С.Л. Василенко

Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему

Сколько раз ни произнеси "халва",
во рту сладко не станет.
Восточная пословица

Исходные посылы. При делении целого на две произвольные части между ними возникает бесконечное множество отношений.

Но только в одном случае эти отношения становятся равными.

Случай этот уникален и представляет собой "золотую пропорцию".

Возможно, как высшее проявление структурно-функционального совершенства целого и слагающих его элементов.

Её формулировка чрезвычайно проста:

целое относится к одной части так, как она – к другой.

Истоки "золотой" структуры восходят к древнегреческому учёному Евклиду (ок. 300 г. до н. э.) – автору первого из дошедших до нас теоретико-математических трактатов.

Форма золотой пропорции настолько идеальна и выверена, что совершенно не поддаётся никакому математическому манипулированию.

Конечно, существуют бесконечные множества других похожих структур.

Но им не подвластно концентрирование того сгустка колоссальной энергии, которой обладает редкостное число золотого сечения Φ, стоящее вровень с такими фундаментальными константами как π, e и некоторые другие.

Однако научный мир живёт своей особой жизнью...

И всё чаще отдельные исследователи штурмуют неподвластную золотую высь в надежде "выжать" из золотого сечения нечто новое и распространить-обобщить его на иные, по их мнению, схожие объекты.

Вероятнее всего, этот путь в никуда. Ибо константа золотого сечения изначально образована путём выделения частного из общего.

Но, как говорит Библия, «неисследимы пути Его <господни>! (Рим.11:33), «который творит дела великие и ... чудные без числа» (Иов 5:9).

Поэтому не будем забегать вперёд...

Чуть-чуть считается. В математике не бывает простых "чуть-чуть". Не секрет, как незначительные детали, уточнения или примечания трансформируют суть-облик конкретных структур.

В природе тоже не так много совершенного, но и лишнего ничего нет.

Всё сообразно. Мелкие и крупные детали занимают свои ниши, формируя частности.

«Хорошо известно, как сильно меняется иногда восприятие предмета, если мы пропустим только одну его часть, или подметим её неправильно, или воспримем как его часть то, что в действительности к нему не имеет никакого отношения. Во всех этих случаях мы легко можем принять предмет за то, чем он фактически не является. Например, при быстром взгляде на слово, сходное с другими словами...» [1, с. 218].

Сравните метафорическую метаграмму с заменой букв:

"ро*д*овые приз*н*аки" ←→ "ро*к*овые приз*р*аки".

Хорошо видно, насколько диаметрально меняется смысл написанного всего лишь от одной единственной смены буквы. – Что уж там говорить, когда перед нами встают терминологические обороты или понятийные формулировки.

Тем более это касается незначительного изменения в отношении составных частей целого, что приводит к новому состоянию, абсолютно отличному от золотого сечения (ЗС).

В приведенной метаграмме (греч. *meta* – между, *gramma* – буква) одновременно наличествует вполне определённый узнаваемый смысл, имеющий непосредственное отношение к орбите или сфере притяжения предметной области.

Его истоки лежат, что называется, на поверхности. А связывают их многочисленные многовековые мифы и фантазии вокруг понятия-константы ЗС.

В том числе невыразительные, а порой просто алогичные попытки его обобщения путём реструктуризации, в том числе в рамках обычных и хорошо известных со школы квадратных уравнений.

В качестве примера из похожих исходных посылов позволим себе напомнить простое образное сравнение [2]:

«Корректно ли, а если да, то насколько далеко распространяется понятие "обобщенного самоката" или "обобщенного велосипеда", например, на ракету. Если и то, и другое является средствами движения (доставки)?

Другими словами, может и не нужны нам вовсе такие слова как "самолет" или "машина", а пусть все будет обобщением колеса – действительно истинного творения человека. Но не заблудимся ли потом в причинно-следственных связях или не сведем многообразие специфических оттенков русского языка к набору компьютерного сленга?»

О логике рассуждений. В рамках затронутой проблематики из последних работ заметно выделяется слаженный и взаимно дополняющий друг друга статейный квартет [3–6].

Одна из его главных направленностей сводится к противодействию критике вокруг терминологически-понятийных конструкций типа «обобщённых золотых сечений».

Представители "золотоносного сообщества" привычно обходятся без ссылок на первоисточники. Хотя для их точной идентификации достаточно одного взгляда на хронологию в расположении материала в разрезе электронного ресурса.

Речь идёт буквально о трёх абзацах 11-страничной статьи[1], в которой исследуются новые структуры, связанные с золотым сечением.

Небольшой текст посвящён анализу хорошо известного рекурсивного представления константы золотого сечения Φ с переходом на бесконечную непрерывную (цепную) дробь, следующую из классического квадратичного тождества $\Phi^2 = \Phi + 1$ и состоящую исключительно из единиц:

$$\Phi = 1+\frac{1}{\Phi} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}} = [1;\ \overline{1}]. \qquad (1)$$

Для удобства изложения приведём текст оригинала:

> «Бесконечная цепная форма (1) позволяет легко вскрыть логику псевдонаучного обобщения золотого сечения, которой изобилуют работы отдельных авторов. Да ещё, к сожалению, под прикрытием гармонии.
>
> Пусть $a_i = 1 \Rightarrow x = \Phi$ – исходная цепная дробь с одними единицами, которая приводит к числу Φ. Тогда любая другая цепная дробь, у которой одно или несколько значений a_i отличается от 1, якобы обобщает исходную дробь. Отсюда вытекает, что цепные дроби являются обобщением золотого сечения. После чего опять же логически

---

[1] *Василенко С.Л.* Золотое сечение как начало полезных структур // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17512, 09.06.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321259.htm.

следует противоречие на уровне полного абсурда – практически вся числовая ось в такой своей стилизации обобщает золотое сечение.

Из того, что неповторимое золотое сечение можно представить не менее уникальной цепной дробью, вовсе не следует, что все остальные цепные дроби его обобщают. Чтобы это понять-принять, достаточно здравого смысла».

Собственно и всё.

Но что очень важно, с этим соглашаются [5]:

«*Меняя какие-то числа в бесконечной цепной дроби, мы просто получаем другое иррациональное число. Подобно тому, как изменение хотя бы одного знака в десятичной записи иррационального числа приводит к совершенно другому числу. Ещё раз повторим, что любое изменение в цепной дроби, в частности золотой константы, это попросту переход к другому числу, геометрически – к другой точке на числовой оси. А конкретные числа, или точки на оси, не обобщаются. Это, кстати, элементарные сведения из начальных классов математического ликбеза. К обобщениям ЗС они отношения не имеют...*».

Всё верно. Именно к этому мы и подводили! Только методом от противного.

Числа не обобщаются. Но обычно классифицируются в разные подмножества.

Тем не менее, возможное недопонимание остаётся. Значит, нужно смотреть глубже.

Расширение задачи золотого сечения. Попадая в поле золотого сечения (ЗС), невольно ощущаешь его величие-уникальность и одновременно непомерную ограниченность математических средств выражения.

Поэтому, изучая данную проблематику, некоторые авторы предпринимают вполне понятные и мотивированные попытки расширения ЗС на иные сходные структуры.

Нечто похожее на ветровой *эффект перезревшего одуванчика*.

Правда, часто упускается из виду, что ЗС вошло в практику совсем наоборот.

Путём выделения частного из общего. Достаточно вспомнить Евклида и его пропорции.

То есть из некоторого многообразия, в частности, геометрических пропорций и квадратичных моделей, был вычленен уникальный и неповторимый в своём роде частный случай. Уже гораздо позже он был наделён собственным золотоносным именем.

В знак восхищения перед математическим изяществом его свойств.

Поэтому сама мысль обобщения или одуванчикового раздувания ЗС изначально кажется противоестественной, хотя весьма заманчивой, и образно говоря, напоминает лошадь, поставленную даже не сзади, а "посреди телеги"[2].

Сегодня исследователи, понимая всю несобранность текущей ситуации, в которую они себя сами же и завели, начинают осмотрительно выправляться.

Мол, речь идёт про развитие теоретических построений [7]:

«*метафорическое выражение "обобщение золотого сечения", строго говоря, не вполне некорректно. Нельзя обобщать конкретную пропорцию, а тем более константу; другое дело теория или модель, принцип, уравнение и вообще теоретическая конструкция*».

С этим уже нельзя не согласиться. Побеждает здравый смысл.

Поэтому, отталкиваясь от золотого сечения и переходя к более сложным построениям, мы не будем употреблять словосочетание «обобщение золотого сечения», поскольку оно невольно выводит на некорректный термин «обобщённое золотое сечение».

---

[2] Из "золотых оговорок" В. Черномырдина.

Хотя бы потому, что в математике золотое сечение – это не только деление целого (отрезка), но и фундаментальная численная константа.

Гораздо лучше использовать понятие *расширения* или *обобщения задачи* (теории) золотого сечения [8].

Данные выражения более-менее выверены терминологически, непротиворечивы и далеки от расплывчато-несуразного обобщения конкретного числа.

Подобный подход развивается в работе [7]. Основная теза – это сохранение в обобщённом предмете фундаментальных особенностей обобщаемого образа.

Иначе говоря, предлагается отыскать некий «*родовой признак*» или «убедительное формальное свойство».

Линия мантиссы. Для квадратного уравнения $x^2 - px - 1 = 0$ или $x - 1/x = p$, расширяющего структуру ЗС, в качестве основополагающего свойства-фактора выбирается сохранение мантиссы или совпадения дробных частей числовой иррациональной константы x и её обратной величины $1/x$ с их очевидной целочисленной разностью p.

Собственно, почему бы и нет? – Тем более что данное свойство давно известно в теории иррациональных чисел и даже описано в Википедии[3] как «бесконечный ряд иррациональных взаимных пар чисел, которые отличаются лишь целым числом, внося любопытный эффект равенства мантисс».

Преемственность развития-расширения теории ЗС нисколько не нарушена.

За исключением использования затем неверной терминологии типа «золотого семейства» или «семейства золотых констант».

Слово "золотое", конечно, должно быть опущено. Оно уже не несёт никакого смысла.

Образно говоря, колесо превращается в автомобиль.

При желании могут быть добавлены любые другие эпитеты: <благородные>, <квадратичные>, <параболические> константы и т.п.

Примерно, как в истории развития чисел.

С появлением новых расширительных конструкций возникали и новые отличительные признаки-названия чисел:

целые – дробные, рациональные – иррациональные, трансцендентные, алгебраические, действительные (вещественные) – мнимые.

Хотя, если исходить из распространённой логики формирования терминов в золотоискательской среде, то всё это – «обобщённые натуральные числа». А они, в свою очередь, являются обобщённой единицей.

Посмотрим на другие линии обоснованности обобщённых форм.

Линия тождества. В качестве «родового признака» обобщения задачи ЗС дополнительно упоминается «обобщённая формула Кассини» [5].

Однако это не имеет сколь значимой аргументации, ибо выходит из другой систематики.

Прежде всего, подобные тождества отражают совершенно иные структуры. А именно устанавливают определённые отношения для обобщённых последовательностей Фибоначчи и не имеют непосредственного отношения к константам – вещественным решениям характеристических алгебраических уравнений.

О предельных константах-аттракторах разговор особый.

Кроме того, исходное тождество Кассини (именно тождество, а не формула) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ хорошо просматривается в последовательности подходящих

---

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Multiplicative_inverse.

обыкновенных дробей, образующихся в результате разложения константы в бесконечную непрерывную дробь (в первом ряду расположены её коэффициенты)

$$\phi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \underline{1} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{5} & \underline{8} & \underline{13} & \underline{21} & \underline{34} \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \end{pmatrix}.$$

Для этого достаточно произвести перемножение "крест-накрест" числителей и знаменателей соседних дробей. Они же числа Фибоначчи.

Например: $8 \cdot 8 - 5 \cdot 13 = -1$; $13 \cdot 13 - 8 \cdot 21 = 1$.

Но точно такие связи мы видим и в других "цепных" разложениях.

Это абсолютно логично, ибо числители A_n и знаменатели B_n соседних подходящих дробей связаны аналогичным соотношением [9]:

$$A_{n+1}B_n - A_n B_{n+1} = (-1)^n .$$

В такой интерпретации тождество Кассини не является отличительным признаком именно чисел Фибоначчи. Оно сопутствует разложениям всех иррациональных и трансцендентных чисел.

Например,

$$\sqrt{7} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ \underline{3} & \underline{5} & \underline{8} & \underline{37} & \underline{45} & \underline{82} & \underline{127} & \underline{590} & \underline{717} \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 17 & 31 & 48 & 223 & 271 \end{pmatrix}$$

$$e \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ \underline{3} & \underline{8} & \underline{11} & \underline{19} & \underline{87} & \underline{106} & \underline{193} & \underline{1264} & \underline{1457} \\ 1 & 3 & 4 & 7 & 32 & 39 & 71 & 465 & 536 \end{pmatrix}$$

Исходя из этих соображений, тождество Кассини – неудачный кандидат на роль «родового признака» обобщения задачи ЗС, поскольку по сущности своего образования охватывает буквально все нерациональные числа.

Линия масштабирования. Ещё одна родословная, описывающая происхождение и взаимное проникновение золотоносных сущностей, отражена в работе [3]. По словам её автора, она способна растопить лёд «самых оголтелых противников обобщения ЗС».

Он вообще-то близок к истине, ибо предметом обобщения стало уравнение золотого сечения с его преобразованием в две характеристические формы второго порядка:

$$a^2 = pa + p^2 , \qquad b^2 = 3pb - p^2 .$$

Они обе дают решение

$$(a,\ b,\ c) \ = \ p\Phi \cdot \left(1,\ \Phi,\ \Phi^2\right) = p\Phi^3 \cdot \left(\phi^2,\ \phi,\ 1\right),$$

где $c = a + b$ – целое, состоящее из меньшей a и большей b частей; $p = (b - a)$ – их разность.

То есть мы видим то же классическое золотое сечение, только с масштабированием единичного отрезка в $p\Phi^3$ раз.

Всё здесь довольно корректно до тех пор, пока не гиперболизируется значимость деления в золотом отношении отрезка произвольной длины по сравнению с его единичным аналогом.

Ибо с точки зрения математики это одно и то же.

Их идентичность проявляется в самых разных ракурсах.

Например, по первому характеристическому уравнению можно составить эквивалентное разностное уравнение или обобщённую последовательность f_n с начальными условиями $(f_0,\ f_1)=(0,\ 1)$, которая непосредственно связана с числами Фибоначчи F_n исключительно по степенному фактору:

$$f_n = pf_{n-1} + p^2 f_{n-2} = p^{n-1}F_n\,.$$

Что здесь отличительное, так это сами квадратные уравнения (в привычных обозначениях неизвестного x и корней λ):

$$x^2 - px - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = p(\Phi, -\phi);$$

$$x^2 + px - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = p(\phi, -\Phi);$$

$$x^2 - 3px + p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = p\left(\Phi^2,\ \phi^2\right).$$

Понятно, вне зависимости от коэффициента p, за счёт обычного линейного масштабирования соотношение корней не меняется и составляет $-\Phi^2$ или Φ^4.

Автор наоборот считает это архиважным: «Отношения корней являются тем фундаментальным свойством, тем родовым признаком, который объединяет обобщенные и классические характеристические уравнения золотого сечения» [3]. – В принципе, почему бы и нет... Но тем самым идея главных или родовых признаков всё больше и больше распыляется на маловажные несущественные детали-фрагменты.

Как тут не вспомнить исходную метафорическую метаграмму с заменой букв.

Прежде всего, триномы $x^2 - x - 1$, $x^2 - 3x + 1$ являются частными случаями более общей квадратичной модели.

К ней легко прийти, если вспомнить формулу Муавра–Бине для чисел Люка $L_n = \Phi^n + (-\phi)^n$ и теорему Виета о сумме и произведении корней квадратного уравнения.

Можно также дополнительно ввести коэффициент пропорциональности p. Кстати, не обязательно положительный.

Задавшись, например, парой корней $\lambda_{1,2} = p\left\{\Phi^n,\ (-\phi)^n\right\}$, приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\boxed{x^2 - pL_n x + (-1)^n p^2 = 0}\,,$$

где L_n – числа Люка (n = 0, 1, 2 ...): 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 ...

Итак, получаем бесконечное множество квадратных уравнений общего вида, дающих не только степени золотой константы $\Phi^{\pm n}$, но также их пропорциональное изменение, включая обычное масштабирование (усиление – ослабление), за счёт параметра p.

Отсюда становится понятным происхождение в уравнении квадрата p^2, – в результате произведения корней, имеющих один и тот же коэффициент пропорциональности.

Если p – целое число, то квадратное уравнение имеет целочисленные коэффициенты.

В продолжение работы [3], полученное соотношение вполне подходит под категорию обобщённого квадратичного уравнения (модели) золотого сечения <второго порядка>.

Именно уравнения! Никакого обобщения самого ЗС здесь, конечно, нет и в помине.

При желании степени образуемых корней $\Phi^{\pm n}$ можно назвать «семейством степеней золотой константы».

Говорить о каких-то проявлениях родовых признаков, типа отношении корней в нашем уравнении $|\lambda_1/\lambda_2| = \Phi^{2n}$, также не приходится. – Эка невидаль, что каша естся!

Да, вывели универсальное квадратное уравнение, дающее решение в виде степеней константы ЗС, умноженных на коэффициент пропорциональности $p \neq 0$. Ну, и хорошо.

Единственный родовой признак здесь неизменно связан с самим присутствием в решение константы Ф.

Оно органично и непреходяще.

Вместе с тем подобных золотосодержащих структур существует превеликое множество. Даже в разрезе квадратных уравнений.

Так, *модель нечётных коэффициентов* квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$ для любой тройки целых нечётных чисел m, p и $q = \dfrac{5m^2 - p^2}{4}$ приводит к решению $\lambda_{1,2} = \dfrac{p \pm m\sqrt{5}}{4}$ с иррациональностью $\sqrt{5} = \Phi + \phi$.

Например, для $m = 7$ получаем такие пары коэффициентов уравнения:

$(p\ \ q)$ = (1 61), (3 59), (5 55), (7 49), (9 41), (11 31), (13 19), (15 5), (17 –11), (19 –29) …

И все они дают решение $\lambda_{1,2} = \dfrac{p \pm 7(\Phi + \phi)}{4}$.

Логика противоречий. В ряде рассуждений по развитию теории ЗС просматривается довольно любопытное и логически противоречивое наслоение.

С одной стороны, принимается, скажем, неочевидное утверждение, что изменение в цепной дроби (1) золотой константы не имеет отношения к обобщению теоретических построений ЗС.

Просто получается другое число. И точка.

Хотя, заметим, это далеко не факт (см. ниже).

С другой стороны, провозглашается теза [7], что вариация коэффициента p в триноме $x^2 - px - 1$ имеет прямое отношение к обобщению ЗС.

Даже, несмотря на то, что тоже приводит к другим числам – корням тринома, называемым «семейством золотых констант». – Это ж только придумать!

На наш взгляд, в рамках расширения структуры ЗС обе эти математические манипуляции мало чем отличаются друг от друга.

Допустим, мы решили назначить отличительным признаком равенство мантисс числа и обратного к нему числа по схеме $x - x^{-1} = p$.

Но точно так ничто не ограничивает и не мешает определить другой *базовый (родовой) признак соотнесения с золотым сечением*, например:

наличие бесконечного и непрерываемого ряда единиц в цепной дроби.

Иначе говоря, если таковая цепочка-вереница единиц наблюдается, то допустимо рассуждать о наличии термов похожести на модель золотого сечения ЗС или её фактическом расширении-обобщении.

Это не фантазии. Таковой класс чисел действительно существует и неплохо изучен.

Благородные числа. Продолжая разговор о непрерывных дробях, возьмём, число с разложением в цепную дробь аналогично золотому сечению, за исключением первого числа, равного 3 (трём).

Легко показать, что оно равно:

$$[3,\ \overline{1}] \ = \ \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+}}} \ = \ \frac{1+\phi}{4+3\phi}.$$

По Г. Аракеляну «любое изменение в цепной дроби, в частности золотой константы, это попросту переход к другому числу» и не относится к обобщениям ЗС.

Зато, когда он сам изменяет коэффициент p в уравнении $x^2 - px - 1 = 0$, то это якобы имеет отношение к обобщению ЗС. Более того, во славу этого, корни обычного квадратного уравнения объявляются «золотым семейством». Наперекор учебникам по математике.

Константу Φ мы действительно не обобщаем. Это всегда было нашей исходной тезой.

Но однозначно сказать, что форма $[3,\ \overline{1}]$ никак не связана с золотым сечением, как-то тоже не получается. Всё бы и ничего, но подобных чисел превеликое множество, которое имеет мощность континуума или равномощно множеству всех вещественных чисел.

Благородное число[4] определяется как иррациональное число, имеющее цепную дробь, которая в какой-то момент становится бесконечной последовательностью единиц $\overline{1}$:

$$\nu = [0;\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ \overline{1}].$$

Прототипом таких чисел стала малая константа золотого сечения $\phi = [0;\ \overline{1}]$, для которой цепная дробь полностью состоит из единиц, кроме нулевого члена или целой части.

Любое благородное число можно записать как

$$\nu = \frac{A_n + \phi A_{n-1}}{B_n + \phi B_{n-1}}, \qquad (2)$$

где A_k, B_k – соответственно числитель и знаменатель подходящих рациональных дробей.

Некоторые типичные примеры:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+...}}} \ = \ [3,\ 2,\ \overline{1}] \ = \ \frac{2+\phi}{7+3\phi} \ = \ \frac{3+2\phi}{10+7\phi} \ = \ \frac{5+3\phi}{17+10\phi} \ = \ \frac{8+5\phi}{27+17\phi} \ = ...;$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+...}}} \ = \ [2,\ 3,\ \overline{1}] \ = \ \frac{3+\phi}{7+2\phi} \ = \ \frac{4+3\phi}{9+7\phi} \ = \ \frac{7+4\phi}{16+9\phi} \ = \ \frac{11+7\phi}{25+16\phi} \ = ...;$$

$$[1,\ 2,\ \overline{1}] = \frac{2+\phi}{3+\phi}; \qquad [1,\ k,\ \overline{1}] = \frac{k+\phi}{k+1+\phi}; \qquad [1,1,\ 2,\ \overline{1}] = \frac{3+\phi}{5+2\phi};$$

[4] http://mathworld.wolfram.com/NobleNumber.html.

$$[k,\,2,\,\overline{1}]=\frac{1+\phi}{k+(k+1)\phi};\qquad [k,\,3,\,\overline{1}]=\frac{1+2\phi}{k+(2k+1)\phi};\qquad [k,\,m-1,\,\overline{1}]=\frac{1+m\phi}{k+(mk+1)\phi};$$

$$[k,1,\,2,\,\overline{1}]=\frac{1+2\phi}{k+1+(2k+1)\phi};\qquad [k,1,\,4,\,\overline{1}]=\frac{1+4\phi}{k+1+(4k+3)\phi};\qquad [k,1,\,m,\,\overline{1}]=\frac{1+m\phi}{k+1+(mk+m-1)\phi};$$

$$[1,\,2,\,2,\,\overline{1}]=\frac{5+2\phi}{7+3\phi};\qquad [2,\,2,\,2,\,\overline{1}]=\frac{5+2\phi}{12+5\phi};\qquad [k,\,2,\,2,\,\overline{1}]=\frac{5+2\phi}{5k+2+(2k+1)\phi};$$

$$[k,\,\overline{1}]=\frac{1+2\phi}{k+2+(2k-1)\phi};\qquad [3,\,3,\,3,\,\overline{1}]=\frac{3+7\phi}{10+23\phi}.$$

Следует отметить, что цепные дроби дают более универсальный способ представления вещественных чисел. – Для них не имеет значения выбор системы счисления.

Можно ли называть данные числа условно "золотоносными"? – Вполне. Хотя бы из-за наличия в их записи константы ϕ или корня из пяти. А также согласованности цепных дробей в виде наличия бесконечного непрерывного ряда единиц $\overline{1}$.

А именовать «обобщёнными золотыми сечениями»? – При желании можно всё. Как говорится, если даже нельзя, но сильно хочется...

На самом деле какие-то параллели-ассоциации, возможно, и просматриваются.

Но строго-понятийная взаимосвязь с золотым сечением всё-таки отсутствует.

Представляется, это ближе к тому, если записать любое вещественное число a в виде произведения $a=\Phi\cdot b$, где $b=a\phi$, и провозгласить о "генетической" связи константы a с золотым сечением.

В целом же всё зависит от взаимной договорённости в среде научной общественности и формулирования непротиворечивых дефиниций.

Поэтому формы (2) нарекли *благородными числами*. Абсолютно точно и корректно.

Вроде, как и связаны они с понятием золотого сечения (благородного металла).

Но, увы, не такие золотые. Не та проба.

Термин "золотое сечение" давно застолблён за уникальным разбиением целого на две части и соответствующей математической константой $\Phi=\phi^{-1}$.

Какие-либо обобщения этой константы противоречат здравому смыслу.

Та же форма *p*-сечений или тринома старших степеней известна математикам более полувека и вполне самодостаточна без присоединения "золотых" прилагательных.

Как и алгебраическое уравнение общего вида, которое обязательно содержит золотое сечение в частном случае определённого набора коэффициентов.

Золотоискателям на заметку. Есть в формообразовании (2) ещё одна, пожалуй, наиболее примечательная изюминка. С поправкой на наше повествование.

Данная запись не только выражает саму константу ЗС в частном случае $[\overline{1}]=\dfrac{1+\phi}{2+\phi}=\phi$.

Все остальные числа (2) также определяются через константу ЗС.

То есть золотое сечение буквально красной линией пронизывает все эти бесконечные вереницы новых чисел. Казалось бы, бери и называй их «обобщённым золотым семейством» или «золотыми числами».

Во всяком случае, у них на это неизмеримо больше "наследственных прав", чем у тех же корней обычного квадратного уравнения. Не говоря уже о других триномах.

Тем не менее, англоязычные авторы подошли к понятийному словообразованию весьма тщательно, в лучших традициях разных математических школ. Они ввели для чисел (2) новый вполне понятный и удобоваримый термин – "благородные числа".

Корректно. Правильно. Доходчиво и непротиворечиво.

Достойный образец для золотоискателей.

Линия тринома старших степеней. Вопросы-коллизии, связанные с триномом старших степеней $x^p = x^{p-1} + 1$ или p-формами (p-сечениями, p-числами Фибоначчи и т.п.) достаточно подробно освещены в работах [10–12].

Нет необходимости повторяться. Само за себя говорит только наше строгое алгебраическое понятие «тринома старших степеней» вместо образного сленга «золотых p-сечений».

Рассмотрим только один новый конкретный вопрос. В рамках обсуждаемой проблемы.

Пытаясь как-то развить собственное впечатление от развития теории ЗС [7] в статье [4] приводятся свои «родовые признаки для золотых p-пропорций».

Беглый анализ позволяет утверждать, что к выделению-назначению этих признаков подошли весьма поверхностно.

Они не только не обоснованы, но и не отражают какие-либо специфически-отличительные черты или особенности именно этих структур:

- Так, первый "родовой признак" фиксирует, что корень λ уравнения $x^p = x^{p-1} + 1$ ему же тождественен $\lambda^p \equiv \lambda^{p-1} + 1$. Однако это абсолютно верно и очевидно для любого алгебраического уравнения. По определению корней! Так же как и цитируемое затем свойство-атрибут $x^p = x \cdot x^{p-1}$ степеней.
- Другой признак акцентирует внимание на том, что для эквивалентной возвратной (рекуррентной) последовательности $f_{p+n} = f_{p-1+n} + f_n$ достоверно выполняется свойство $\lim\limits_{n \to \infty} f_{n+1} / f_n = \lambda$. Но это качество также не является некоей характерной чертой именно данной структуры.

Согласно теореме Бернулли, если λ – наибольший по модулю и единственный корень полинома общего вида, то практически для любого набора начальных условий эквивалентная полиному возвратная (рекуррентная) последовательность обладает указанным предельным свойством [13].

Остаётся только недоумевать от положений и выводов в работе [4].

Исторический *p*-изоморфизм. Одновременно вызывает непонимание сам факт хронической суматохи-суеты с упомянутой алгебраической структурой.

Каким-то не характерным для науки неотступным освидетельствованием её наличия-присутствия в безмерном океане человеческих знаний.

Всё это так удивительно, ибо триномиальные формы старших степеней $x^{p+1} = x^p + 1$ глубоко и основательно исследованы в ряде работ (только вдуматься!) более полувека назад.

В том числе, как частные случаи более общих характеристических уравнений, например,

$x^s = x^r + 1$,	*Dickinson*	(1950) [14];
$x^{p+1} = ax^p + b$,	*Raab*	(1963) [15];
$x^p (x-1)^q = 1$,	*Harris*	(1964) [16].

И никогда ни у кого не зарождалась мысль называть их "обобщёнными ЗС", а их корни – "золотыми сечениями".

Хотя все они содержат ЗС отдельным частным эпизодом. Как впрочем, и алгебраическое уравнение общего вида в своих бесконечных вариациях в зависимости от высшей степени, количества слагаемых, величин коэффициентов и т.д.

Так, согласно модели Харриса $x^p(x-1)^q = 1$ [16] аналитическая форма для чисел эквивалентной обобщённой последовательности Фибоначчи (по типу формулы Муавра–Бине) с традиционно единичными начальными условиями $f_k = 1,\ k = \overline{0, m-1}$ имеет вид

$$f_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{n+1}}{m\lambda_i - p}, \tag{3}$$

где λ_i – корни характеристического уравнения, $m = p + q$ – количество этих корней.

Данное соотношение находится путём составления системы уравнения на основе начальных условий и её решения по правилу Крамера с вычислением определителя матрицы Вандермонда, составленной построчно из термов-членов геометрической прогрессии.

В этой связи невольно вспоминаются, можно сказать, недавние работы [17, 18], которые были специально посвящёны получению формулы Бине типа (3) для числовых p-рядов, но так и не выведенной. Между тем, ей полвека.

Элементы последовательности Фибоначчи можно также вычислять с помощью комбинаторной формулы через элементы треугольника Паскаля

$$f_n = \sum_{i=0}^{\lceil n/m \rceil} C_{n-ip}^{iq}. \tag{4}$$

Отметим, что в работах современных золотоискателей часто и верно говорится о комбинаторной связи p-рядов Фибоначчи с треугольником Паскаля. Но аналитической конечно-суммирующей формулы (4) вы там просто не найдёте. Хотя ей ~ 50 лет отроду.

Имеем также сравнительно простую форму для суммирования элементов ряда:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i\, C_{q-1}^{i}\, f_{n+m-i}$$

с её разнообразными вариациями [16] и т.д.

Все эти, как впрочем, и многие другие давно известные равенства, в своём частном случае $q = 1$, безусловно, справедливы для триномиальной модели старших степеней $x^{p+1} = x^p + 1$ или p-сечений.

Пути расширения задачи ЗС. Расширение задач, родственных с золотым сечением, может осуществляться самыми разнообразными способами.

Если посмотреть чуть глубже, то практически «любой алгебраический полином с доминирующим положительным корнем, так или иначе, отражает деление единичного отрезка на две части в определённой пропорции» [10].

В работе [7] это множество искусственно сужается: «В качестве фундаментального признака, выделяющее "золотое семейство среди множества других теоретически допустимых семейств, естественно брать уникальное *правило сохранения* <совпадения> *мантиссы* (ПСМ)» – в форме простого квадратного уравнения $x - x^{-1} = p$.

Заметим, что естественность данного признака вовсе не очевидна.

Де-факто он произволен. Нечто свободного выбора (набора) начальных условий.

Хотя и подводится некая база: «В нашем же случае выбор правила сохранения мантиссы отнюдь не случаен. Ведь если вдуматься, ПСМ связано с понятием обратной величины, относящимся к числу основных в теории чисел, необходимым, прежде всего, для сведения операции деления к умножению на обратную величину» [7].

При этом приводятся очевидные преобразования типа $\Phi = e^{\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = e^{\operatorname{arsh} 1/2}$, тривиально связывая две тождественные (по определению) записи [19]:

- $x \equiv e^{\ln x}$ – равенство, вытекающее из определения логарифма с любым основанием, в данном случае в виде натурального логарифма e, то есть

$$x \equiv 2^{\lg_2 x} \equiv \pi^{\lg_\pi x} \equiv \Phi^{\lg_\Phi x};$$

- $\operatorname{sh} x \equiv \left(e^x - e^{-x}\right)/2$ – определение (обозначение) функции гиперболического синуса с обратной функцией – гиперболическим арксинусом (ареасинусом) $\operatorname{arsh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Формально соединяя два тождества при x = 1/2, получаем $\Phi = e^{\ln\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}\right)} = e^{\operatorname{arsh} 1/2}$.

Соответственно положительный корень $\lambda = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}+1}$ уравнения $x^2 - px - 1 = 0$ тождественно переписывается как $\lambda = e^{\operatorname{arsh} p/2}$.

Стоит обратить особое внимание на то, что именно этот исключительный вид квадратного уравнения $x^2 - px - 1 = 0$ позволяет перейти к тождественной перезаписи корня в его адекватной форме (по определению) через арксинус.

Именно это, и только это породило упомянутое правило мантисс.

Потому, не мудрствуя лукаво, другая разновидность уравнения $x^2 - x - q = 0$ просто "выдавливается" из круга подходящих кандидатов на расширение теории ЗС.

Всего лишь по причине наличия в тождестве для арксинуса единицы $\operatorname{arsh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, где уже нет места коэффициенту q:

«Надо сказать, что вообще-то *золотое* здесь обычно понимается в переносном смысле как *прекрасное*, *замечательное по достоинствам* и т.п., но главное, конечно, не это. Вторая последовательность (p = 1, q = 2, 3,…) явно избыточна в том смысле, что фундаментальному признаку ПСМ, который не с потолка ведь взят, она не соответствует и потому к золотому, в указанном смысле слова, семейству причислена быть не может» [7]. – Явно ангажированная селекция, больше похожая и направленная на подгонку результатов под форму $e^{\operatorname{arsh} p/2}$.

Тот же признак равенства мантисс превосходно подходит и для корней уравнения $x^2 - x = q$. Только нужно сравнивать числа-корни $\lambda(q) = \left(1 + \sqrt{1+4q}\right)/2$ с их квадратами.

При этом получается всецело безупречная и красивая структура.

Она идеально подходит под понятие "родового признака" с убедительнейшим формальным свойством-правилом сопоставления-равенства мантисс числа и его квадрата.

С совершенным геометрическим и алгебраическим толкованием квадрата. Всё также формируется бесконечный ряд иррациональных взаимных пар чисел, которые отличаются целым числом и порождают интересный эффект равенства мантисс числа и его квадрата.

Более того, подобных числовых и адекватных им алгебраических структур существует великое множество.

Для демонстрирования ограничимся лишь полиномами с малым числом членов, в частности, триномами, которые наиболее удобны и просты в своих комментариях.

Имеют одинаковые мантиссы такие структуры ($n \geq 2,\ q,\ a,\ r$ – положительные целые):

$a)\ x^n - x = q$ – число и его n-я степень, например, число и его квадрат;

$b)\ x^n - x^r = q$ – две разные степени числа, в том числе $x^n - x^{n-1} = q$ – две последовательные степени числа;

$c)\ x^n = ax + 1 \ \Rightarrow\ x^{n-1} - x^{-1} = a$ – степень числа и его обратное значение, включая само число и его обратное значение [7];

$d)\ x^n = ax^{n-1} + 1 \ \Rightarrow\ x - x^{-n+1} = a$ – число и обратное значение его степени (отрицательная степень числа).

Возможны и другие варианты, например, $x^n (x-1)^q = 1$ – взаимная обратимость двух степеней: числа $1 < x < 2$ и его мантиссы $x - 1$. В простейшем случае единичных степеней $n = q = 1$ получается всё та же модель золотого сечения $\Phi(\Phi - 1) = 1$. И так далее...

Заметим, что равенство мантисс, о котором с восторгом говорят золотоискатели, глядя на пары чисел $x^2 \div x$ или $x \div x^{-1}$, вообще-то вещь в математике заурядная.

Этим свойством обладают любые разности $A(x) - B(x) = p$, равные целому числу p.

Например, первое пришедшее на ум равенство $x - \sin x = p$ (рис. 1). Для удобства представления числа приведены к интервалу (–1, 1) путём вычитания p.

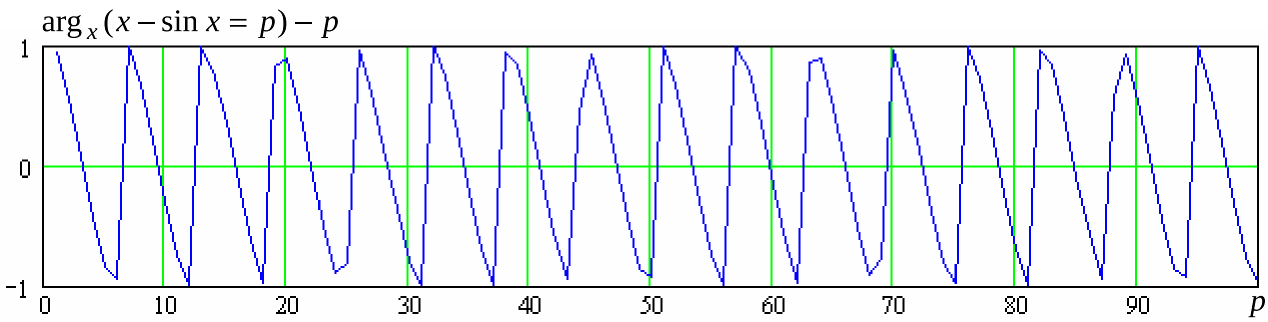


Рис. 1. Бесконечная непериодическая числовая последовательность, для которой наблюдается равенство мантисс чисел и их синусов

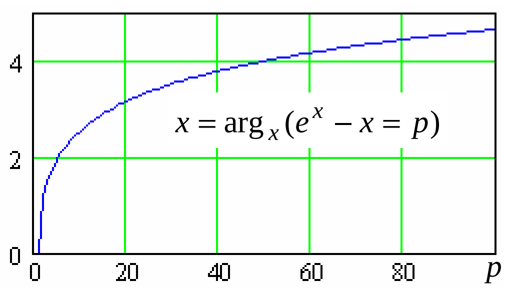


Рис. 2. Бесконечный числовой ряд, в котором равны дробные части чисел x и экспоненты e^x

Или то же самое с экспоненциальной зависимостью $e^x - x = p$ (рис. 2).

Например, для $p = 10$ имеем

$$e^{2{,}5279632202..} = 12{,}5279632202..$$

И мало кто впадает в состояние экзальтации или «возносит свои руки к небу, прославляя творца вселенной»[5] от подобных совпадений.

Ибо эти идентичности генетически заложены в большинстве абстрактных конструкций в виде равенств с целочисленной правой частью.

[5] Из песен прославления христианской церкви.

Рациональные зёрна. Итак, сама идея выбора или назначения "родовых признаков" (в терминологии Г. Аракеляна), бесспорно, заслуживает внимания.

Хотя, на наш взгляд, если быть точнее, здесь речь идёт больше о системе задаваемых ограничений или выборе подмножества опорных (реперных) точек.

Так или иначе, подобное действо позволяет как-то ужать множество и сузить круг предполагаемых элементов, «чтобы не заходить слишком далеко по пути обобщений и не отрываться от "золотого домена"» [5].

Но вот его насыщение конкретикой пока больше походит на субъективные условности, которые никак не отражают возможность применения единых и сообразных правил к назначению этих ограничений.

В этом смысле «обобщённых золотых сечений», конечно же, не бывает.

Можно рассматривать обобщение задачи (теории) золотого сечения. В контексте геометрии, алгебры, пропорции и др. Но само расширение перестаёт быть "золотым".

Фундаментальная модель *k*-боначчи. Есть ещё одна модель, которая совершенно необоснованно исключается в работе [7]. Только потому, что "не вписывается" в абсолютное числовое тождество (по определению экспоненты и арксинуса) $\Phi = e^{\ln \Phi} = e^{\operatorname{arsh} 1/2}$.

Если говорить про *обобщение задачи ЗС* (но не самого числа ЗС!), то, прежде всего, необходимо обратиться к известной модели k-боначчи[6] с её алгебраической формой

$$x^k = x^{k-1} + \ldots + x + 1.$$

Модель k-боначчи является наиболее последовательным, логичным и естественным расширением чисел Фибоначчи и задачи ЗС.

Хотя в работе [7] высказывается противоположное мнение: «константы k-боначчи имеют мало общего с золотым числом и едва ли могут удовлетворять правилу, требующему сохранения фундаментальных признаков константы Ф... <поскольку> для $k > 4$ все числа и константы k-боначчи могут вычисляться лишь приближёнными численными методами».

Предельно ясно, что автор искусственно и намеренно подгоняет всё исключительно под свою заранее выбранную форму, отбрасывая по необоснованным или, скажем, слабо аргументированным соображениям, остальные структуры.

Поиск корней уравнения численными методами, о которых он говорит, разумеется, не является в данном вопросе сколь серьёзным доводом. Ибо само золотое сечение с его квадратным корнем из пяти $\sqrt{5}$ точно также вычисляется приближённо.

Кроме того, уравнение k-боначчи легко приводится к триному.

Достаточно сначала умножить на x:

$$x^{k+1} = x^k + \left(x^{k-1} \ldots + x^2 + x\right) = x^k + \left(x^k - 1\right) = 2x^k - 1,$$

затем разделить на x^k:

$$x = 2 - x^{-k} \quad \Rightarrow \quad x + x^{-k} = 2.$$

Таким образом, модель сводится к простому и наглядному правилу:

сумма константы и её обратной k-й степени равна двум.

Чем не фундаментальное свойство? – Не менее, а может и более основательное, чем равенство мантисс «числа – его обратной величины», «числа – его квадрата» и др.

В конечном счёте, это дело вкуса или математических предпочтений, но никак, ни догматических утверждений.

---

[6] Часто говорят также "k-наччи".

Здесь даже не нужно всё выстраивать по ранжиру. Достаточно понять-принять изначально-субъективную и необоснованную исключительность "правила мантисс" [7].

Что касается общности модели k-боначчи с константой Φ, то она буквально "генетическая".

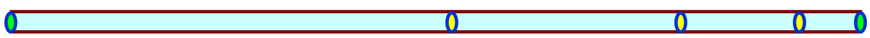
Это, пожалуй, самое правильное и логически выверенное направление, органически вытекающее из золотой пропорции. Причём, не выходя за пределы планиметрии.

Соответственно система k-боначчи легко идентифицируется (квалифицируется) нами как *задача о крайнем и* $(k-1)$ *средних отношениях*: целое так относится к первому, как оно ко второму, которое, в свою очередь, – к третьему … и так далее до последнего <отрезка>:

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots = \frac{g}{1-b-c-d-\ldots-g} \quad \Rightarrow \quad b^k + b^{k-1} + \ldots + b = 1;$$

$$x = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad x^k = x^{k-1} + \ldots + x + 1.$$

Например, для четырёх отрезков $k=4$ расположение трёх точек деления приобретает вид (задача о крайнем и трёх средних отношениях):



И так далее до бесконечности. В пределе $k \to \infty$ имеет место типичная дихотомия $\sum_k 2^{-k} = 1$ или задача «о крайнем и бесконечном количестве средних отношений».

При этом каждые два соседних отрезка относятся в соотношении $1:2$.

Здесь легко наводится и аналитика: n-й элемент последовательности k-боначчи определяется по формуле[7]

$$F_n^{(k)} = \left\lceil \frac{\lambda^{n-1}(\lambda-1)}{\lambda(k+1)-2k} \right\rceil,$$

как ближайшее целое, где λ – положительный корень уравнения $x + x^{-k} = 2$.

В частности, для чисел Фибоначчи имеем $F_n = F_n^{(2)} = \left\lceil \dfrac{\Phi^{n-2}}{3\Phi-4} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \right\rceil$.

А вот скошенный куб[8] (*snub cube*, 32 треугольника и 6 квадратов) с единичной длиной ребра связан с моделью 3-боначчи.

Он имеет площадь поверхности $S = 6 + 8\sqrt{3}$ и объём $V = \sqrt{\dfrac{203+613\,t}{9(35\,t-62)}}$,

где $t = \left(1 + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\right)\!\big/3 \approx 1{,}8393$ – константа трибоначчи.

Преемственность модели *k*-боначчи. Последовательная преемственность в переходах k-боначчи наиболее ярко проявляется в задачах типа подбрасывания монеты.

Обычно здесь используется такой термин как *пробег*[9] – последовательность из двух и более последовательно-идентичных результатов (исходов).

Изучение пробега из двух и более одинаковых бросков в общей трассе хорошо развито.

---

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Generalizations_of_Fibonacci_numbers#Tribonacci_numbers.
[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Snub_cube.
[9] http://mathworld.wolfram.com/Run.html.

Тем не менее, подробное рассмотрение на удивление сложно, учитывая простой характер основного процесса.

Подбрасывание монеты часто используется в повседневной жизни в качестве генератора случайного исхода[10].

Хотя теоретический и экспериментальный анализ показывает, что результат до известной степени предсказуем.

В частности, если известны начальные данные: расположение, скорость и момент импульса. При использовании механического устройства, способного произвести бросок со строго заданными параметрами, выпадающий результат весьма предсказуем.

Проблема бросания монеты связана с k-боначчи-последовательностью.

Например, вероятность того, что не будет пробега из двух последовательных исходов в n бросках идеальной монеты, равна $F_{n+2} / 2^n$.

Аналогично, вероятность того, что не случится пробег из k последовательных исходов в n бросках идеальной монеты, равна $F_{n+2}^{(k)} / 2^n$, где $F_i^{(k)}$ – число k-боначчи или k-шаговое число Фибоначчи [20].

Исторический "квадратизм". На страницах Института золотого сечения можно часто встретить перечисление в одном ряду исследователей – "первооткрывателей" квадратных уравнений: В.Шпинадель (1998), Д.Капрафф, М.Газале, А.Татаренко, Н.Косинов, что более подробно отражено в работе [21].

Они часто упоминаются так, будто «впервые обратили внимание на обобщение рекуррентного соотношения Фибоначчи вида $F_n = pF_{n-1} + F_{n-2}$ и ввели формулу для корня квадратного уравнения $\lambda = \left(p + \sqrt{p^2 + 4}\right)/2$ в современную теорию чисел Фибоначчи».

Одновременно периодически подчёркивалось, что «первой к этому математическому результату <обобщению ЗС> пришла Вера Шпинадель, которая назвала полученные ею пропорции, возникающие при решении простейшего квадратного уравнения, металлическими».

Несколько позже были озвучены и другие подобные откровения:

«Оказалось, что до работ Веры Шпинадель и Александра Татаренко к "металлическим пропорциям" пришли Виктор Шенягин (1997) и Грант Аракелян (1989). Благодаря семинару удалось внести уточнения в историю и приоритет важного научного открытия в области "математики гармонии"».

Вот такая общая моторика гиперболизации.

Сенсации... Научные открытия...

И главное, где? – В обычном школьном алгебраическом уравнении.

А в чём? – Что оно упоминается авторами или в той или иной мере анализируется.

Будто они «начали изучать новый (?) класс рекуррентных числовых последовательностей, ... <которые> привели к открытию нового (?) класса математических констант» [22]. – Читай: *корней квадратного полинома*.

В этой связи целесообразно напомнить некоторые очевидные положения [23].

- Прежде всего, в рамках изложения данной темы хорошо известна взвешенная r-обобщённая последовательность Фибоначчи $V_{n+1} = a_0V_n + a_1V_{n-1} + ... + a_{r-1}V_{n-r+1}$, введенная (1960) Майлсом [24].

[10] http://ru.wikipedia.org/?oldid=43060085.

- Хорадам [25] (1965) подробно рассмотрел фундаментальные свойства обобщённых числовых последовательностей $w_n = w_n(a, b;\, p, q)$, основанных на квадратном уравнении $x^2 = px + q$, с парой произвольных начальных условий $(w_0, w_1) = (a, b)$.

Отдельные случаи начальных условий $w(1, p;\, p, q)$ и $w(2, p;\, p, q)$ изучил ещё Люк (1878) [26] и Жарден [27].

- В работе [28] исследуется непростая задача по нахождению конечных сумм для s-степеней $\sum_{k=0}^{n-1} w_n^{\,s}$, а также свойства величин w_{mn}.

- Эйзенштейн предложил [29] и Лорд [30] решил (1985) элегантную проблему эффективного представления n-й степени константы золотого сечения в виде непрерывной цепи, содержащей числа Люка L_n:

$$\Phi^n = L_n - \frac{(-1)^n}{L_n -}\ \frac{(-1)^n}{L_n -} \dots$$

Позже данная форма обобщена [31] для последовательности $w(a, b;\, p, q)$ согласно квадратному уравнению общего вида.

- Безусловно, это более высокие уровни сложности или развития задачи, нежели элементарное представление, вытекающее из записи квадратного уравнения.

Когда, например, разложение корня λ в цепную (непрерывную) дробь самым тривиальным образом и без особых умственных усилий записывается непосредственно из самого уравнения $\lambda^2 = p\lambda + q$ путем его многократного повторения:

$$\lambda = p + \frac{q}{\lambda} = p + \frac{q}{p + \frac{q}{\lambda}} = p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \dots}} = p + \frac{q}{p +}\ \frac{q}{p +}\ \frac{q}{p +} \dots .$$

На подобные закономерности обратил внимание ещё Эйлер (1748)[11].

- Кроме того, квадратное уравнение вида $\lambda^2 = p\lambda + q$ обратной подстановкой $y = e^{\lambda x}$ воспроизводит линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$.

Уравнение такого типа часто встречается в самых разнообразных задачах математики и физики.

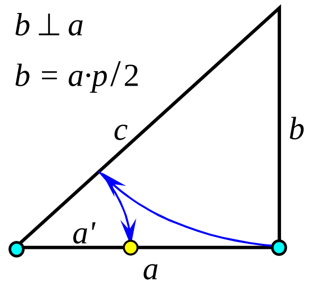
Например, в теории колебаний, теории цепей переменного тока и др.

Его решения хорошо известны и зависят от значений корней $\lambda_{1,2}$.

В частности, если действительные решения квадратного уравнения не равны друг другу $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, где A, B – произвольные постоянные.

- Весьма интересен подход [32] для геометрического сечения отрезка a в пропорции, вытекающей из квадратного уравнения усечённого вида $x^2 = px + 1$ (см. рисунок):

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Solving_quadratic_equations_with_continued_fractions.



$$c = \sqrt{b^2 + a^2} = \frac{\sqrt{p^2+4}}{2}a$$

$$a' = c - b = \frac{\sqrt{p^2+4} - p}{2}a$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{2}{\sqrt{p^2+4} - p} = \frac{p + \sqrt{p^2+4}}{2}$$

Таким образом, подробное изучение свойств обобщённых числовых последовательностей $w_n = w_n(a, b;\ p, q)$ и сопутствующих форм, основанных на квадратном уравнении $x^2 = px + q$ с начальными условиями $(w_0, w_1) = (a, b)$, восходит, как минимум, к 1965 году (*A.Horadam*).

Причём ранние исследования, на удивление, более содержательны, чем у большинства последователей.

Оно и понятно. Нелегко в этом плане состязаться с профи Ассоциации Фибоначчи.

Хотя бы потому, что они давно и целенаправленно сконцентрировали свои усилия на конечный результат.

А вот проявления апломба не способствуют поиску истины, расстраивают историческую преемственность и потому малопродуктивны.

Вместо заключения. Разумеется, можно, нужно и должно проводить смежные исследования.

Порой догонять...

Пусть даже иногда с повторяющимися результатами. Бывает и так. Такова жизнь.

Однако когда вопрос касается отражения первенства идей, и особенно провозглашения «сенсаций и научных открытий», то здесь следует быть особо аккуратным в оценках и хорошо ориентироваться в предметной области.

Тогда золотоискательская мечта иллюзорной гиперболичности, включая "золотую терминологию", уйдёт в небытие, оставив золотоносную тематику в её истинном свете. – "Золотом" свете, который совершенно не нуждается в дополнительном окрашивании.

Точно так, как и расширение задачи золотого сечения.

Когда появляются новые структуры, новые числа и модели. Но уже без всякого "золотого" окрашивания. Хотя и с возможной специфической терминологией, типа благородных чисел.

Так что можно обобщать задачу ЗС сколько угодно, как и куда угодно.

Только следует давать своим новоиспеченным конструкциям, если они действительно новейшие, и новые названия по типу:

колесо, велосипед, телега, мотоцикл, автомобиль, ... самолёт, ракета...

Точно так, как целые числа развили и назвали ... рациональными.

Рациональные числа обобщили и нарекли ... вещественными (действительными).

Вещественные числа расширили и наименовали ... мнимыми.

Мнимые числа обобщили на четырехмерное векторное пространство и назвали ... кватернионами.

Скалярные величины обобщаются векторами, те в свою очередь тензорами. И так далее.

Ну, а в "расширителе задачи ЗС" пока всё какие-то призрачные «обобщённые ЗС», «семейство золотых констант». Вроде как одной мало.

Сдаётся, мы даже знаем, почему. Пусть, возможно, субъективно.

Попробуем угадать с одного раза. Стоит только убрать из терминологии слово "золотые" <сечения>, <константы> (во множественном числе), как они превращаются в обычные математические формы, давно и хорошо изученные в различных тематических публикациях. На которые так не любят ссылаться некоторые современные золотоискатели.

Есть и другая сторона медали…

Не стоит забывать, что ко многим, так называемым «обобщениям ЗС», можно адекватно прийти совсем в противоположном направлении.

От общего к частному.

Например, от алгебраического уравнения общего вида – к триному произвольной степени. Причём как бы и не зная или не догадываясь о самом существовании ЗС.

И спокойно, без всякой "золотосодержащей патетики" исследовать данные структуры.

При желании давать отличительные названия, в частности, трином старших степеней, трином младших степеней, параболические числа, квадратичные пропорции и т.п.

И отдельно, как бы, между прочим, упоминать, что модель в частном случае содержит хорошо известное золотое сечение.

Ну, а называть решения квадратных уравнений золотыми для учёных как-то несолидно.

Тут уже безо всяких обиняков и метаграмм "родовые признаки" точно перевоплощаются и наводняют математику формами-призраками.

Здесь совершенно не спасает запись $\Phi = e^{\operatorname{arsh}\ 1/2}$, которая является обыкновенной, если не сказать заурядной перезаписью-сложением двух тождественных равенств: согласно определению логарифма $x \equiv e^{\ln x}$ и гиперболического арксинуса $\operatorname{arsh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, и не содержит сколь значимой информации о золотом сечении Φ с признаками новизны.

Тем более тут не котируется искусственная подгонка под конечный результат, когда обобщение задачи ЗС необоснованно сужается до уровня квадратного уравнения $x^2 - px = 1$, отбрасывая в сторону многие другие известные структуры: полином старших степеней $x^p - ax^{p-1} - 1$, трином $x^p + ax - 1$, многочлен *n*-боначчи $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1$ и другие модельные конструкции третьего порядка и выше.

Да и второй порядок позволяет выстраивать любопытные конструкции истинного обобщения квадратного уравнения ЗС, например, в предложенном нами виде $x^2 - pL_n x + (-1)^n p^2 = 0$, дающего степени золотой константы $\Phi^{\pm n}$, а при желании одновременное пропорциональное изменение за счёт параметра p, где L_n – числа Люка.

В то же время множество положительных корней полинома $x^2 - px - 1$ противоестественно называть «семейством золотых констант», ибо при $p > 1$ они не имеют никакого отношения к феномену золотого сечения.

То есть наличествует тенденциозная и противоречивая терминология.

В то же время понятие «семейства золотых констант» вполне бы могло прижиться, например, за множеством целочисленных степеней $\Phi^{\pm n}$.

Таким образом, реструктуризация золотого сечения допустима и возможна.

В одних случаях она не выходит за пределы чётко ограниченного "золотого" поля и сводится к частичным видоизменениям-вариациям, как-то: выражению степеней константы ЗС, масштабированию и т.п.

В других случаях происходит коренная ломка структуры ЗС, с переходом на совершенно новое формирование отношений в пропорции и образование иных отличительных конструкции.

Что, в свою очередь, требует привлечения соответствующей новой терминологии сообразно получаемым результатам.

Естественно безо всяких там позолот.

Как твердит народная мудрость, какие б серьги не одевали, позолота всё равно слиняет.

Другими словами, золотое сечение заканчивается сразу же, как только уходит корень из пяти $\sqrt{5}=\Phi+\phi$. Именно органичное присутствие в математических формах этой величины становится визитной карточкой золотого сечения. С незримым присутствием прямоугольника со сторонами $1:2$ и диагональю $\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$

«А что сверх этого, то от лукавого» (Мф. 5:37).

Литература:

1. *Маклаков А.Г.* Общая психология: Учебник для вузов. – СПб: Питер, 2001. – 592 с. – http://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Psihol/makl/.

2. *Василенко С.Л.* Общее и частное в систематике золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15307, 28.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322073.htm.

3. *Владимиров В.Л.* О "родовых признаках" обобщенного и классического уравнений золотого сечения для рекурсий 2-го порядка и 2-й степени // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.17537, 20.06.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321263.htm.

4. *Стахов А.П.* "Родовые признаки" для обобщенных золотых сечений // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17515, 10.06.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321260.htm.

5. *Аракелян Г.* Реплика на статью А.П.Стахова «"Родовые признаки" для обобщённых золотых сечений» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17521, 13.06.2012.

6. *Клещёв Д.* О движении и неподвижности в науке // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17520, 13.06.2012.

7. *Аракелян Г.* О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm.

8. *Василенко С.Л.* Структурирование целого и его частей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17044, 01.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322058.htm.

9. *Бескин Н.М.* Бесконечные цепные дроби // Квант. – 1, 1970, 16–26; 8, 1970, 10–20.

10. *Василенко С.Л.* Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.

11. *Василенко С.Л.* Миф про обобщения золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=32&sm=2.

12. *Василенко С.Л.* "Математика гармонии": на распутье // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17151, 28.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322104.htm.

13. *Василенко С.Л.* Гармоническая пропорция в линейных разностных уравнениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15330, 09.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321111.htm.

14. *Dickinson D.* On Sums Involving Binomial Coefficients // American Mathematical Monthly, Vol. 57 (1950), 82–86.

15. *Raab J.A.* A Generalization of the Connection between the Fibonacci sequence and Pascal's Triangle // Fibonacci Quarterly, **1.3** (1963), 21–31.

16. *Harris V.C.*, *Styles C.C.* A Generalization of Fibonacci Numbers // Fibonacci Quarterly. – **2.4** (1964), 277–289. – http://www.fq.math.ca/Scanned/2-4/harris.pdf.

17. *Стахов А.П.*, *Розин Б.Н.* Теория формул Бине для *p*-рядов Фибоначчи и Люка // Эл. журнал Таганрогского радиотехн. ун-та «Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы». – 2005. – № 1(21). – С. 67–83.

18. *Stakhov A.*, *Rozin B.* Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers // Chaos, Solitons & Fractals. – 2005, 27(5), 1162–1177. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321036.htm.

19. *Василенко С.Л.* Позолоченные балахоны // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17121, 19.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322093.htm.

20. *Fibonacci n*-Step Number. – From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/Fibonaccin-StepNumber.html.

21. *Василенко С.Л.* Золотоискательская болезнь гиперболичности // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.04.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=66.

22. *Стахов А.П.* Почему золотые *p*-сечения и «металлические пропорции» представляют наибольший интерес для развития «математики гармонии»? // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17388, 26.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321112.htm.

23. *Василенко С.Л.* Золотоискательская болезнь гиперболичности // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.04.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=66.

24. *Miles E.P.* Generalized Fibonacci Numbers and Associated Matrices // Amer. Math. Monthly 67 (1960), 745–757.

25. *Horadam A.F.* Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers // The Fibonacci Quarterly, **3.3** (1965), 161–176.

26. *Lucas E.* The Theory of Simply Periodic Numerical Functions. – Fibonacci Association, 1969. – 78 p. – http://www.fq.math.ca/Books/Complete/simply-periodic.pdf / First published in the *American Journal of Mathematics*. – Vol. 1 (1878), pp. 184–240, 289–321.

27. *Jarden D.* Recurring sequences. – Riveon Lematematika, Jerusalem, 1958.

28. *Jin-Zai Lee, Jia-Sheng Lee.* A Note on the Generalized Fibonacci Numbers // The Fibonacci Quarterly, **26.1** (1988), 14–19.

29. *Eisenstein M.* B-530, 531. Problems Proposed // The Fibonacci Quarterly, **22.3** (1984), 274.

30. *Lord G.* B-530, 531. Problems Solved // The Fibonacci Quarterly, **23.3** (1985), 280–281.

31. *Shannon A.G.*, *Horadam A.F.* Generalized Fibonacci Continued Fractions // The Fibonacci Quarterly, **26.3** (1988), 219–223.

32. *Sean Bradle.* A Geometric Connection between Generalized Fibonacci Sequences and Nearly Golden Sections // The Fibonacci Quarterly, **38.2** (2000), 174–178.