундаментальные константы π , ϕ , φ : $I \simeq \pi \cdot \phi^2 \simeq 1,199 \simeq 2 \cdot 3/5 = 1,200$. В то же

время с точностью более 6-ти знаков интеграл I выражается через другие интегралы. Так, длина четверти лемнискаты определяется выражениями:

$$L_{1/4} = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\rho^2 + \rho_\alpha'^2} d\alpha = c\sqrt{2} \cdot \int_0^{\pi/4} d\alpha / \sqrt{\cos 2\alpha} \quad (20)$$

Полагая $2\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta$ (это равенство возможно, поскольку $0 \leq \alpha \leq \pi/4$), $L_{1/4} / c$ выразится через эллиптический интеграл 1-го рода:

$$L_{1/4} / c = \int_0^{\pi/2} d\beta / \sqrt{1 - (\sin^2 \beta) / 2} = K(1/\sqrt{2}) \approx 1,854 07 \approx 3/\varphi \approx 1,854 10 \quad (21)$$

При этом $I \approx 1,198 141 \approx \pi / (\sqrt{2} L_{1/4} / c) \approx 1,198 140$.

Интеграл I аппроксимируется и обратной величиной постоянной Гаусса $G^{-1} = M(1, \sqrt{2})$, где $M(1, \sqrt{2})$ - арифметико-геометрическое среднее 1 и $\sqrt{2}$, $M(1, \sqrt{2}) = \pi / (\sqrt{2} \cdot K(1/\sqrt{2})) \approx 1,198 141$. В итоге получаем, что

$$\pi \approx (\sqrt{2} \cdot L_{1/4} / c) \cdot M(1, \sqrt{2}) = (\sqrt{2} \cdot L_{1/4} / c) / G \quad (22)$$

Уникальной особенностью лемнискаты является то, что при скольжении тела без трения вдоль лемнискаты, ось которой повернута от горизонтали на угол $-\pi/4$ (см. рис. 5), время движения в поле тяжести \vec{g} от центра лемнискаты O до любой точки дуги лемнискаты M равно времени движения по соединяющей эту дугу хорде:

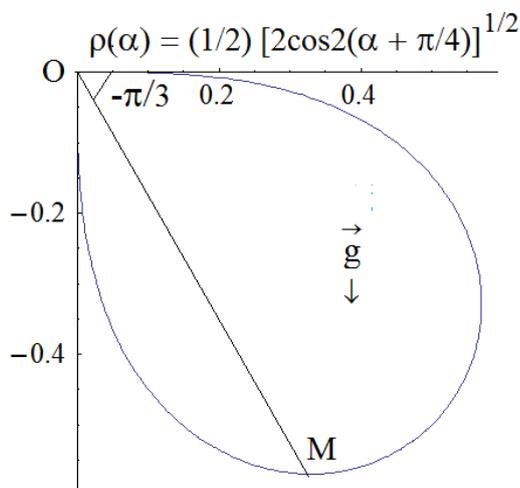


Рис. 5

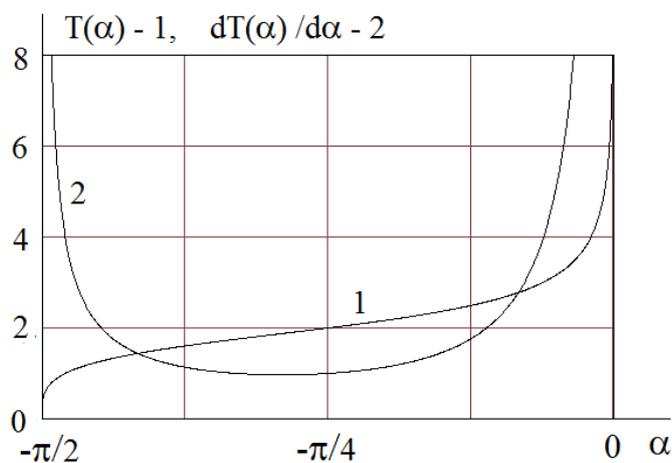


Рис. 6

Уравнение дуги лемнискаты $\rho(\alpha) = c\sqrt{2}\sqrt{-\sin 2\alpha}$, $-\pi/2 \leq \alpha \leq 0$. Исходя из закона сохранения энергии, а затем разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$mv^2 / 2 = m \cdot (d\alpha / dt)^2 ((d\rho / d\alpha)^2 + \rho^2) / 2 = mg \cdot \rho \cdot (-\sin \alpha) \quad (23)$$

$$\int_0^t dt = t = \int_{-\pi/2}^{\alpha} (\sqrt{c/4g}) / ((-ctg\alpha)^{3/4} \sin^2 \alpha) d\alpha = 2\sqrt{c/g} (-ctg\alpha)^{1/4} \quad (24)$$

Это же выражение $t(\alpha) = 2\sqrt{c/g} \cdot (-ctg\alpha)^{1/4}$ следует и из расчета времени движения тела по наклонной линии (плоскости).

При движении по лемнискате скорость возрастает при $-\pi/2 \leq \alpha \leq -\pi/3$, а затем убывает, поскольку отклонение от горизонтали $h(\alpha) = |\rho(\alpha) \cdot \sin \alpha|$ максимально при $\alpha = -\pi/3$.

Зависимость относительного времени движения по лемнискате от угла α $T(\alpha) = t(\alpha) / 2\sqrt{c/g} = (-ctg\alpha)^{1/4}$ показана на рис. 6 (кривая 1). Характерные значения $T(\alpha)$ выражаются, причём точно, через «магические» числа 2, 3, 5 : $T(-\pi/3) = 2/3^{1/(3+5)}$, $T(-\pi/4) = 2$, $T(-\pi/6) = 2 \cdot 3^{1/(3+5)}$, $T(0) = \infty$.

Первая производная от $T(\alpha)$ имеет минимум (см. кривая 2 на рис. 6), при этом кривая $T(\alpha)$ имеет перегиб при $\alpha = \arctg(-\sqrt{5/3}) \approx -52,239^\circ$.

Но самое главное состоит в том, что $T(-\pi/3) \cdot T(-\pi/6) = T^2(-\pi/4)$. Более того, для любых α_1 и α_2 , связанных соотношением $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$, установлен третий, уже гравитационный вариант ИП:

$$T(-\alpha_1) \cdot T(-\alpha_2) = T^2(-\pi/4) = 4 = \phi^2 + \phi \cdot \phi + \phi^2 \quad (25),$$

также выражающегося симметричным образом через ϕ , ϕ .

Для гравитационной модели найдены и квазигармонические соотношения. Так, напр., среднее геометрическое и квадратичное для средних скоростей $v_F = L_F / t_F \approx 0,8460$ и $v_S = L_S / t_S \approx 1,4774$ на участках $F[-\pi/2, -\pi/3]$

и $S[-\pi/3, -\pi/4]$ для длин в единицах c и времён в единицах $\sqrt{c/g}$ равны:

$$\sqrt{v_1 \cdot v_2} \approx 1,1179 \approx (\phi + \varphi) / 2 = 1,1180, \quad \sqrt{(v_F^2 + v_S^2) / 2} \approx 1,2038 \approx 2 \cdot 3 / 5 = 1,2.$$

Из отношения длин хорды и дуги $N(\alpha) = \sqrt{-\sin(-2\alpha)} / \int_{-\pi/2}^{\alpha} d\alpha / \sqrt{-\sin 2\alpha}$

следует, напр., что $N(-\pi/4) = \sqrt{2} / K(1/\sqrt{2}) \approx 0,76275 \approx \sqrt{2}\varphi/3 \approx 0,76274$,

$$N(-\pi/3) \approx 0,892 \approx 2 / (\phi + \varphi) \approx 0,894.$$

В заключение отметим ряд принципиальных обстоятельств.

1. Инвариантные произведения содержатся и в электростатических моделях инвариантных сечений и функций средних значений, введённых в [3,4], так как для функций средних значений двух величин a, b , определяемых соотношением:

$$\bar{M}(a, b, \lambda) = [(a^\lambda + b^\lambda) / 2]^{1/\lambda} \quad (26)$$

при любых действительных числах λ выполняется следующее равенство:

$$\bar{M}(a, b, -\lambda) \cdot \bar{M}(a, b, \lambda) = \bar{M}^2(a, b, \lambda = 0) \quad (27),$$

где $\bar{M}(a, b, \lambda = 0)$ - среднее геометрическое величин a и b . Напр., произведение среднего арифметического $\bar{M}(a, b, \lambda = 1) = (a + b) / 2$ на среднее гармоническое $\bar{M}(a, b, \lambda = -1) = 2 / (1/a + 1/b)$ равно $a \cdot b = (\sqrt{a \cdot b})^2 = \bar{M}^2(a, b, \lambda = 0)$.

2. Рассмотренную в данной статье электростатическую модель в виде двух тонких параллельных одноимённо-заряженных тел (или, в двумерном случае, просто двух равных зарядов одного знака) можно заменить гравитационной моделью таких же, но незаряженных тел, так как в этом случае эквипотенциальные гравитационные линии также будут являться овалами Кассини или, в частном случае, лемнискатами Бернулли.

3. Однако для введённой в [5,6] электростатической модели инвариантных сечений и функций средних значений в виде двух тонких параллельных

разноимённо-заряженных тел (или, в двумерном случае, двух равных по модулю, но противоположных по знаку зарядов) нет гравитационного аналога, так как для обычной материи не обнаружено тел с отрицательной массой. Свойства же тёмной материи и энергии пока достоверно не известны.

В этой связи отметим также, что в работе [9] автором статьи предсказано существование частиц не только с отрицательной, но и с комплексной массой. Такая масса может быть у частиц, движущихся со скоростью, большей скорости света.

4. Наличие инвариантного произведения и отсутствие инвариантного сечения у базовых гравитационных моделей двух тел - факт, говорящий о том, что в определённом смысле инвариантное произведение «важнее» инвариантного сечения, так как такие произведения описывает упорядоченные, сбалансированные объекты и процессы, в которых уменьшение одного параметра компенсируется эквивалентным увеличением другого параметра.

В то же время следует указать, что в [8] инвариантное сечение было обнаружено и у одного тела при сравнении гравитационных полей однородных тел внутри и вне этих тел. Так, для тел шаровой формы ускорения свободного падения равны при расстояниях от поверхности шара (вдоль его радиуса) $d = R / \varphi$, где R - радиус шара. При этом сумма гравитационных потенциалов (их среднее арифметическое) в точках, расположенных на поверхностях сфер с радиусами $R_{1,2} = R \pm R / \varphi$, минимальна по сравнению с суммой потенциалов для любых других равноотстоящих от поверхности шара точек.

5. Наконец, укажем, что само определение инвариантных сечений и произведений целесообразно расширить от их узкого смысла, как сечения или произведения точно равного одной из фундаментальных математических констант, напр., ϕ или φ , до равенства сечения или произведения и симметричным комбинациям из этих констант, прежде всего, через первые «магические» числа Фибоначчи: $2 = \sqrt{\phi^2 + \phi \cdot \varphi + \varphi^2}$, $3 = \phi^2 + \varphi^2$, $5 = (\phi + \varphi)^2$.

Дело в том, что комбинации из чисел 2, 3, 5 присутствуют во многих

фундаментальных физических соотношениях. Так, в каждом из 3-х поколений один кварк обладает зарядом $+2/3$, а другой $-1/3$ от заряда электрона.

Полная электростатическая энергия равномерно заряженного шара радиуса R , имеющего заряд Q равна: $W = k(3/5)Q^2/R$, где $k = 1/4\pi\epsilon_0$. Энергия внутри шара $W_i = k(1/2 \cdot 5)Q^2/R$, энергия вне шара $W_e = k(1/2)Q^2/R$, $W_e/W_i = 5$. Аналогичные соотношения имеют место и для гравитационной энергии однородного шара.

В уравнении адиабаты идеального газа $PV^\gamma = \text{const}$ показатель $\gamma = C_p/C_v$, где C_p, C_v - теплоёмкости при постоянном давлении и объёме. При этом для одноатомных газов $C_p/C_v = 5/3$. И т. д.

Литература

1. Шелаев А.Н. Соотношения гармонии и экстремумы длин, площадей и их производных в обобщённой модели золотого сечения. Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 6, - С.162-164.

2. Шелаев А.Н. Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных. М., Эл. № 77-6567, публ. 17431, 29.04.2012. www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/1252-shl.pdf

3. Шелаев А.Н. Соотношения гармонии в обобщённой геометрической модели золотых сечений и функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 1, - С.118-120.

4. Шелаев А.Н. Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений. М., Эл. № 77-6567, публ. 17485, 28.05.2012. www.trinitas.ru/doc/0232/009a/1252-shl.pdf

5. Шелаев А.Н. Соотношения гармонии для электростатической модели обобщённых золотых сечений – длинных параллельных противоположно-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, - С.131-134.

6. *Шелаев А.Н.* Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений. М., Эл. № 77-6567, публ. 17511, 08.06.2012. www.trinitas.ru/doc/0232/009a/1252-shl.pdf

7. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для электростатической модели обобщённых золотых произведений – длинных параллельных одноимённо-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 4, -С.95-98

8. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для внутренних и внешних гравитационных полей однородных тел и экстремумы функций средних значений для потенциалов и ускорений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, -С.115-118.

9. *Шелаев А.Н.* Нетривиальная закономерность для распадов элементарных частиц – кратность π и ϕ отношения интегралов от импульсов и от массы. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, -С.170-171.